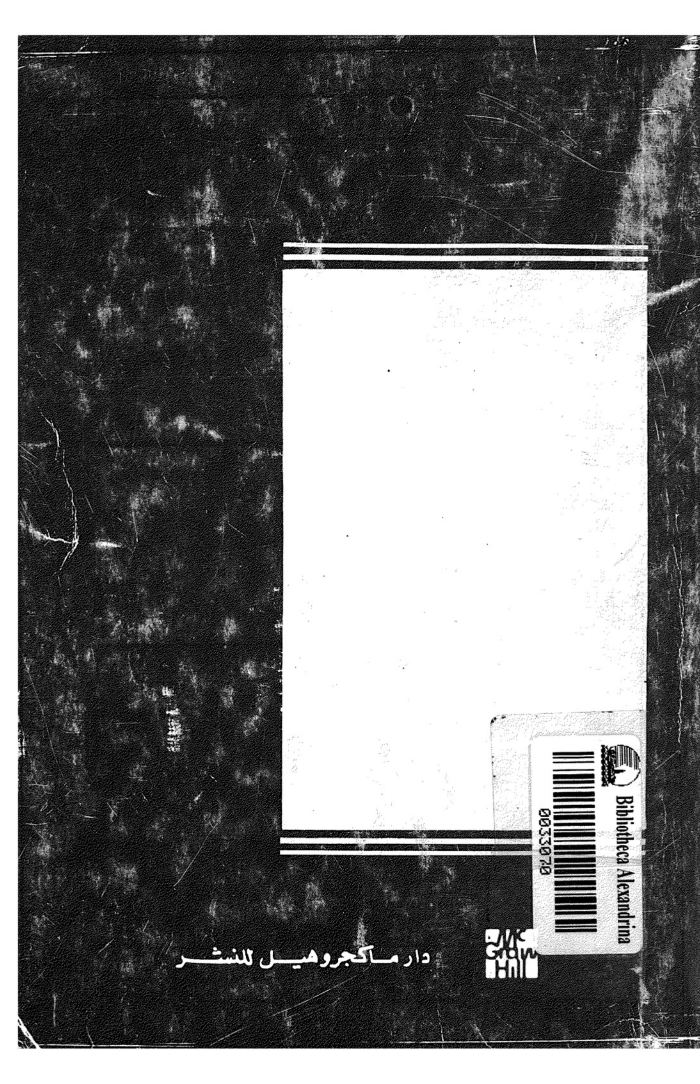

دار ماكجروهيل للنشر
McGraw-Hill
Bibliotheca Alexandrina
0033070

نظرية اقتصاديات الوحده

أسلوب رياضى

تأليف

جيمس . م . هندرسون

أستاذ الاقتصاد – جامعة مينسيوتا

ريتشارد أ . كواندت

أستاذ الاقتصاد – جامعة برينستون

ترجمة

دكتور/متوكل عباس مهلهل

الأستاذ المساعد – الاقتصاد الرياضى

جامعة الملك عبد العزيز – المدينة المنورة

مراجعة

دكتور/محمد مسلم الردادى

أستاذ مشارك – الاقتصاد الرياضى

كلية الاقتصاد والتجارة

جامعة الملك عبد العزيز – جده



دار ماكجروهيل للنشر

نيويورك . سانت لويس . سان فرنسيسكو . أوكلاند . بوجوتا . دوسلدورف . جوهانسبرج . لندن . مدريد .. مكسيكو . مونتريال . نيودلهي . بناما . باريس . ساوباولو . سنغافورة . سيدنى . طوكيو . تورنتو . القاهرة .

Microeconomic Theory
A. Mathematicat Approach

حقوق التأليف © ۱۹۸۰ ، ۱۹۷۱ ، ۱۹٥۸ دار ماكجروهيل للنشر . إنك . جميع الحقوق محفوظة

الطبعة العربية ۱۹۸۳ تصدر بالتعاون مع المكتبة الاكاديمية بالقاهرة ABC ودار المريخ للنشر - المملكة العربية السعودية - الرياض ص.ب ۱۰۷۲۰

لا يجوز نشر أى جزء من هذا الكتاب أو اختزان مادته بطريقة الاسترجاع أو نقله على أى وجه أو بأى طريقة سواء كانت الكترونية أو ميكانيكية أو بالتصوير أو بالتسجيل أو خلاف ذلك إلا بموافقة الناشر على هذا كتابة ومقدماً .

ISBN 0.07-019276-6

المحتويات

CONTENTS

فاتحة الكتاب

لقد شهد القرنان الماضيان تطبيقات للطرق الرياضية فى جميع فروع حقل الإقتصاد تقريبا . ولقد شملت هذه التطبيقات نظريات تحقق الأمثلية الفردية للوحدات وكذلك توازن السوق الداخلة ضمن إطار فرع حقل الإقتصاد ألا وهو إقتصاد الوحدات الصغيرة . ولقد صيغت النظريات التقليدية فى إطار رياضى ثم أثبتت النتائج الكلاسيكية أو لم تثبت . فالاستفادة من علم الرياضيات وسع من نطاق اشتقاق نتائج جديدة متعددة ، وخصوصا فى هذا الحقل لأن الافتراضات التى تقوم عليها تحقيق الحد الأعلى من الربح والمنفعة هى ذاتها تتصف بمعايير رياضية .

ففى المراحل الأولية من هذا التطور الرياضى .. نقسم الإقتصاديين إلى قسمين : المؤيد وغير المؤيد تحت المسمى الإقتصاديون الرياضيون والإقتصاديون الأدبيون أو الاقتصاديون الغير رياضيون .. ولكن لحسن الحظ فإن هذا الانقسام الحاد أخذ فى التصدع وسوف يزول تماما بمرور الزمن وأصبح من الواضح فى زمننا هذا أن كثيراً من الإقتصاديين وطلاب الإقتصاد أصبحوا يقدرون قيمة الرياضيات ويكيفوا أنفسهم مع مستوى متوسطا منها للإستفادة منها فى حقل الإقتصاد .

ومن الناحية الأخرى ، لقد تنبه كثير من الإقتصاديين الرياضيين إلى محدودية الرياضيات . ولعل من العدل القول بأنه قبل مضى زمن طويل من الآن ويصبح استخدام الطرق الرياضية فى علم الإقتصاد مسلم به .

وبزيادة ممارسة كثير من الإقتصاديين وطلبة الإقتصاد فى حقل الرياضيات فإن الأهمية سوف تتركز ليس على تعليم طلبة الإقتصاد الرياضيات الأولية والمتوسطة ولكن سوف تتركز على تعليمهم الإقتصاد فى قالب رياضى . فكتابنا هذا قد صمم للإقتصاديين وطلبة

الاقتصاد الذين تعلموا بعض المفاهيم الرياضية وتدربوا عليها ولكنهم لم يمارسوا درجة كبيرة من الرياضيات المتقدمة . ولم نقصد بهذا الكتاب كمرجع للرياضيات لطلاب الإقتصاد . ولقد طورت المفاهيم الأساسية فى إقتصاديات الوحدات الصغيرة بمساعدة بعض الرياضيات المتوسطة .

ولم يكن إختيار وتسلسل الأفكار الإقتصادية مبنيا على أساس ما يحتويه من مفاهيم رياضية إنما كان التسلسل حسب المفاهيم الإقتصادية . ولقد وضع هذا الكتاب للقارىء الذى يمتلك قليلا من العلم فى كلا الحقلين (حقلى الإقتصاد والرياضيات) ولقد خصص للطلاب فى المراحل المتعددة جدا من دراستهم الدنيوية وكذلك طلاب مراحل الدراسات العليا فى الإقتصاد وكذلك الإقتصاديون المحترفون الذين يرغبون فى معرفة كيف تساعد الرياضيات المتوسطة فى فهم بعض الأفكار الإقتصادية . فمعرفة أحد العلمين معرفة متقدمة جيدة قد يغنى عن النقص فى المعرفة فى العلم الآخر . فالطالب الذى تكون خلفيته ضعيفة فى إقتصاديات الوحدات الصغيرة سوف لا يقدر مشاكل هذا العلم أو محدوديات الطرق الرياضية ما لم يراجع بعض الكتابات الأدبية البحتة فى هذا المجال وسوف يجد بعضها فى قائمة المراجع المختارة الموجودة فى نهاية كل باب من أبواب هذا الكتاب.

إن إلمام الطالب بمحتوى فصلين دراسيين فى علم التفاضل والتكامل كفيلا بتحضيره لهذا الكتاب [1] . ولقد وضعنا فى الملحق مراجعة لبعض المفاهيم الرياضية المستخدمة فى شرح الأفكار المقدمة ، ولكنه ليس كافيا للطالب الذى لم يتعرض لحساب التفاضل والتكامل ولكنه سوف يخدم كمنعش لذاكرة أولئك الذين لهم علم بحساب التفاضل والتكامل . وبالإضافة لهذا فإن الملحق يحتوى على بعض المفاهيم التى لم تغط فى مواد التفاضل والتكامل المستخدمة فى هذا الكتاب مثل قاعدة كريمر ، مضروبات لأقرانج وبعض المعادلات الفرقية .

فإذا رغب القارىء فى توسيع قاعدة معلوماته عن بعض الأفكار والمفاهيم المشروحة فى الملحق فعليه مراجعة بعض الكتب والمقالات المنصوص عليها فى قائمة المراجع الموجودة فى نهاية الملحق .

أما القارىء الذى ليس له إلمام بعلم التفاضل والتكامل فعليه مراجعة الأبواب الخمس عشر من الكتاب التالى :
R.G.D. ALLEN, HATHEMATICAL ANALYSIS FOR ECONOMISTS (LONDON: MACMILLAN, 1938).

وفى الختام يود المؤلفان أن يقدما جزيل شكرهما لأولئك الإقتصاديين الأوائل الذين كان لهم شرف تقديم تطبيق الرياضيات فى علم الإقتصاد وخصوصا فى حقل إقتصاديات الوحدات الصغيرة ، مثل هيكس وبول سامولسون وعديد من الآخرين الذين ذكرت أسماؤهم فى نهاية كل باب من أبواب الكتاب ضمن قائمة المراجع المختارة .

جيمس هيندرسان
ريتشارد كوندت

تمت الترجمة ولله الحمد على ذلك فى مساء يوم الإثنين العاشر من شهر ربيع الثانى من العام ١٤٠٣ هـ من هجرة المصطفى ﷺ الموافق الرابع والعشرون من شهر يناير من العام ١٩٨٣ م من الميلاد ..

فالله الحمد والشكر والصلاة والسلام على خير خلقه وأفضل رسله الحبيب محمد بن عبد الله ... والسلام ..

المترجم
(د . متوكل عباس المهلهل)

الفصل الاول

مقدمة

لم يعرف الاقتصاد تعريفا واضحا للتغير المستمر فى موضوعاته التى مالبثت تتغيير مع المدارس الاقتصادية المختلفه •• ومن التعاريف العامه للاقتصاد ماعرفه به البعض بدراسة استخدام العناصر المحددة لتحقيق المطالب المختلفة ، وهذا التعريف يصبح كافيا اذا فسر بتوسع كاف لجعله يضم دراسة العناصر الغير موظفه ويغطى كذلك الحالات التى متطلباتها أختيرت عن طريق الاقتصاد بين أنفسهم • وبدقه أكثر يمكن تعريف الاقتصاد على أنه علم اجتماعى يشرح حركات الافراد والشعوب فى عمليات انتاج وتبادل واستهلاك المنتجات والخدمات •

١ - ١ دور النظريات : THE ROLE OF THEORY

ان من أهم أهداف الاقتصاد ،وكذلك معظم العلوم الاخرى ، هما التنبوء والتوضيح ومن أجل الوصول الى هذين الهدفين ، فانه من الضرورى التعرف على التحاليل النظرية والأبحاث العدديه والتى تظهر وكانها متداخله فى بعضها فى بعض الأمثله ، ولكنها فى الواقع متميزة عن بعضها البعض • فالنظريات تستخدم الاستنتاجات المجرده بينما النتائج تعتمد على مجموعة الافتراضات الاوليه بينما الدراسات العددية الصرفه تكون منطقيه بطبيعتها • وكلاهما يكمل الاخر حيث أن النظريات تمد الدراسات العددية بالارشادات بينما الدراسات العددية تمد النظريات بالاختبارات اللازمة للافتراضات ونتائج النظريات •

ومن حيث المبدأ فان أى نظرية تحتوى على ثلاثة مجموعات من العناصر وهى :

(١) حقائق علميه أو فروض تلعب دور الكميات متغيرة القيمه (المجاهيل) ويفترض أنها تكون معطاة من خارج النطاق التحليلى •

(٢) متغيرات تحدد كميتها النظريات •

(٣) أفتراضات سلوكيه تعرف مجموعة العمليات التى توصلنا لمعرفة قيمة المتغيرات •

أما نتائج المناقشات النظرية فانها تنص على ماستكون عليه نتائج العمليات الاقتصادية عندما تتحقق الافتراضات الاوليه ، بمعنى أنه اذا أعطينا الحقائق العلميه فان الافتراضات السلوكيه سوف تتحقق •

وللمقارنة بين الافتراضات والنتائج التى تعطيها النظريات والحقائق الملحوظة فانه لابد من التدقيق والبحث العددى ولكن ليس بصورة المطابقة التامة بين الحقائق الملحوظة والنتائج التى تعطيها النظريات وإلا فاننا فقدنا الغرض من النظريات والتى تمثل تبسيطا وتعميما للواقع الملموس ولكنها لاتصف حالات معينه بعينها انما عموميات • ولهذا فان التثبت من الحقائق العلمية والافتراضات السلوكية والمتغيرات فى أبواب هذا الكتاب والتى تمثل حالات السوق الحقيقة قليلة جدا والا فاننا نحتاج الى نظريات مستفيضة لكل سوق منفرد وماذا يجرى فيه من عمليات اقتصادية هى بذاتها تأخذ طابع خاص فى كل سوق وهذا النوع من النظريات التطبيقية له قيمة عند القيام ببحث واحد ولكنه يفقد عموميته عند تطبيقه على سوق تمثل مجموعة من الأسواق ويصبح من السهل جدا وصف الحالات الخاصة بعد معرفة الحالات العامه والتى توصلنا اليها عن طريق استخدام النظريات الصرفه فى معرفة ماذا يجرى داخل العمليات الاقتصادية كنقطة انطلاق لخلفيات تساعد على فهم الحالات الخاصه فيما بعد •

٢ - ١ نظريات اقتصاديات الوحدات : MICROECONOMICS

وكمعظم العلوم الأخرى فان علم الاقتصاد ينقسم الى أجزاء وأقسام ومن أقسامه الرئيسية علم اقتصاديات الوحدات ونظرياته ويشمل دراسة الحركات الاقتصادية للافراد ومجتمعات الأفراد المعينة • أما القسم الرئيسى الآخر لعلم الاقتصاد فهو النظريات الاقتصادية الكلية والتى تشمل دراسة المجموعات ككل مثل التوظيف والدخل القومى من النظرة الكلية وليس من النظرية الوحدية كما فى القسم الأول من علم الاقتصاد •

وكلا القسمين يتعاملان فى إيجاد الأسعار والدخول (جمع دخل) أو استعمالات الموارد الاقتصادية • فبينما نظرية اقتصاديات الوحدات تركز على تحليل الأسعار والأسواق بصفة فردية ، وكذلك توزيع موارد اقتصادية بعينها الى استخدامات معينه ، تقوم النظرية الاقتصادية الكلية بالحصول على دخول الافراد ضمن عملية التسعير العامه الأفراد تكتسب دخولها ببيع عوامل الانتاج التى تقدر أسعارها كما تقدر الأسعار الأخرى أما فى حالة النظرية الاقتصادية الكليه فان هدفها هو الحصول على الدخل القومى ، وتوظيف الموارد ككل وكذلك مؤشرات التسعير الكلية مع تركيز ثانوى فقط على الارتباطات بين أطراف المجاميع المختلفة •

وبما أن مشكلات تقرير الأسعار الفردية ليست من وظائف النظرية الكلية فان العلاقة بين الوحدات الفردية والمجاميع ليست واضحة ولو كانت كذلك ، فان التحليل سوف يكون تحت لواء نظريات الوحدات •

إن التسهيلات التى يمكن الحصول عليها عن طريق المجاميع تجعل من الممكن وصف

مكانة وعمليات الاقتصاد وككل عن طريق تجمعات قليلة مبسطة وهذا يكون مستحيلا اذا حافظنا على الاهتمام بالوحدات وسلوكها والأسعار النسبية .

وبالحفاظ على هذا التفريق بين شعب الموضوع المختلفة ، فان هذا الكتاب سوف يكون محصورا على تحليل عرض لنظريات اقتصاديات الوحدات .

فمن خلال الباب الثانى إلى الباب الخامس سوف نركز على نظريات سلوك الافراد فى اقتصاد تنافس تام (كامل) . أما سلوك المستهلك الفردى فسوف تناقش من خلال الباب الثانى والثالث ، وأما سلوك المنتج الفردى فمن خلال الباب الرابع والباب الخامس. وفى هذا التحليل فان أسعار المنتجات المباعة أو المشتراه فانها سوف نفترض على أنها معطاه ولايمكن للأفراد التأثير عليها . أما مقادير المنتجات المباعة والمشتراه فانها تمثل المتغيرات التى تقررها هذه النظريات . فمن خلال الباب السادس فسوف نتعرض للسوق من التنافسية التامة (الكاملة) لسلعه واحدة ونقرر سعرها عن طريق التصرف الحر لمشترى أو بائعى هذه السلعة ، فبينما نعتبر أن أسعار السلع الأخرى معطاه .

ومن الأمور التى تجعل نظريات اقتصاديات الوحدات أكثر مرونه هو سماحها بتغيرات عدة للافتراضات التى بنيت عليها هذه النظريات .

وكمثال لهذا فان الافتراض الذى ينص على أنه ليس باستطاعة فرد واحد التأثير على الأسعار أو على تحركات الافراد الاخرين ، قد عدل فى الباب السابع والباب الثامن من هذا الكتاب . وبالرغم من التغيرات لهذا الافتراض فانه يوجد تشابه قريب بين التحاليل فى الباب السابع والباب الثامن وماسبقهما من الأبواب الأولية . وحتى هذه النقطة من النقاش ، فان التحليل فى هذه الأبواب يعالج مشكلة المستهلكين والمنتجين مع الأسواق التى تحتوى على سلعة واحدة فقط (ماعدا معالجة قصيرة لمشكلة احتكار القلة المميزة) .

ولقد أهملت العلاقة بين جميع الأسواق فى هذه الأبواب ، ولكنها عولجت فى البابين التاسع والعاشر واللذان يركزان على توازن الأسواق العدة بحيث أن جميع الأسعار تتقرر جميعا فى نفس الوقت .

أما الأبواب الأخيرة من هذا الكتاب ، فقد غطت اثنين من أهم فروع نظريات اقتصاديات الوحدات . فالباب الحادى عشر يغطى مسألة اقتصاديات الرفاهية والتى تتعلق بالارشاد للاجابة على "ماالذى ينبغى أن يكون عليه الوضع الاقتصادى ؟" وأن درجة التثبت بين النظرية والحقيقة مهم جدا فى هذا الفرع من الاقتصاد .

فاذا كان شخص ما مهتم بالوصف المطلق ، فان التفارق بين الحقيقة والنظرية يدل على أن النظرية خاطئة فى هذه الحالة لهذا الغرض المعين ، ولكن عندما تصبح النظرية مثال الرفاهية فان مثل هذا التفارق يؤدى الى النتيجة بأن الحالة الحقيقية خاطئة ولابد من تعديل الواقع .

وأخيرا فان الافتراض بوجود عالم ثابت لايخطط فيه المستهلكون والمنتجون للمستقبل، قد خفف التركيز عليه فى الباب الثانى عشر •

١ - ٣ دور الرياضيات : THE ROLE OF MATHEMATICS

إن النظريات الموجودة فى هذا الكتاب قد وضعت فى قالب رياضى يسمح باستخدامها كأداة لتسهيل عمليات الاشتقاق والعرض ويجعل من الرياضيات نبراسا لترجمة النقاش الكلامى الى أطر متكاملة تامة فى صورة رياضية وهذا مما يوسع جعبة الاقتصاديون ويسهل لهم بعض الاستنتاجات من بعض الافتراضات الأوليه ماكان بوسعهم الحصول عليهالو كانت على شكل أفتراضات لغوية (كلامية) •

ولقد كانت التحاليل اللغوية (الكلاميه) أول المراحل فى تاريخ تطور علم الاقتصاد ونظرياته ولكن مع اكتشاف العلاقات الكمية ووضع النظريات الاقتصادية فى أطر رياضيه جعل المناقشات اللغوية أكثر صعوبة وأصبحت مملة ولقد توسع استعمال أقسام الرياضيات نظرا للتعقيدات التى طرأت على المتغيرات الاقتصادية وأصبح علم حساب المثلثات غير كافى لترجمة هذه المتغيرات نظرا لتعددها مما جعل الاقتصاديين يلجأون لفروع الرياضيات الأخرى مثل التحليل الرياضى ، نظرية المجموعات ، والجبر • ولكن هذا لايعنى أن نرمى وراء ظهورنا كل التحاليل اللغوية وانما يمكن استخدامها فى التفاصيل وذكر بعض الانضباطات على النظريات وهذه الأفكار الرياضية التى أستخدمت فى هذا الكتاب روجعت فى آخره وننصح القارئ بمراجعتها ، أو حتى المرور عليها ، قبل قراءة الباب الثانى •

الفصل الثانى

نظريات سلوك المستهلك

ان افتراض تصرف المستهلك بعقل ورصانة ومعرفة تامة لما يجرى حوله هو نقطة الانطلاق فى نظريات سلوك المستهلك لانه يفترض فيه ان يكون على علم تام بكل البدائل الموجوده وان يختار منها لتحقيق الرغبة المستقاة منها باكبر قدر ممكن وان يكون قادرا على تقييمها • وكل هذه المعلومات والتى تخص الرغبه هى المستخلصه من استهلاك هذه السلع المختلفه تذكر فى دالة المنفعة للمستهلك•

ولقد خلت مفاهيم المنفعه ومسألة تعظيمها من كل وصف حسى او احائى •فالقول بأن المستهلك يستخلص اكثر منفعة من امتلاكه السياره عن امتلاكه لبدلة يعنى انه اذا خير بين الاثنين فانه سوف يختار بالتاكيد السيارة على البدله • ولكن هذا لا يعنى ان المستهلك سوف يختار الاشياء التى تعطيه اكثر منفعه تحت جميع الظروف فقد يضطر لان يأخذ اللقاح ضد الجدرى ، اذا كان هناك تهديد بظهور اعراض هذا المرض ، ويستخلص منها فائدة او منفعة جمه بالرغم انه لا يحصل على اية لذة من اخذه اللقاح او المعاناه التى تترتب عليها •

وفى القرن التاسع عشر اعتبر كثير من الاقتصاديين (مثل : ستانلى جيفونز ليون فالراز والفرد مارشال) ان المنفعه قابلة للقياس بمعنى ان المستهلك قادر على ان يعين لكل سلعة يستهلكها او خليط من السلع رقم معين يوضح مقدار المنفعه التى يحصل عليها من استعماله لهذه السلع واسموه المقياس الجوهرى (*cardinal* measure) واعتبروه كمقياس الوزن وانه يمكن معالجته والتصرف فيه على نفس طريقة الاوزان • وعلى سبيل المثال ، افترض ان المنفعه من السلعة (ا) تقدر بخمسة عشر وحدة وان المنفعة من السلعه (ب) هى ٤٥ وحدة ، فالمستهلك يعبر عن تفضيله للسلعه (ب) ثلاثة مرات اكثر من السلعة (ا) والمقارنه بين فروقات المنفعه معترف بها ونستطيع القول بان السلعه (ا) تفضل على السلعه (ب) مرتين بمقدار ما تكون السلعه (س) مفضله على السلعه (S) • وفى حاله استهلاك وحدات اضافيه من السلع المستهلكه فان مقدار المنفعه

المضافة سوف يتناقص مع زيادة الاستهلاك وهذا يعكس سلوك المستهلك والذى يمكن استخلاصه مما سبق . فلنفترض أن المستهلك واجهته مسألة شراء كمية من التفاح بسعر ريالين فانه لن يشترى التفاح اذا كان مقدار المنفعة التى سوف يستلمها بدفعه لقيمة التفاح أكبر من مقدار المنفعة التى سوف يحصل عليها من التفاح .

فاذا افترضنا أن مقدار المنفعة من الريال الواحد هو خمسة وحدات منفعية (utils) وأنها تستمر تقريبا ، ثابتة لبعض التغيرات فى الدخل ، وأن المستهلك يتحصل على علاوة من المنفعة باستهلاك تفاحة اضافية على مجموع التفاح المستهلك حسب الجدول الآتى :

الوحدات	منفعه اضافيه
التفاحة رقم(١)	٢٠
التفاحة رقم(٢)	٩
التفاحة رقم(٣)	٧

المستهلك سوف يشترى على الاقل تفاحه واحده لانه سوف يعطى ١٠ وحدات منفعيه فى مقابل الحصول على ٢٠ وحدة منفعيه وهكذا يزيد فى مجموع منفعته [(١)] وسوف لا يشترى تفاحه ثانيه لان المنفعه المفقوده اكبر من المنفعه المكتسبه . وعلى وجه العموم ، فان المستهلك سوف لا يضيف الى استهلاكه وحدة استهلاك اخرى اذا كان هذا ينقص من مجموع منفعته وسوف يستهلك كمية اكبر اذا تحقق من ازدياد فى كميه منفعته من هذه الزياده فى الاستهلاك فلوان سعر التفاح انخفض الى ٦ر١ من الريال فانه سوف يشترى الان ، تفاحتان بدلا من واحده ، لأن انخفاض السعر ادى الى زيادة الكميه المشتراه وبهذا الاحساس تتنبىء النظريات بسلوك المستهلك . وهذه النظريه للمنفعه المقاسه انما كانت مبنيه على افتراضات معرقله من الممكن الحصول على نفس النتائج باستخدام افتراضات اقل عرقلة وسوف لا نقوم باستخدام المنفعه المقاسه فى بقية هذا الباب ولا نفترض ان استهلاك كمية اكثر من اى سلعة يؤدى الى انخفاض المنفعة .

فاذا كان المستهلك يتحصل على منفعة اكثر البديل (ا) عن البديل (ب) فانه يقال بان المستهلك يفضل (ا) على (ب) [(٢)] . وافتراض السلوك السليم للمستهلك يعادل النصوص الاتيه :

(١) لجميع احتمالات تباديل السلع (ا) و (ب) فان المستهلك على علم بانه اما ان

---

(١) السعر للتفاحة الواحدة هو ٢ ريال والمستهلك يفقد ٥ وحدات منفعيه لكل ريال صرفه ، وعليه فان مجموع الوحدات الضائعة هو ١٠ وحدات بينما مجموع الوحدات المكتسبة هو + ٢٠ وحدة منفعية .

(٢) أن كلمة " يفضل " ("prefer") يمكن اعتبارها خالية من الوصف الحسى أو الاحائى .

يفضل (ا) على (ب) او (ب) على (ا) او انه غير متحيز لاى منهما •
(٢) عليه فقط ان يختار بين التفاضلات الثلاث فى الفقرة (١) و(٣) اذا كان المستهلك يفضل السلع (ا) على (ب)، والسلع (ب) على (س) فانه، بالتأكيد يفضل (ا) على (س) وهذا يضمن تناسق تفضيل المستهلك بين السلع اى ان المستهلك يمتلك خاصية التعدى (transitive) بمعنى انه اذا كان المستهلك يفضل الحصول على سيارة عن الحصول على بدلة ملابس، وبدلة ملابس على قصعة من الشوربه، فانه بالتاكيد يفضل الحصول على السيارة عن قصعه الشوربه • وهذا يتطلب من المستهلك ان يصنف، على درجات، السلع حسب ترتيب التفاضل بينها ولا يحتاج، فى هذه الحاله، لمقياس عددى وانما يحتاج الى مقياس ترتيبى (ordinal) للسلع التى يفضل الحصول عليها ودالة المنفعه (utility function.) سوف تعبر عن هذا المقياس الترتيبى للاشياء المستهلكه وسوف تنسب رقما معينا لكل كمية من السلع الاستهلاكيه المختلفه، ولكن هذه الارقام سوف لا تعكس الا فقط ترتيب تفاضل السلع • فاذا كانت منفعة السلعة (ا) هى الرقم ١٥ ومنفعة السلعة (ب) هى ٤٥ فيمكن القول بان السلعه (ب) مفضله على السلعه (ا) ولكنها عديمة المعنى اذا قلنا ان السلعه (ب) مفضله بثلاث مرات على السلعه (ا) ولقد اكتشفت هذه الطريقة فى بداية هذا القرن ولقد اصبح من الممكن والاسهل وضع السلوك السليم للمستهلك بطريقة ترتيبيه لاعلاقة لها بمرات التفضيل اذ انه ليس من الضرورى وضع تفاضل المستهلك بصورة قياسيه اذ ان الافتراض الاضعف (وهو وجود ترتيب للسلع المفضله بدون مقياس عددى) توصل الى نفس النتيجه بدون غموض او عدم فهم • فالمستهلك فى هذه الحاله تكون لديه قائمة بالسلع المفضله لديه مرتبه حسب درجة تفضيلها والتى يمكن شراؤها بمقدار من النقود يساوى دخله، فعندما يستلم المستهلك دخله، فانه بكل بساطه يستطيع شراء مجموعة السلع التى يفضلها وحسب ترتيبها من الافضل الى الاقل تفضيلا وبهذا فانه لا يحتاج الى مقياس عددى للمنفعة •

٢ - ١ مفاهيم أساسية :

(١) طبيعة دالة المنفعة :

اعتبر الحالة المبسطه والتى تحدد فيها المقدرة الشرائية للمستهلك لسلعتين فقط والتى تحددها دالة المنفعة الترتيبيه
(ordinal utility function)

$$U = f(q_1, q_2) \qquad (٢ - ١)$$

بحيث ان q_1 ، q_2 يعبران عن كمية السلعتين المستهلكتين Q_1 ، Q_2 ويفترض فى هذه الداله ان تكون دالة متصله (continuous) ولها اشتقاق جزئى

متصل من الدرجه الاولى والثانيه
(first- and- second order partial derivative .)
ولهاكذلك دالة منتظمه منضبطه شبه ـ مقعره (١)
(regular strictly quasi-concave function.)

بالاضافه الى ان الاشتقاق الجزئى للدالة(١ـ٢) دائما موجب وهذا يعنى ان المستهلك سوف يرغب دائما فى الحصول على كميات اكبر من كلا السلعتين • ونعرف مدى الدالة بأنه مجموع معدلات الاستهلاك الغير سالب (بمعنى ان معدل الاستهلاك اما يكون باستهلاك سلع او عدم استهلاك سلع) وفى بعض الاحيان يكون المدى محددا على المستويات الموجبه فقط للاستهلاك •

وان دالة المنفعة للمستهلك ليست فريدة (unique) ويمكن تمثيلها بأى دالة متزايدة (increasing) وذات قيمة فردية(single-valued) للكميات q_1 q_2 والرمز U^0 المعطى لاى خليط معين من السلع يوضح ان هذا الخليط من السلع مفضل على اى خليط اخر بارقام اقل ، واقل تفضيلا من السلع التى لهما ارقام اعلى ومستوى المنفعة التى يحصل عليها المستهلك من اى سلعه تعتمد على طول الفترة الزمنيه التى يستغرقها فى استهلاك هذه السلعه او الخلط من السلع • فاستهلاكه عشر قطع من الحلوى فى خلال ساعه او فى خلال شهر يعطى مستويات مختلفة من المنفعة وعليه فانه لا يوجد وقت بعينه تكون دالة المنفعة من خلاله ولذلك فان دالة المنفعة تكون معرفة بالنسبه للاستهلاك خلال فترة زمنيه معينه وهذه الفتره الزمنيه يجب ان لا تحدد بزمن قصير جدا يمنع المستهلك من تحقيق رغباته فى التمتع بمختلف السلع الاستهلاكية • ولكن في نفس الوقت لا يجب ان تعرف دالة المنفعة لفترة زمنيه طويلة جدا والا فان هذا يؤدى الى تغيير مظهر(شكل) الدالة لان تذوق المستهلك قد يختلف فى فترة طويلة كهذه ، ولهذا فان اى فترة زمنيه مناسبه كافيه فى حالة سلوك المستهلك تحت تأثير نظرية عدم الحركة حيث ان عنصر الزمن غير داخل ضمن متغيرات الدالة انما يعتبر ثابت من الثوابت (ما نعنيه هنا هو static theory) بحيث ان دالة المنفعة معرفه بالنسبه الى فترة زمنيه واحدة وان طرق مصروفات المستهلك الاكثر مثاليه تتمشى فى التحليل مع هذه الفتره الزمنيه الواحده ولا يمكن ادخال حساب احتمال تحويل هذه

---

(١) يقال للدالة بانها دالة منضبطه شبه ـ مقعرة فى المجال اذا كان

$$2f_{12}f_1f_2 \quad f_{11}f_2^2 \quad f_{22}f_1^2 > 0.$$

لجميع قيم $0 < \beta < 1$

المصروفات الاستهلاكيه من فتره زمنيه الى اخرى(١)

منحنيات السواء Indifference Curves

يستطيع المستهلك الحصول على مستويات مختلفه من المنفعه من خليط مـــن السلع الاستهلاكيه Q_1 Q_2 التى يحصل عليها وتصبح دالة المنفعة على النحو التالى ، اذا اعطينا المستوى الذى بلغه المستهلك باستخدام بعض السلع

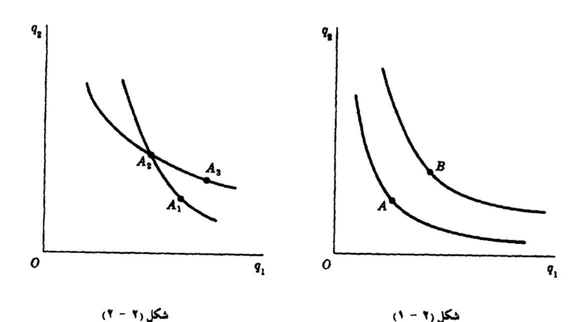
$$U^0 = f(q_1, q_2) \qquad (٢ _ ٢)$$

بحيث ان f_1 ، f_2 كمية ثابته بما ان دالة المنفعة دالة متصله ،فان معادلة(٢ــ٢) تتحقق باى عدد ممكن من الخليط للسلع الاستهلاكيه Q_2. Q_1 ولنفترض ان المستهلك يحصـل على مستوى معين من المنفعه (U^0) من استهلاكه ٥ وحدات من السلعة Q_1 و ٣ وحدات من السلعه Q_2 فاذا افترضنا ان استهلاكه من السلعه Q_1 انخفض من ٥ الى ٤ وحـــدات بدون زيادة فى استهلاكه من السلعه Q_2 فان مستوى المنفعه سوف ينخفض بالتاكيد ولكـن يمكـن تعويضه عن فقدان وحدة من Q_1 بزيادة فى استهلاكه للسلعه Q_2 وليكن مثلا ٣ وحدات وهذا سوف يجعله غير متحيزا بين الرغبه الاولى (٥ وحدات Q_1 و ٣ وحدات Q_2) والرغبه الثانيــه (٤ وحدات من Q_1 و ٦ وحدات من Q_2.) بمعنى انه لا يمانع فى الحصول على أى رغبه من الرغبتين على وجه السواء • وبنفس الطريقه نستطيع الحصول على مستويات اخرى للمنفعه التى من الممكـن الحصول عليها باستهلاك كميات من مجاميع (خليط) مختلف من نفس السلع المستهلكه، وبذلك نحصل على الحل الهندسى (locus) لجميع تبادلات السلع التى يحصل المستهلك من خلالها على نفس المستوى مـن المنفعه وهذا الحل الهندسى يكون منحنى السواء(*indifference curve.*) وتسمـى مجموعة المنحنيات السواء لنفس مستوى المنفعة بخريطة السواء *indifference map*) ولرسم منحنى السواء فاننا نمثل الكميات q_1 وكذلك q_2 للسلـع المستهلكـــه على احداثيات الشكل (٢ــ١) وكـل منحنى من منحنيات السـواء يمـر خلال جميع النقط فى الربع الموجـب من السطح q_2 q_1 وكلمـا اتجـه منحنى المستوى فى اتجاه شمـال شرقى كما كان مستوى المنفعه اكـبر فالتحرك من النقطه A الى نقطه B

---

(١) لاتعتبر التحاليل ماذا يحدث بعد انقضاء فترة الدخل الحالية ويفترض أن المستهلك يقوم بعمل حساباته فقط لهذه الفترة الزمنية وحساب دخله فيها ويعيـد حساباتـه بعد انتهاء الفترة الاولى ويعمل حسابه للفترة التى تليها (لان النقاش لايزال فى حالة ثبوت) وان كان فى استطاعة المستهلك أن يفترض فان حساباته للفترة الزمنية سوف تتكون من دخله زائدا كميه النقود التى اقترضها خلال نفس الفترة الزمنيـة التى اكتسب فيها دخله وبالعكس فى حالة أنه وفر جزءا من دخله ولم يصرفه علـى الاستهلاك (راجع الباب الثانى عشر الجزء الثانى)

يزيد من الكميات المستهلكه من Q_1 , Q_2 وعليه فان نقطه تمثل منحنى سواء لمستوى اعلى من المنفعه .



شكل (٢ - ٢) شكل (٢ - ١)

ولا يمكن لمنحنيات السواء ان تتقاطع كما فى شكل (٢ــ٢) لاننا افترضنا ان المستهلك يحصل على المنفعه U_1 من استهلاكه لخليط من السلع الممثله فى A_1 والمنفعه U_2 من الخليط A_2. وكذلك U_3 من A_3 فعند النقطه A_3 يتمتع المستهلك بسلع اكثر من السلع عند النقطه A_1 ، وعليه فان $U_3 > U_1$. (بمعنى ان المنفعه من النقطه A_3 اكبر من المنفعه من النقطه A_1) ولكن A_1 ، A_2 على نفس المنحنى ولذلك فان $U_1 = U_2$. وكذلك فان A_2 ، A_3 على نفس المنحنى ، ولذلك فان $U_2 = U_3$. وبطبيعة الحال فان $U_1 = U_2 = U_3$. فوجدنا ان U_3 ، U_1 عكس ما فرضناه فى البدايه من ان $U_1 = U_3$، A_1 ، A_3 على نفس المنحنى فلا يمكن اذا للمنحنيات ان تتقاطع كما فى الشكل (٢ــ٢) .

اما من ناحية الافتراض بان دالة المنفعه يجب ان تكون شبه ــ مقعرة منطبعة (strictly quasi-concave) يحدد شكل منحنى السواء :

ولنفترض ان هناك نقطتان مميزتان على احد منحنيات السواء بحيث ان $U^0 = f(q_1^0, q_2^0) = f(q_1^{(1)}, q_2^{(1)})$.

فافتراض ان الدالة شبه ــ مقعرة يتطلب ان :

$$U[\lambda q_1^0 + (1-\lambda)q_1^{(1)}, \lambda q_2^0 + (1-\lambda)q_2^{(1)}] > U^0$$

لجميع قيم $0 < \lambda < 1$. وهذا يعنى ان جميع النقاط الداخليه الواقعه على جزء من اى خط يصل بين نقطتين على منحنى سواء ، تقع على منحنيات سواء تمثل مستويات أعلى من المنفعة ونقول بان منحنيات السواء محدبه فى اتجاه نقطة الاصل •

معدل تعويض السلع RCS . The Rate of Commodity Substitution

بتطبيق قانون الاشتقاق الكلى على دالة المنفعه نحصل على الاتى :

$$dU = f_1\, dq_1 + f_2\, dq_2 \qquad (٢_٣)$$

بحيث ان f_1 و f_2 يمثلان الاشتقاق الجزئى للمنفعه(U) فيما يتعلق بالكميات q_1 . q_2 فالتغير الكلى فى المنفعه (مقارنة بالحاله الابتدائيه) والذى تم بسبب التغيرات فى الكميات q_1 q_2 هو تقريبا التغير فى q_1 (بمعنى dq_1) مضروبا فى التغير فى المنفعه (f_1) كنتيجه لتغير وحده من q_2 زائدا التغير فى q_2. (بمعنى dq_2) مضروبا فى التغير فى المنفعه (f_2) كنتيجه لتغير وحدة من q_2 •

والان، لنفترض ان المستهلك تحرك على واحد من منحنيات السواء الخاصه به بتخفيض بعضا من Q_1 مقابل الحصول على كميه اكبر من Q_2 فاذا كان استهلاكه من Q_1 انخفض بمقدار dq_1 (ولذلك تعامل dq_1 على اساس انها اقل من صفر لانها بتناقص بمعنى $dq_1 < 0$) فيكون ناتج الخساره للمنفعه هو تقريبا يساوى(dq_1 ، q_1) ويكون ناتج الكسب فى المنفعه ، بسبب الحصول على كميه اكبر من Q_1 مقابل التنازل عن بعض Q_1 ، هو تقريبا يساوى ($f_2\, dq_2$) لنفس الاسباب• وبأخذ اجزاء صغيره بصوره غير محدده ، فان حاصل جمع الكميتين $f_1\, dq_1 + f_2\, dq_2$ لابد وان يكون صفرا فى النهايه (اى بمعنى ، اننا قمنا باخذ النهاية لداله المنفعه) لان التغير الكلى فى المنفعه على منحنى السواء الواحد لابد وان يكون صفرا حسب تعريف منحنيات السواء[1] وبما اننا نستخدم دوال المنفعه الترتيبيه، فان كميات($f_1\, dq_1$) وكذلك($f_2\, dq_2$) تكون مجهوله وغير معروفه ولكن لا تزال الحقيقة ان $dU = 0,$ ثابته وعليه فان :

$$f_1\, dq_1 + f_2\, dq_2 = 0 \quad \text{تعطى}$$

$$-\frac{dq_2}{dq_1} = \frac{f_1}{f_2} \qquad (٢_٤)$$

---

(١) تخيل أن دالة المنفعة عبارة عن سطح فى الفضاء الثلاثى three-dimensional space. فعليه يكون اشتقاقها الكلى (معادلة ٢_٣) هو معادلة سطح التماس tangent plane, للسطح فى الفضاء الثلاثى عند نقطة ما وهذا مايعلل استخدامنا لكلمة "تقريبا" فى النقاش •

فمن المعادله السابقة ، يتضح لنا ان ميل منحنى السواء (وهو dq_2/dq_1) هو المعدل الذى يستطيع عنده المستهلك وبرغبته ابدال Q_1 بمكية اكبر من Q_2 لكل وحدة من وحدات Q_1 من اجل البقاء على نفس مستوى المنفعه المرغوب فيه أو المعطى • وعلاقة السالب الموجودة امام الميل ($-dq_2/dq_1$) ــ ترمز الى تعويض السلعه Q_1 من اجل Q_2، وتساوى خارج قسمة الاشتقاقات الجزئيه لدالة المنفعـه (١) ومقلوب (او معكوس) معدل تعويض السلع ((RCS)) هو المعدل الذى يستطيـع المستهلك من خلاله ان يحافظ على نفس مستوى المنفعه من خلال تنازله عن بعض وحدات من Q_1 مقابل زيادة فى وحدات Q_2. •

وفى التحليل القياسى فان الاشتقاقات الجزئيه f_1 وكذلك f_2 تعـرف بأنهـا معدل المنفعه الحدى للسلع *marginal utilities* of the commodities Q_1 و Q_2. وسوف نحافظ على هذا التعريف بالرغم من اننا لا نستخدم المعيار القياسـى وانمـا نستخدم المعيار الترتيبى في المناقشات ولكننا سوف لا نعطى هذا المعدل معـنى قياسى بمعنى ان المقدار العددى للمعدلات الحديه MU يكون خاليا من اى معنى ولا نفـترض ان المستهلك مدركا لوجود المعدل الحدى ولكن فقط ، الاقتصادى هو الذى يحتـاج أن يعـرف أن معـدل التعويض للسلع بالنسبة للمستهلك (RCS) مساويا لنسـبة المعدلات الحدية للمنفعة (MU) (بمعنى أن $RCS = MU$) وعلامات ونسـب المعدلات الحديه لها تفاسير ومعانى فى التحاليل الترتيبية ، فمثلا العلامه الموجبـه أمام (f_1) تدل على أن أى زيادة فى (q_1) سوف تزيد من مستوى منفعـه المستهلك وتجعله ينتقل الى منحنى سواء أعلى مما كان عليه •

وبما أن دالة المنفعة معرفة على أنهـا دالة شبه ــ مقعرة منضبطة فان اللامتسـاوية التالية والتى تحصر القيمة فى عدم مساواة فقط (بدون مساواة معا) تتحقق عنـد كل نقطة داخل مدى الدالة :

$$2f_{12}f_1f_2 - f_{11}f_2^2 - f_{22}f_1^2 > 0 \qquad (٢\text{ـ}٥)$$

١

وبتفاضل أكثر لمعادلة (٢ــ٤) فاننا نحصل على معدل التغيير لميل منحنى وهـو كالتالى (٢) :

$$\frac{d^2q_2}{dq_1^2} = -\frac{1}{f_2^3}(f_{11}f_2^2 - 2f_{12}f_1f_2 + f_{22}f_1^2) \qquad (٢ - ٦)$$

---

(١) يسمى معدل تعويض السلع فى كتابات علم الاقتصاد عادة معدل التعويض الحـدى (الهامشى) the *marginal* rate of substitution. ويعرف عادة بأنه الزيادة فى المنفعة الناتجه عن زيادة فى استهلاك بمعدل وحدة واحدة (ويرمز له بالرمز MRS) وللزيادة فى المعرفة راجع كتاب هيكز تحت عنوان "القيمة ورأس المال"

(٢) لاحظ أن معادلة (٢ــ٦) نتجت من آخذ الاشتقاق الكلى لميل منحنى السـواء بدلا من الاشتقاق الجزئى •

اللامتساوية (٢ــ٥) تضمن أن الجزء ، داخل القوس على الطرف الأيمن من المعادلة (٢ــ٦) يكون سالبا وبما أن ($f_2 > 0$,) فانه يتطلب شبه التقعير المنتظم يملى علينا بأن ميل منحنى السواء السالب يصبح أكبر مقدارا من الناحية الجبرية وأقل قيمة بالنسبة لقيمته المطلقة عند تعويض Q_2. بدلا من Q_1 ويصبح المنحنى أكثر انبساطا وأن RCS (وهو يساوى القيمة المطلقة لميل المنحنى) يتناقص • وكلما تحرك المستهلك منحنى السواء ، فانه يتحصل على كمية أكثر من Q_1 وكمية أقل من Q_2 وعليه فان المعدل الذى من خلاله تظهر رغبة المستهلك فى التضحية بكمية من Q_2 مقابل كمية أكبر من Q_1 يأخذ فى التناقص فتأخذ ندرة وجود Q_2 فى التزايد وتأخذ قيمتها النسبية relative value. فى الارتفاع بالنسبة للمستهلك كلما أزدادت وفرة Q_1 له •

التحقق من وجود دالة المنفعة : Existence of the Utility Function

انه ليس من البديهى الجزم بوجود دوال ذات قيم حقيقية (real-valued functions) تخدم كدوال منفعية لجميع المستهلكين وأن تفضيلات المستهلك لابد وأن تحقق شروط معينة من أجل تمثيلها بدالة من دوال المنفعة وشروط الكفاية التالية يجب أن تتوفر قبل التحقق من وجود دالة منفعة للمستهلك •

(١) ان مجموعات السلع المختلفة المتوفرة للمستهلك يكون لكل واحدة منها علاقة بالمجموعة الأخرى وترمز لها بالحرف R. والذى يعنى العبارة التالية "يكون على الأقل مفضلا مثلما" وتكون لها الصفات الآتية :

(أ) العلاقه R تكون علاقة كاملة (complete) بمعنى أنه لأى زوج من مجموعات السلع A_1 A_2 وأما أن يكون (A_1RA_2,) أو (A_2RA_1,) كلاهما معا •

(ب) العلاقة R تكون علاقة تعد (transitive) بمعنى أنه أذا كان A_1RA_2 وكذلك A_2RA_3, فانه اذا A_1RA_3

(جـ) العلاقة R تكون علاقة أنعكاسية (reflexive) بمعنى أن A_1RA_1 : بغض النظر عما تكون عليه A_1 •

(٢) ان مجموعات السلع المختلفة والمتوفرة للمستهلك مرتبطة (connected) بمعنى أنه اذا كانت المجموعة A_1 والمجموعة A_2 متوفرة للمستهلك فانه يمكن الحصول على خط متصل يربط بين مجموعات السلع المتوفرة للمستهلك A_1. A_2. •

(٣) اذا أعطينا بعض المجموعات من السلع ولتكن A_1 فانه يمكن الحصول على مجموعات أخرى على الاقل تكون أفضليتها فى المنفعة مثل أفضلية A_1 عند المستهلك وكذلك فانه يمكن الحصول على مجموعة أخرى من السلع ليست أكثر أفضلية من A_1 ومثل هذه المجاميع

تكون مغلقة (.closed) بمعنى أنه لو أخذنا أعدادا كبيرة جدا من مجموعات سلع لتكون متتالية تؤول الى مجموعة نهائية من السلع ولتكن A وأنه اذا كان كل عنصر من عناصر هذه المتتالية له على الاقل أفضلية A. عند المستهلك ففي هذه الحالة تكون A أيضا على الاقل مفضلة مثل A_1، وهذه الخاصية (خاصية الاغلاق) تضمن اتصال أفضلية المستهلك وعدم وجود أى تخطى أو قفز ".jumps" وعلى سبيل المثال ، فانه اذا كان هناك مجموعتان من السلع يختلفان عن بعضهما أختلافا طفيفا بحيث أن أحدهما مفضلة على مجموعة من السلع A_1، فان المجموعة الأخرى تكون على الاقل مفضلة مثل A_1 •

وقد يظهر للبعض أن شروط السابقه ملزمة لدرجة أنها تكون دائما متحققة ولكن من السهل ذكر بعض الأفضليات التي لاتحقق الشروط السابقة • فلنفترض أن هناك سلعتان Q_1، Q_2 وأن هناك مجموعتان من السلع $A_1 = (q_1^{(1)}, q_2^{(1)})$ و $A_2 = (q_1^{(2)}, q_2^{(2)})$. واعتبر أن المستهلك يفضل أحد السلع أو المجموعات حسب القاعدة التالية : A_1 مفضلة على A_2 اذا كان إما $q_1^{(1)} > q_1^{(2)}$ or $q_1^{(1)} = q_1^{(2)}$ وكذلك $q_2^{(1)} > q_2^{(2)}$. ففي مثل هذه الحالة ، يكون ترتيب الأفضلية مصنفا (*lexicographic*) ولاتوجد له دالة منفعة لأن الترتيب المصنف يخالف القاعدة الثالثة من الشروط السابقة •

فاذا اعتبرنا المجموعة $A = (q_1^0, q_2^0)$، وافترضنا أن Δq_1 وكذلك Δq_2 ترمز الى الأجزاء (التقسيمات) الموجبه من المجموعة A. ، وحسب الترتيب المصنف فأن المجموعة $(q_1^0 + \Delta q_1, q_2^0 - \Delta q_2)$ تكون مفضلة على المجموعة A • فاذا اخترنا قيم موجبه محدده للتقسيمات (Δq_1 ، Δq_2) واعتبرنا العنصر رقم i من اللانهائية لمجموعات السلع هو :

$$A_i = (q_1^0 + (\tfrac{1}{2})^i \Delta q_1, q_2^0 - \Delta q_2)$$

فانه من الواضح أن A_i يكون مفضلا على A لأى عنصر من عناصر المتتالية ولكن بأخذ نهاية المتتالية $\lim_{i \to \infty} A_i = (q_1^0, q_2^0 - \Delta q_2)$ يتضح لنا أن نتيجة هذه النهاية أدنى من مخالفة بذلك الشرط الثالث من الشروط السابقة •

٢ - ٢ الحد الأعلى للمنفعة THE MAXIMIZATION OF UTILITY

يرغب المستهلك العاقل دائما في شراء خليط من Q_1 و Q_2 والتي من خلالها يستمد أعلى مستوى من المنفعة وهذه المسألة هي مسألة ايجاد الحد الاعلى للمنفعة ولكن على كل حال ، فان دخله محدود ولا يستطيع شراء كميات غير محدودة من السلع ويمكن التعبير عن ضوابط ميزانية المستهلك على النحو التالي :

$$y^0 = p_1 q_1 + p_2 q_2$$

بحيث أن y^0 يمثل دخله (المحدود) و p_1 p_2 يمثلان أسـعار Q_1 ، Q_2 بالتوالى فمقدار مايصرفه على Q_1 هو ((p_1q_1)) زائدا مايصرفه على Q_2 هو (p_2q_2) يساوى مقدار دخله ((y^0))

شروط الدرجة الأولى والثانية The First- and Second-Order Conditions

يرغب المستهلك فى الحصول على الحد الأعلى لدالة المنفعة (٢-١) والعقيدة بالضابط (٢-٧) وللحصول على الحد الاعلى نتبع طريقة لاقرانج بتكوين دالة لاقرانج .

$$V = f(q_1, q_2) + \lambda(y^0 - p_1q_1 - p_2q_2) \quad (٢\text{–}٨)$$

بحيث أن λ مضاعف (مضروب) لم يتعين بعد .

ويمكن الحصول على شروط الدرجه الاولى بوضع اشتقاقات الجزئية الاولية للمعادلة (٢-٨) بالنسبه للمجاهيل q_1, q_2، مساوية للصفر أى بمعنى :

$$\frac{\partial V}{\partial q_1} = f_1 - \lambda p_1 = 0$$

$$\frac{\partial V}{\partial q_2} = f_2 - \lambda p_2 = 0 \quad (٢\text{–}٩)$$

$$\frac{\partial V}{\partial \lambda} = y^0 - p_1q_1 - p_2q_2 = 0$$

وبعد تبسيط المعادلات السابقه ونقل الحد الثانى من المعادلتين الى الطرف الايمن ثم قسمه ناتج المعادلة الاولى على الثانيه نحصل على :

$$\frac{f_1}{f_2} = \frac{p_1}{p_2} \quad (٢\text{–}١٠)$$

وهذه المعادله توضح لنا النسب بين المنفعه الحديه (الهامشـــــــــــه Marginal utility) واسعار السلع بحيث ان نسبه المنفعه الحديه تساوى نسبه الاسعار فى حالة الحصول على الحد الاعلى maximum وبما ان f_1/f_2 = RCS فان شرط الدرجة الاولى للحد الاعلى يتحقق بمساواة النسبة بين الاسعار و RCS .

ويمكن اعادة كتابة المعادلتين الاوليين من (٢-٩) لتصبح

$$\frac{f_1}{p_1} = \frac{f_2}{p_2} = \lambda \quad (٢\text{–}١١)$$

وهذه المعادلة تعبر عن الحقيقه القائلة بان المنفعه الحديه مقسومه علـى السعر يجب ان تكون واحده لجميع السلع. وهذه النسبه تعطى المعدل الذى من خلالــــه يستطيع المستهلك ان يتحصل على منفعه اكثر اذا اصرف ريال إضافى على سلعة معينة فإذا تحصل المستهلك على منفعة اكثر من صرفه ريال اضافى على Q_1 بدلا مـن Q_2 فانه فى هذه الحالة لا يمكن الحصول على الحد الاعلى للمنفعه ولكنه يستطيع تحقيق منفعه اكثر

بتحويل بعضا من مصروفاته من شراء Q_2، إلى شراء Q_1 •
ويمكن ترجمة مضروب لاقرانج (مضاعف لاقرانج (Lagrange multiplier)
على انه المنفعة الحديه لدخل المستهلك (marginal utility of income)
وبما اننا افترضنا ان المنفعة الحدية للسلع موجبه فكذلك المنفعه الحديه للدخل •

ولضمان الحصول على الحد الاعلى للمنفعة للمستهلك فلابد من تحقق شــــرط الدرجه الثانيه كما كان ولابد من تحقيق شرط الدرجه الاولى • فاذا رمزنا للمشتقــات الجزئيه الثانيه لدالة المنفعة بالحروف f_{11} ، f_{22} وكذلك للمشتقات الجزئيه الثانيه المتعاكسه cross بالرمز f_{12} ، f_{21}، فان شرط الدرجه الثانيه للحصول على الحد الاعلى يتطلب ان تكون محدده هيسين المتاخمة(bordered Hessian determinant) موجبه على النحو التالي:

$$\begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} & -p_1 \\ f_{21} & f_{22} & -p_2 \\ -p_1 & -p_2 & 0 \end{vmatrix} > 0 \qquad (٢_١٢)$$

وبحل (٢_١٢) نحصل على :

$$2f_{12}p_1p_2 - f_{11}p_2^2 - f_{22}p_1^2 > 0 \qquad (٢_١٣)$$

وبالتعويض من(٢_٩) والضرب بالعدد $\lambda^2 > 0$
نحصل على

$$2f_{12}f_1f_2 - f_{11}f_2^2 - f_{22}f_1^2 > 0 \qquad (٢_١٤)$$

واللامتساويه في(٢_١٤) والتي هي نفسها المعادله (٢_٥)تحقق افتراض شبه التقعر المنتظم وهذا الافتراض يضمن ان شرط الدرجه الثانيه يتحقق عند اى نقطــــه يتحــقق عندها شرط الدرجه الاولى • وهذا اللامتساويه في(٢_١٤) هي، ايضا ، الشرط الذي يجب ان يتحقق للحصول على حلول شاملة ذات قوة اسيه واحدة للمعادلــــة في (٢_٥) global univalence of solutions وهكذا نجد ان شبه التقعر المنتظم يضمن لنا ايضا حلول الحد الاعلى المقيد للمنفعة تكون فريدة او وحيدة •

<u>مثال</u> : افترض ان دالة المنفعة معطاة على النمط التالي $U = q_1q_2$، وان الاسعار $p_1 = 2$ $p_2 = 5$ ريالات وان دخل الفرد للفتره الزمنيــــه هو ١٠٠ ريال وان ميزانيته مقيده بالقيد : $100 - 2q_1 - 5q_2 = 0$

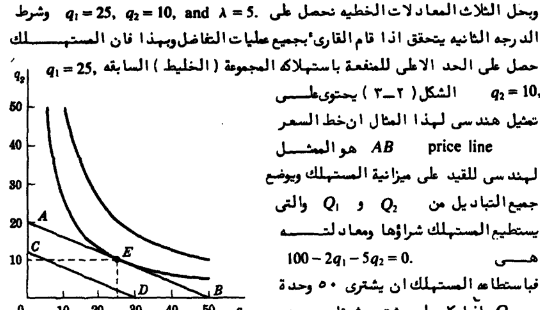
<u>الحــــل</u>: نكون دالة لاقرانج $V = q_1q_2 + \lambda(100 - 2q_1 - 5q_2)$ ونضع اشتقاقاتها الجزئيهمساويه للصفر بحيث ان

$$q_2 - 2\lambda = 0$$

$$q_1 - 5\lambda = 0$$

$$100 - 2q_1 - 5q_2 = 0$$

وبحل الثلاث المعادلات الخطيه نحصل على $q_1 = 25,\ q_2 = 10,\ \text{and}\ \lambda = 5.$ وشرط الدرجه الثانيه يتحقق اذا قام القارئ بجميع عمليات التفاضل وبهذا فان المستهلك حصل على الحد الاعلى للمنفعة باستهلاكه المجموعة (الخليط) السابقه $q_1 = 25,$ $q_2 = 10,$ الشكل (٢ــ٣) يحتوى على تمثيل هندسى لهذا المثال ان خط السعر price line AB هو الممثل الهندسى للقيد على ميزانية المستهلك ويوضح جميع التباديل من Q_1 و Q_2 والتى يستطيع المستهلك شراؤها ومعادلته هى $100 - 2q_1 - 5q_2 = 0.$ فباستطاعه المستهلك ان يشترى ٥٠ وحدة من Q_1 اذا كان لن يشترى شيئا من Q_2 ويستطيع كذلك شراء ٢٠ وحده من Q_2 اذا كان لا يريد شراء شئ من Q_1، وهكذا نستطيع الحصول على خطوط سعر مختلفة لكل مستوى محتمل لدخل الفرد، فلو كان دخله هو ٦٠ ريال فان خط السعر هو CD ومنحنيات السواء فى هذا المثال rectangular hyperbolas (١)



شكل (٢ - ٣)

والمستهلك يرغب فى الوصول الى اعلى منحنى سواء يكون له على الاقل نقطة واحدة مشتركة مع خط دخله AB وبذلك يصل الى نقطة التوازن E والتى يكون عندها خط دخله ماسا لمنحنى السواء، وان اى انتقال الى اى جهة من نقطة التوازن E ينتج عنه تناقص فى مستوى المنفعة • وميل خط السعر الثابت (وهو $-p_1/p_2 = -\frac{2}{5}$) لابد وان

يساوى ميل منحنى السواء • ويتكون نسب الاشتقاقات الجزئيه لدالة المنفعة وميل منحنيات السواء (فى هذا المثال تساوى $-q_2/q_1,$) وبالتالى تساوى (فى هذا المثال يساوى $q_2/q_1 = \frac{10}{25}$) والذى يساوى النسبه بين الاسعار كما هو المطلوب وبذلك يكون شرط الدرجة الثانيه قد تحقق وان منحنيات السواء محدبه وان RCS فى تناقص عند نقطه الاتزان E :

$$-d^2q_2/dq_1^2 = -2q_2/q_1^2 < 0.$$

(١) ونقصد هنا بالقطاعات الزائديه المستطيله التى خطوط اقترابها asymptotes تنطبق على coincide with على محور الاحداثيات coordinate axes.

اختيار دليل المعرفة The Choice of a Utility Index

ان الارقام التى تعينها دالة المنفعة للمجموعات المختلفه من السلع ليست فى حاجة الى ان تاخذ طابع قياسى لاهميتها ولكنها تخدم كدليل او مؤشر *index* لرغبات المستهلك . ولنفترض اننا نريد ان نقارن المنفعة التى يحصل عليها المستهلك من حصوله على عامه وثوبين ومن المنفعة من حصوله على عامتين وخمسه اثواب ونفترض اننا نعرف ان المستهلك يفضل المجموعه الاخيرة على الاولى فالارقام التى نعطيها لهذه المجموعات لغرض التعرف على مدى فعالية رغبته فى الحصول على السلع انما اختيرت اعتباطا arbitrary بمفهوم ان الفرق بينها خال من اى معنى او احساس .

فلو وضعنا الرقم ٣ للمجموعة الاولى والرقم ٤ للثانية لكان هذا دليلا كافيا على تفضيل المستهلك للمجموعه الثانيه وهكذا لأى رقم مادام يوضح رغبة المستهلك فى الحصول على المجموعة الثانيه . فاذا كان هناك مجموعه من الارقام تتناسب مع المجاميع المختلفه من السلع Q_1 وَ Q_2 وتكون كدليل للمنفعة فان اى تحويل متزايد لها يخدم ايضا كدليل للمنفعه[1] ونستطيع ان تحول دالة المنفعة الاصليه $U = f(q_1, q_2)$. الى دليل منفعة بتطبيق تحويله متزايده موجبه على الداله الاصليه $W = F(U) = F[f(q_1, q_2)]$

وبهذا نحصل على دليل جديد للمنفعه وهو $W = F(U)$ بحيث ان دالة $F(U)$ تكون دالة متزايده للمجهول (U)[2] ومن الممكن اثبات ايجاد الحد الاعلى للدالة $W = F(U)$ مقيدة لميزانية المستهلك مطابقا تماما لايجاد الحد الاعلى للدالة U مقيدة ايضا بميزانيه المستهلك على النحو التالى : تخيل ان مجموعة السلع (q_1^0, q_2^0) هى المجموعة التى تحدد الحد الاعلى الوحيد للدالة $U = f(q_1, q_2)$ والمقيدة بميزانية المستهلك وافترض ان هناك محموعة اخرى من السلع $(q_1^{(1)}, q_2^{(1)})$ ايضا تحقق ميزانية المستهلك ، فاذا ، وبافتراض ان : $f(q_1^0, q_2^0) > f(q_1^{(1)}, q_2^{(1)})$ لاى رغبه من $(q_1^{(1)}, q_2^{(1)})$

ولكن من تعريف التزايد . monotonicity

نحصل على

$$W(q_1^0, q_2^0) = F[f(q_1^0, q_2^0)] > F[f(q_1^{(1)}, q_2^{(1)})] = W(q_1^{(1)}, q_2^{(1)}),$$

وهذا يثبت وجود حد اعلى لدالة المنفعة $W(q_1, q_2)$ (q_1^0, q_2^0).

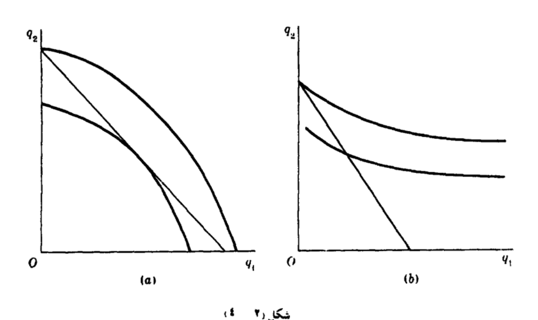
---

(١) الدالة $F(U)$ تكون تحويلة متزايده موجبه positive monotonic transformation للمجهول U اذا كان $F(U_1) > F(U_0)$ متى ما كانت $U_1 > U_0$.

(٢) امثلة تعطى من خلال التحويلات $W = aU + b$ بحيث ان a is positive وكذلك من خلال $W = U^2$ بحيث ان جميع ارقام المنفعة غير سالبه .

حالتين خاصتين :

ان شروط الدرجه الاولى (معادلة(٢ــ٩)) لا تكون ضروريه دائما للحصول على حدا اعلى للدالة، وشكل(٢ــ٤١) المجاور يصور حالتين استثنائيتين •



شكل (٢ ٤)

الحالة الاولى : انظر الشكل(٢ــ٤١)•

فى الحالة تكون منحنيات السواء مقعرة بدلا من ان تكون محدبه وهذا يعنى ان شرط شبه ــ تقعر الدالة لم يتحقق • ومن الشكل يتضح ان منحنيات السواء تنحنى بعيدا عن نقطة الاصل وان RCS فى ازدياد مطرد ولكن شرط الدرجه الاولى للحد الاعلى محقق عند نقطة التماس بين خط السعر ومنحنى السواء ولكن شرط الدرجه الثانيه لا يتحقق لان هذه النقطه تمثل حد ادنى للمنفعة فى منطقة محليه local وان المستهلك يستطيع زياده منفعته بالتحرك من نقطه التماس فى اتجاه اى من المحورين ولا يستهلك الا سلعة واحدة فقط عند نقطة الحد الاعلى فاذا كان المستهلك ينفق كل دخله على هذه السلعه فقط فباستطاعته شراء y^0/p_1 وحدة من Q_1 او شراء y^0/p_2 وحده من Q_2 • وعلى ذلك فانه اما ان يشترى Q_1 فقط او Q_2، اعتمادا على ان

$$f(y^0/p_1, 0) \gtrless f(0, y^0/p_2).$$

وفى المثال المعطى فى شكل (٢ــ٤١) لا يحق للمستهلك ان يشترى الا Q_2 •

الحالــه الثانيه : انظر الشكل(٢ــ٤ب)

ففى هذه الحاله تكون منحنيات السواء على الشكل المطلوب ولكنها فى كل مكان اقل

انحدارا .steep من خط السعر وعليه فانه لا يوجد اى احتمال للتماس بين خط السعر ومنحنيات السواء وشرط الدرجه الاولى لا يتحقق بسبب التغيرات $q_1 \geqq 0$ وكذلك $q_2 \geqq 0$. وللمره الثانيه فان الحد الاعلى للمستهلك يعطى على اساس انه حل ركنى corner solution, ولا يمكنه شراء سوى السلعه Q_2 عند الحد الاعلى • ولكن اذا افترضنا ان دالة المنفعة المعطاه فى الشكل (٢ــ٤ب) اما ا ن تكون مقعرة بانضباط strictly concave او ان لها تحويلة متزايدة موجبه ، ففى هـــذه الحاله يمكن تطبيق شروط كون ــ تكر Kuhn-Tucker وتصبح المسألـــه على النحو التالى:

ان المستهلك يرغب فى الحصول على الحد الاعلى للمنفعة مقيدة بالانضبــــاطات اللامتساويه .inequality constraints الاتيه :

$$y^0 - p_1q_1 - p_2q_2 \geqq 0 \qquad q_1 \geqq 0 \qquad q_2 \geqq 0$$

ويسمح للمستهلك بعدم صرف دخله وان متطلبات الاستهلاك الغير سالبه nonnegative consumption وضحت هنا تماما واصبحت مريحه explicit وان دالة لقرنج هى نفسها المعطاة فى المعادلة(٢ــ٨) وتصبح متطلبات شروط كون ــ تكر[١] كالتالى:

$$\begin{aligned} V_1 &= f_1 - \lambda p_1 \leqq 0 & q_1V_1 &= 0 \\ V_2 &= f_2 - \lambda p_2 \leqq 0 & q_2V_2 &= 0 \\ V_3 &= y^0 - p_1q_1 - p_2q_2 \geqq 0 & \lambda V_3 &= 0 \end{aligned}$$

بحيث ان V_i تمثل المشتقات الجزئيه للمعادله(٢ــ٨) فاذا كان $f_1 > \lambda p_1$ فانه باستطاعه المستهلك زيادة منفعته بزياده q_1. واذا كان $f_1 < \lambda p_1$ فانه يستطيع زيادة منفعته بتخفيض q_1 الا اذا $q_1 = 0$ ففى مثال الشكل (٢ــ٤ب) :

$$f_1/f_2 < p_1/p_2. \text{ فاذا } V_2 = 0. \text{ وكذلك } V_1 < 0$$

ان اخر معادلتين من معادلات شروط كون ــ تكر تنص على ان (وهى المنفعه الحدية لدخل الفرد marginal utility of income تساوى صفراذا افترض ان على المستهلك ان يصرف اقل من دخله عند التوازن equilibrium ، ولكن هذا لا يحدث ما دمنا نفترض ان المنفعة الحديه تكون دائما موجبه •

---

(١) شروط كون ــ تكر هى شروط كفاية وضرورة necessary and sufficient للدول المقعرة المعطاة اذا تحققت شروط القيود ، وشروط القيود هذه يفــترض ان تكن محققه لجميع الامثله فى هذا الكتاب•

٢ - ٣ دوال الطلب DEMAND FUNCTIONS

معادلات الطلب العادية : Ordinary Demand Functions

ان دالة الطلب العادية للمستهلك توضح العلاقة بين كمية السلع التى يرغب المستهلك فى شراؤها واسعار هذه السلع ودخل المستهلك وسمينا هذه العلاقة دالة الطلب العادية ولكنها عادة تسمى دالة الطلب فقط(وفى بعض الاحيان تسمى دالة طلب مارشال نسبه للعالم الاقتصادى مارشال) الا اذا كان هناك ضرورة لتسميتها بغير هذا المسمى •

ومن الممكن الحصول على هذه الدالة من عملية التحليل لايجاد الحد الاعلى للمنفعة ، فشرط الدرجه الاولى(معادلة ٢ـ٩) تتكون من ثلاثة معادلات فى ثلاثة مجاهيل هى q_2 و q_1 مع افتراض تحقق شروط الدرجه الثانيه ونستطيع الحصول على دوال الطلب بحل هذا النظام من المعادلات(معادلة ٢ـ٩) لايجاد مجاهيل هذه المعادلات بدلالة in terms of q_1, q_2, وكمية السلعة المشتراه p_1, p_2 تعتمد اعتمادا مباشرا على اسعار عامة السلع وعلى دخل المستهلك•

مثال : افترض ان دالة المنفعة هى $U = q_1q_2$ وان قيد الميزانيه هو $y^0 - p_1q_1 - p_2q_2 = 0$ • وبتكوين معادلة لاقرانج $V = q_1q_2 + \lambda(y^0 - p_1q_1 - p_2q_2)$

$$\frac{\partial V}{\partial q_2} = q_1 - p_2\lambda = 0$$

$$\frac{\partial V}{\partial \lambda} = y^0 - p_1q_1 - p_2q_2 = 0$$

وبحل المعادلات الجزئيه لقيم (q_1, q_2) نحصل على دوال الطلب التاليه

$$q_1 = \frac{y^0}{2p_1} \qquad q_2 = \frac{y^0}{2p_2}$$

وهذه الدوال تعتمد على ان يكون المستهلك باستمرار راغبا فى الحصول على الحد الاعلى للمنفعة من السلع التى يستهلكها • فاذا اعطينا دخل المستهلك واسعار السلع فاننا نستطيع الحصول على الكميات المطلوبه من المستهلك عن طريق دوال الطلب وبالطبع فان هذه الكميات من نفسها الكميات التى تحصلنا عليها من دوال المنفعة وتعويض $y^0 = 100, p_1 = 2,$ $p_2 = 5$ فى دوال الطلب نحصل على $q_1 = 25$ و $q_2 = 10,$ تماما كما وجدناها فى الفصل(٢ـ٢)•

ونستطيع الاستدلال على خاصيتين من خواص دوال الطلب المهمة :

(١) طلب اى سلعة من السلع هو دالة ذات قيمة منفرده single-valued function

بدلالة الاسعار والدخل •

(٢) دوال الطلب تكون متجانسه homogeneous من درجة صفر فى الاسعار والدخل وهو يعنى انه اذا تغيرت جميع الاسعار والدخل بنفس النسبه فان الكميات المطلوبه تظل كما هى بدون تغيير •

والخاصيه الاولى لهذه الدوال تنبع من خاصيه شبه ــ المقعر المنضبط لدالة المنفعة حيث ان هناك حد اعلى واحد فقط مطابقا لخليط معين من السلع باسعار ودخل معطى (١) •

ولاثبات الخاصيه الثانيه لدوال الطلب ، نفترض ان جميع الاسعار والدخل تغيرت بنفس النسبه واصبح قيد ميزانية المستهلك كالتالى:

$$ky^0 - kp_1q_1 - kp_2q_2 = 0$$

بحيث ان k هو عامل التناسب factor of proportionality •

وبحيث تصبح المعادلة (٢ ــ ٨) كالتالى:

$$k(y^0 - p_1q_1 - p_2q_2) = 0$$

وتصبح شروط الدرجه الاولى كالتالى:

$$\begin{aligned} f_1 - \lambda kp_1 &= 0 \\ f_2 - \lambda kp_2 &= 0 \\ ky^0 - kp_1q_1 - kp_2q_2 &= 0 \end{aligned} \qquad (١٥\text{ــ}٢)$$

والمعادلة الاخيره فى مجموعة المعادلات (٢ ــ ١٥) هى الاشتقاق الجزئى لدالة لقرانج (V) بالنسبه الى مضروب (مضاعف) لاقرانج Lagrange multiplier ، ويمكن كتابتها على النحو الاتى:

$$k(y^0 - p_1q_1 - p_2q_2) = 0$$

وبما ان $k \neq 0$, فان المعادلة السابقة تصبح

$$y^0 - p_1q_1 - p_2q_2 = 0$$

وبحذف k من المعادلتين الاوليتين من (٢ ــ ١٥) بتحريك الحدود الثانيه الى الطرف الايمن من المعادلتين وقسمه المعادلة الاولى بالثانيه نحصل على: $\frac{f_1}{f_2} = \frac{p_1}{p_2}$

---

(١) اذا كانت دالة المنفعة فقط شبه ــ مقعرة بدون انضباط فان جزءا من منحنيات السواء يكون على شكل خط مستقيم وان الحد الاعلى للمنفعة لا يكون وحيدا وان هناك اكثر من كميه واحدة توافق الاسعار المعطاه وفى هذه الحالة لا يكون لدينا علاقة طلب ونسميها طلب تطابقى أو مماثل (*demand correspondence*

وهذه المعادلتين الاخيرتين هما نفسهما المعادلة(٢ـ٧) والمعادلة(٢ـ١٠)
وعلى هذا فان دالة الطلب لمجموعه السعر والدخل (kp_1, kp_2, ky^0) يمكن
اشتقاقها من نفس المعادلات كما فى حالة مجموعة السعر والدخل (p_1, p_2, y^0)
ومن السهل التحقق من اثبات شروط الدرجه الثانية لمجموعةالسعر والدخل
(kp_1, kp_2, ky^0) وهذا يثبت أن دوال الطلب متجانسة من درجة صفر فى الأسعار
والدخل فاذا تغيرت جميع الأسعار ودخل المستهلك بنفس السرعة فان الكميات المطلوبه
من المستهلك لا تتغير ، وهذا يعطينا بعض المؤشرات والتى يمكن قياسها عدديا ، عن
سلوك المستهلك فهو سوف لا يتصرف كما لو كان أغنى (أو أفقر) فى حدود دخله الحقيقى
(real income) واذا كان الدخل والأسعار كلها ارتفعت بنفس النسبه وما يرغبه
المستهلك هو زيادة فى دخله النقدى (money income) بافتراض أن جميع
المتغيرات الأخرى ثابته (*ceteris paribus*) ولكن فوائدها وهميه اذا تغيرت
الأسعار بنفس النسبه ، فاذا كان مثل هذه التغيرات النسبيه لم تغير فى سلوك المستهلك
وتركت تصرفاته كما هى فانه فى هذه الحالة لا يوجد عنده "وهم نقدى "money illusion."

دوال الطلب التعويضية Compensated Demand Functions

تخيل حالة ما تقوم فيها الدولة باقتطاع جزء من دخل المستهلك عن طريق فرض
ضرائب أو زيادة دخله عن طريق صرف معونات له بطريقة بحيث لا يتغير مستوى المنفعة
بعد هذا التغير فى الأسعار ، وتخيل أن هذا تم عن طريق دفع مبلغ معين دفعة
واحدة بحيث أنها تعطى المستهلك دخلا كافيا فقط لتحقيق المستوى المنفعى البدائى،
ودوال الطلب التعويضية للمستهلك تعطى كميات السلع التى سوف يقوم المستهلك بشرائها
بدلالة أسعار السلع تحت هذه الشروط ويمكن الحصول على هذه الدوال وبايجاد الحد
الأدنى (minimum) لمصروفات المستهلك تحت قيد الشرط بأن منفعته تكون
عند المستوى المحدد (U^0)

مثال : ولنفترض الان ، أن دالة المنفعة هى $U = q_1q_2$. وتكون المعادلة

$$Z = p_1q_1 + p_2q_2 + \mu(U^0 - q_1q_2)$$

ونضع مشتقاتها الجزئية تساوى صفرا لنحصل على :

$$\frac{\partial Z}{\partial q_1} = p_1 - \mu q_2 = 0$$

$$\frac{\partial Z}{\partial q_2} = p_2 - \mu q_1 = 0$$

$$\frac{\partial Z}{\partial \mu} = U^0 - q_1q_2 = 0$$

وبإيجاد q_2 و q_1 نحصل على دوال الطلب التعويضية التاليه :

$$q_1 = \sqrt{\frac{U^0 p_2}{p_1}} \qquad q_2 = \sqrt{\frac{U^0 p_1}{p_2}}$$

ويمكن للقارئ اثبات أن هذه الدوال متجانسة من درجة صفر في الأسعار .

منحنيات الطلب : Demand Curves

فانه اذا جرت العادة على أن نكتب دالة الطلب العادية للمستهلك للسلع كالتالي :

$$q_1 = \phi(p_1, p_2, y^0)$$

أو بافتراض أن p_2 ، y^0 متغيرات معطاه ، فان الدالة تصبح كالتالي :

$$q_1 = D(p_1)$$

وغالبا مايفترض أن دالة الطلب لها خاصية المقلوب أو المعكوس an inverse أنه يمكن وضع السعر بدلالة الكمية بطريقة فريدة (unique) وهذا المقلوب (أو المعكوس) لدالة الطلب (وهو $p_1 = D^{-1}(q_1)$ هو نفسه دالة بحيث أن

$D[D^{-1}(q_1)] = q_1$.

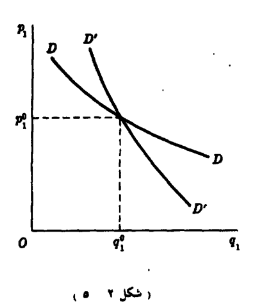
ويعتمد شكل دالة الطلب على خواص دالة المنفعة للمستهلك وقد جرت العادة على افتراض أن منحنيات الطلب يكون لها ميل سالب ، بمعنى أنه كلما قل السعر ، كلما ازدادت الكميه المطلوبه ولايتغير هذا الافتراض الا في حالات غير اعتيادية ومثال ذلك حالة التباهي أو التفاخر بالاستهلاك (أو مايسمى باستهلاك التفاخر أو المباهاة) (ostentatious consumption) وهذا يعني أنه اذا كان المستهلك يتحصل على منفعة من أسعار عالية فان ميل دالة الطلب قد يكون موجبا وطبيعة تغيرات الأسعار المؤدية الى تغيرات في الكميات المطلوبه مشروحة شرحا وافيا في الجزء (٢ـ٥) من هذا الباب ولكن في بقية الكتاب فاننا نفترض دائما أن دوال الطلب لها ميل سالب .

ومنحنى الطلب التعويضي للمستهلك للسلعة Q_1 يمكن الحصول عليه بنفس الأسلوب السابق بافتراض أن p_2 و U^0 مجهولين معطيين . وفي الجزء (٢ـ٥) نثبت أن كون منحنيات السواء محدبه يضمن لنا أن منحنيات الطلب التعويضيه دائما تكون مائلة الى أسفل (downward sloping) .

شكل (٢ـ٥) يعطينا بعض الأشكال المحتملة لمنحنيات الطلب التعويضية والعادية فمنحنى الطلب العادي نرمز له بالرمز (DD) ومنحنى الطلب التعويضي بالرمز ($D'D'$)

وفيهم

المجاهيل عند نقطة تقاطعهما (p_1^0 ، q_1^0) تحقق الدالتين معا وأن مستوى المنفعة المتحقق لمنحنى الطلب العادى يساوى المستوى المطلوب لمنحنى الطلب التعويضى وأن الدخل الأدنى من أجل منحنى الطلب العادى . وعند أسعار أعلى من p_1^0 التعويضى يساوى الدخل المحدد من اجل منحنى الطلبى



(شكل ٢ ٥)

يكون الدخل التعويضى للمستهلك موجبا وأن منحنى الطلب التعويضى يعطى كميات أكبر عند كل سعر ، ولكن عند أسعار أقل من p_1^0 فان الدخل التعويضى يكون سالبا والمنحنى المقابل له سوف يعطى كميات أقل عند كل سعر .

مرونة الدخل والسعر للطلب : Price and Income Elasticities of Demand

تعرف المرونه الخاصة للطلب للسلعة $Q_1(\varepsilon_{11})$ (own elasticity of demand) على المعدل النسبى للتغير الذى يطرأ على مقسوما على المعدل النسبى للتغير الذى يطرأ على سعر السلعة الخاص بحيث يكون p_2 ، y^0 ثابتين ونرمز للمرونة الخاصة بالرمز ε_{11} :

$$\varepsilon_{11} = \frac{\partial(\ln q_1)}{\partial(\ln p_1)} = \frac{p_1}{q_1}\frac{\partial q_1}{\partial p_1} \qquad (٢ - ١)$$

فاذا وجدنا قيمة عددية كبيرة للمرونه فان هذا يعنى أن الكميه المطلوبه تكون متجاوبة نسبيا للتغيرات فى السعر ، والسلع التى تكون قيمة مرونتها العددية عالية $(\varepsilon_{11} < -1)$ تسمى بالسلع الكمالية بينما السلع الأخرى والتى تكون قيمة مرونتها العددية صغير $(\varepsilon_{11} > -1)$ تسمى بالسلع الضرورية أما مرونة السعر بالنسبة للطلب فانها ارقام خالصة مستقلة تماما عن الوحدات التى تقيم بها الأسعار والمنتجات وتكون المرونه (ε_{11}) سالبة اذا كان ميل منحنى الطلب المقابل لها الىَ أسفل .

وعلاقة منصرفات المستهلك بالمرونه يمكن توضيحها بالطريقة الآتية :

لنفرض أن منصرفات المستهلك للسلع Q_1 هى (p_1q_1) فلو أردنا أن نعرف ماهو

معدل التغير الذى سوف يطرأ عليه بالنسبة لسعر هذه السلع فاننا نأخذ الاشتقاق الجزئى للمنصرف بالنسبه للسعر كما يلى :

$$\frac{\partial(p_1q_1)}{\partial p_1} = q_1 + p_1\frac{\partial q_1}{\partial p_1} = q_1\left(1+\frac{p_1}{q_1}\frac{\partial q_1}{\partial p_1}\right) = q_1(1+\varepsilon_{11})$$

فنجد أن منصرفات المستهلك على السلع Q_1 سوف تزداد مع p_1 عندما تكون المرونه أكبر من ناقص واحد ($\varepsilon_{11} > -1,$) وتظل غير متغيرة (أى ثابتة) اذا كانت المرونه تساوى ناقص واحد ($\varepsilon_{11} = -1,$) وتكون المنصرفات أقل اذا كانت المرونه أقل من ناقص واحد ($\varepsilon_{11} < -1$) •

وتوضح لنا مرونه السعر المختلطة للطلب (A cross-price elasticity of demand) لدالة الطلب العادية التغير النسبى فى احدى كميات السلع الى التغير النسبى فى سعر الكميات الاخرى ، فعلى سبيل المثال :

$$\varepsilon_{21} = \frac{\partial(\ln q_2)}{\partial(\ln p_1)} = \frac{p_1}{q_2}\frac{\partial q_2}{\partial p_1} \qquad (٢-١٧)$$

وقد تكون هذه المرونه موجبه وقد تكون سالبة •

فاذا أخذنا التفاضل الكلى (total differential) لقيد الميزانية (٢-٧) افترضنا أن $dy^0 = dp_2 = 0$ فاننا نحصل على الاتى :

$$p_1\,dq_1 + q_1\,dp_1 + p_2\,dq_2 = 0$$

وبالضرب فى $p_1q_1q_2/y^0q_1q_2\,dp_1$ وتغيير فى بعض الحدود نحصل على

$$\alpha_1\varepsilon_{11} + \alpha_2\varepsilon_{21} = -\alpha_1 \qquad (٢-١٨)$$

حيث أن $\alpha_1 = p_1q_1/y^0$ و $\alpha_2 = p_2q_2/y^0$ وهما فى الواقع يمثلان نسب مجموعات المنصرفات للسلعتين Q_1 ، Q_2 وتسمى هذه المعادلة (٢-١٨) شرط كونوت الاجمالى (Counnot aggregation condition) فاذا أعطينا (أو توصلنا الى معرفة) مرونة السعر الخاصة لطلب السلعة Q_1 فاننا نستطيع تقييم مرونة السلع الخليط لطلب السلعة Q_2. عن طريق أستخدام المعادلة (٢-١٨) • فاذا كان $\varepsilon_{11} = -1$ فان $\varepsilon_{21} = 0.$ واذا كان $\varepsilon_{11} < -1$ فان $\varepsilon_{21} > 0$ وأخيرا اذا كان

$$\varepsilon_{11} > -1, \quad \text{فإن} \quad \varepsilon_{21} < 0. \quad •$$

وبالمثل يمكن تعريف المرونة الخاصة والخليطة للأسعار فى حالة الطلب لدوال لطلب التعويضية بالتعويض عن دوال الطلب العادية بدوال الطلب التعويضية فى المعادلتين (٢-١٥) و (٢-١٧) ولكن معادلة (٢-١٨) لاتتحقق فى حالة دوال

الطلب التعويضية ، فبأخذ التفاضل الكامل لدالة المنفعة فى المعادلة (٢ـ١) ووضع $dU = 0$ نحصل على :

$$f_1\, dq_1 + f_2\, dq_2 = 0$$

وباستخدام الدرجة الأولى $p_1/p_2 = f_1/f_2$ وبالضرب فى $p_1q_1q_2/y^0q_1q_2\, dp_1$ وتغيير بعض الحدود نحصل على :

$$\alpha_1\xi_{11} + \alpha_2\xi_{21} = 0 \qquad (١٩ـ٢)$$

حيث أن مرونة السعر التعويضية (compensated price elasticities) رمز لها بالرموز ξ_{11} و ξ_{21}. وبما أن $\xi_{11} < 0$ فأنه من (٢ـ١٩) يتضح أن $\xi_{21} > 0$

مثال : وبالعودة الى المثال $U = q_1q_2$ فان المرونه الخاصة والخليطة للأسعار لدالة الطلب العادية هى :

$$\varepsilon_{11} = -\frac{p_1}{q_1}\frac{y^0}{2p_1^2} = -\frac{p_1}{y^0/2p_1}\frac{y^0}{2p_1^2} = -1$$

$$\varepsilon_{21} = \frac{p_1}{q_2}0 = 0$$

وهذه حالة خاصة لان ليس جميع دوال الطلب تكون مرونتها الخاصة أو الخليط تساوى الوحدة أو صفر ولا حتى مرونتها تكون ثابته وعلى وجه العموم فان المرونات تكون عادة بدلالة $p_1, p_2,$ وكذلك (a function of $p_1, p_2,$ و y^0.

ويستطيع القارىء أن يثبت لنفسه أن المرونات التعويضية فى هذا المثال هى $\xi_{11} = -\frac{1}{2}$ وأن $\xi_{21} = \frac{1}{2}$.

ونعرف الآن مرونة الدخل (income elasticity) للطلب والخاصة بدالة الطلب العادية على أنها التغير النسبى الذى يطرأ على مشتريات السلع بالنسبه الى التغير النسبى فى الدخل بأخذ الاسعار ثابتة .

$$\eta_1 = \frac{\partial(\ln q_1)}{\partial(\ln y)} = \frac{y}{q_1}\frac{\partial\phi(p_1, p_2, y)}{\partial y} \qquad (٢٠ـ٢)$$

بحيث أن η_1 ترمز الى مرونة الدخل لطلب السلعة q_1 . وقد تكون هذه المرونة سالبة ، أو موجبة أو صفرا ولكنها عادة يفترض أن تكون موجبه .

وبأخذ التفاضل الكامل لقيد الميزانية (٢ـ٧) نحصل على

$$p_1\, dq_1 + p_2\, dq_2 = dy$$

وبالضرب فى y/y وضرب الحد الأول على الشمال بالكمية q_1/q_1 والحد الثانى على الشمال بالكمية q_2/q_2 والقسمة على dy نحصل على

$$\alpha_1\eta_1 + \alpha_2\eta_2 = 1 \qquad (٢_٢١)$$

وتسمى بشرط انجل الاجمالى (Engel aggregation condition) • وتنص على أن الدخل موازنة بنسب المنصرفات الكلية تساوى الوحدة ولا يمكن اشتقاق مرونات الدخل لدوال الطلب التعويضية لأن الدخل ليس عنصرا من عناصر هذه الدوال •

٢ - ٤ الدخل وأوقات الفراغ من العمل INCOME AND LEISURE

اذا كان دخل المستهلك عبارة عن قيمة العمل الذى قام به ، فان أكبر كمية من العمل الذى يمكنه القيام به يمكن اشتقاقها من عمليات ايجاد الحد الأعلى للمنفعة وكذلك يمكن اشتقاق منحنى الطلب للمستهلك من هذه العمليات أيضا ولنفترض أن منفعة المستهلك تعتمد على دخله وعلى وقت الفراغ من العمل فتصبح دالة المنفعة :

$$U = g(L, y) \qquad (٢_٢٢)$$

بحيث أن L ترمز الى وقت الفراغ من العمل ومن البديهى ، طبعا أن الدخل ووقت الفراغ مرغوب فيهما من المستهلك • ففى اجزاء هذا الباب السابقة افترضنا أن المستهلك يتحصل على المنفعة من السلع الاستهلاكية التى يشتريها من دخله ولكن تركيب المعادلة (٢_٢٢) يفترض أن المستهلك يقوم بشراء السلع المختلفة بأسعار ثابتة وان دخلمسوف يعامل على انه يمثل قوة الشراء على وجه العموم (للتفصيل فى هذا الموضوع راجع الجزء السادس من الباب الثالث (٣_٦) •

وللحصول على معدل تعويض الدخل بوقت الفراغ من العمل ، نفاضل y بالنسبة لـ L :

$$-\frac{dy}{dL} = \frac{g_1}{g_2}$$

فاذا رمزنا لكميه العمل التى يقوم بها المستهلك بالرمز W ومعدل الاجر wage rate بالرمز r فانه حسب التعريف :

$$L = T - W \qquad (٢_٢٣)$$

حيث ان T تمثل الوقت المتوفر للمستهلك (وعلى سبيل المثال ، اذا كانت الفترة المعرف من اجلها دالة المنفعة هى يوم واحد فان $T = 24$ ساعه

وقيد الميزانية هو :

$$y = rW \qquad (٢_٢٤)$$

وبتعويض (٢_٢٣) و (٢ _٢٤) في (٢_٢٢) نحصل على :

$$U = g(T - W, rW) \qquad (٢_٢٥)$$

وللحصول على الحد الاعلى للمنفعة، نضع اشتقاق (٢_٢٥) بالنسبه للعمـــــل يساوى صفر (ونستخدم هنا قاعده اشتقاق الدوال المركبه composite-function

$$\frac{dU}{dW} = -g_1 + g_2 r = 0$$

وعليه فان:

$$-\frac{dy}{dL} = \frac{g_1}{g_2} = r \qquad (٢_٢٦)$$

والتى تنص على ان معدل تعويض الدخل بوقت الفراغ من العمل يساوى معــــدل الاجر وشرط الدرجه الثانيه ينص على :

$$\frac{d^2U}{dW^2} = g_{11} - 2g_{12}r + g_{22}r^2 < 0$$

ويتضح من المعادلة(٢_٢٦) انها علاقة فيما يختص بالعمل W ومعدل الاجر r وانها وضعت حسب قاعدة سلوك المستهلك الفرديه فى ايجاد الحد الاعلىللمنفعة، وعليه فان هذه المعادلة(٢_٢٦) تمثل منحنى العرض للمستهلك supply curve وتنص على مقدار مايبذله من عمل مقابل معدل اجورات مختلفة وبما ان العرض للعمل يكافئ او يعادل الطلب للدخل ، فان(٢_٢٦)تعطينا ، بطريق غـــــير مباشر ، منحنى الطلب بالنسبة لدخل المستهلك.

مثال : افترض ان دالة المنفعة معرفه للفتره الزمنيه ومقدارها يوم واحد ومعطـــــاه بالدالة

$$U = 48L + Ly - L^2$$

وبتعويض $L = T - W$ فى المعادلةالسابقة نحصل على

$$U = 48(T - W) + (T - W)Wr - (T - W)^2$$

وبوضع الاشتقـاق يساوى صفر نحصل على

$$\frac{dU}{dW} = -48 - Wr + r(T - W) + 2(T - W) = 0$$

وعليه فان

$$W = \frac{T(r+2) - 48}{2(r+1)}$$

ويمكننا الحصول على y بالتعويض فى المعادلة(٢ــ٢٤) وشرط الدرجه الثانيــــه يتحقق لان

$$\frac{d^2U}{dW^2} = -2(r+1) < 0$$

لاى اجر موجب •

وفى الحالة الراهنه ، نجد ان دالة العرض للفرد supply function تتميز بما يلى :

(١) عندما يصبح اجر الشخص مساويا صفر فان الفرد سوف لا يقوم بالعمل فــى خلال الفتره الزمنيه المحدده وهى $T = 24$ ساعة

(٢) سوف يقوم الفرد بزيادة عدد الساعات التى يعمل خلالها بزيادة الاجـــــر لان $dW/dr = 0$

(٣) سوف لا يعمل الفرد اكثر من ١٢ ساعة فى اليوم الواحد ، بغض النظر عما يصبح عليه الاجر من قيمة عاليه ، لان نهاية W عندما ∞ تقترب من ∞ هـــى ١٢ (بمعنى ان $\lim_{r\to\infty} W = 12.$

٢ - ٥ نتائج الدخل والتعويض SUBSTITUTION AND INCOME EFFECTS معادلة سلتزكى : The Slutsky Equation

ان تحاليل المقارنة الثانيه اوالساكنه(افتراض عدم التطور فيهــــــــــــــا) Comparative statics analysis

تختبر نتائج قلقلة فى المتغيرات المعطاه من خارج النظام exogenous variables

(مثل الاسعار والدخول فى الحالة الراهنه) على قيم الحل للمتغيرات المعطاة مــن داخل النظام endogenous variables (وبالتحديد ، الكميات) •

فالتغيرات فى الاسعار والدخل سوف تقوم فى العادة ، بتبديل نمط منصرفات المستهلك وبالرغم من هذا فان الكميات الجديده(وكذلك الاسعار والدخل) سوف تحقــق شروط الدرجه الاولى فى المعادلة(٢ــ٩) ومن اجل الحصول على مقدار تأثير تغيرات السعر والدخل على مشتروات المستهلك ، فاننا نترك جميع المتغيرات تتغير فى نفس الوقــت ،

بأخذ التفاضل الكامل للمعادله(٢ـ٩):

$$
\begin{aligned}
f_{11}\, dq_1 + f_{12}\, dq_2 - p_1\, d\lambda &= \lambda\, dp_1 \\
f_{21}\, dq_1 + f_{22}\, dq_2 - p_2\, d\lambda &= \lambda\, dp_2 \\
-p_1\, dq_1 - p_2\, dq_2 &= -dy + q_1\, dp_1 + q_2\, dp_2
\end{aligned}
\qquad (٢ـ٢٧)
$$

ومن اجل الحصول على المتغيرات الثلاثة dq_1 ، dq_2 ، $d\lambda$ مـن نظام الثلاث معادلات السابقه فانه يجب ان نعامل حدود الطرف الايمن كثوابت . وصـف المعاملات الذى كونته معادلات(٢ـ٢٧) هو نفسه فى محددة هيسيان المحـــددده bordered Hessian deter minant فى المعادلة (٢ـ١٢) .وبالرمز لهذه المحدده بالحرف $\mathscr{D}$ وللعامل المرافق cofactor (للعنصر فى الصف الاول من العمود الاول بالحرف $\mathscr{D}_{11}$, وللعامل المرافق للعنصر فى الصف الاول من العامود الثانى بالحرف $\mathscr{D}_{12}$, وهكذا فان حل المعادلة(٢ـ٢٧) باستخدام قاعـدة كريمر Cramer's rule (راجع الجزء A-1 من الفهرس فى اخر الكتاب)
يكون على النحو التالى :

$$dq_1 = \frac{\lambda \mathscr{D}_{11}\, dp_1 + \lambda \mathscr{D}_{21}\, dp_2 + \mathscr{D}_{31}(-dy + q_1\, dp_1 + q_2\, dp_2)}{\mathscr{D}} \qquad (٢ـ٢٨)$$

$$dq_2 = \frac{\lambda \mathscr{D}_{12}\, dp_1 + \lambda \mathscr{D}_{22}\, dp_2 + \mathscr{D}_{32}(-dy + q_1\, dp_1 + q_2\, dp_2)}{\mathscr{D}} \qquad (٢ـ٢٩)$$

وبقسمة طرفى معادلة(٢ـ٢٨) بالكميه dp_1 وافتراض ان p_2 ، y لا يتغيران $(dp_2 = dy = 0)$, فاننا نحصل على :

$$\frac{\partial q_1}{\partial p_1} = \frac{\mathscr{D}_{11}\lambda}{\mathscr{D}} + q_1 \frac{\mathscr{D}_{31}}{\mathscr{D}} \qquad (٢ـ٣٠)$$

والاشتقاق الجزئى على الطرف الايسر من المعادلة(٢ـ٣٠) يعطينا معدل التغيـــر لمشتروات المستهلك من Q_1 بالنسبه للتغيرات فى p_1 بافتراض ان جميع الاشيـاء الاخرى متساويه ، ويصبح كذلك معدل التغير بالنسبه للدخل على النحو التالى :

$$\frac{\partial q_1}{\partial y} = -\frac{\mathscr{D}_{31}}{\mathscr{D}} \qquad (٢ـ٣١)$$

والتغيرات فى اسعار السلع تغير من مستوى المنفعة للمستهلك حيث انه جد توازن جديد يضع المستهلك على منحنى استواء اخر.

اعتبر الان ، تغير فى السعر عوض عنه المستهلك بتغير فى دخله بحيث يتركـه على

منحنى السواء الذى كان عليه قبل التغيير وهذا يعنى ان اى تغييرفى سعر اى سلعة سوف يصاحبه زيادة فى دخل المستهلك بحيث ان $dU = 0$ وكذلك $f_1\, dq_1 + f_2\, dq_2 = 0$ من المعادلة(٢ـ٣ وبما ان $f_1/f_2 = p_1/p_2$ فان $p_1\, dq_1 + p_2\, dq_2 = 0$ حقيقة كذلك وعليه، فان من المعادلة الاخيرة فى(٢ـ٢٧)، نحصل على $-dy + q_1\, dp_1 + q_2\, dp_2 = 0$ وكذلك

$$\left(\frac{\partial q_1}{\partial p_1}\right)_{U=\text{const}} = \frac{\mathcal{D}_{11}\lambda}{\mathcal{D}} \qquad (٢ـ٣٢)$$

ونستطيع، الان ، اعادة كتابة معادلة (٢ـ٣٠) على النحو التالى :

$$\frac{\partial q_1}{\partial p_1} = \left(\frac{\partial q_1}{\partial p_1}\right)_{U=\text{ثابته}} - q_1\left(\frac{\partial q_1}{\partial y}\right)_{\text{الاسعار = ثابته}} \qquad (٢ـ٣٣)$$

وهذه المعادلة(٢ـ٣٢) تعرف بمعادلة سلتزكى . فالكميه $\partial q_1/\partial p_1$ تمثل ميل منحنى الطلب العادى للسلع Q_1 ويمثل الحد الاول من الجانب الايمن ميل منحنى الطلب التعويض للسلع Q_1 .

وكبديل لعملية تعويض المستهلك عن ارتفاع اسعار بعض السلع . فان المستهلك يعطى دخلا كافيا لشراء الخليط من السلع بحيث ان

$$dy = q_1\, dp_1 + q_2\, dp_2$$

وهذه هى المعادله التى قادتنا الى المعادلة(٢ـ٣٢) . وفى هذه الحالةفان :

$$\left(\frac{\partial q_1}{\partial p_1}\right)_{q_1, q_2 = \text{ثابتين}} = \frac{\mathcal{D}_{11}\lambda}{\mathcal{D}}$$

والتى يمكن تعويضها بدلا من الحد الاول على الجانب الايمن فى(٢ـ٣٣) وقد يتبادر الى الذهن من اول وهله، ان الطريقتين المختلفتين لتعويض المستهلك نتيجة لارتفاع الاسعار ادتا الى نفس النتائج ولكنهما يعرفان فقط نفس الاشتقاق ومن الممكن ان يقود الى نتائج مختلفه تماما لاى حركه فى نطاق زمنى محدد ومن الممكن حث المستهلك على نفس منحنى السواء فى الحالة المحدده ولكنه ليس من الممكن حثة على شراء نفس الخليط من السلع اذا تغيرت الاسعار النسبيه وكل التحاليل التاليه هنا مترتبه على المعادلة (٢ـ٣٣).

ومن الممكن وضع معادلة سلتزكى بدلالة مرونات الدخل والسعر الموضحة فى الجزء ٢ـ٣ من هذا الباب . نبضرب المعادلة(٢ـ٣٣) بالكميه p_1/q_1 وبضرب

الحد الاخير من الطرف الايمن بالكميه y/y نحصل على :

$$\varepsilon_{11} = \xi_{11} - \alpha_1 \eta_1 \qquad (٢_٣٤)$$

وهذه المعادلة تنص على ان مرونه السعر لمنحنى الطلب العادى تساوى مرونه السعر لمنحنى الطلب التعويضى ناقصا مرونه الدخل المناسبه مضروب فى نسبه مجموع المنصرفات التى دفعت لشراء Q_1 • وعلى هذا فان منحنى الطلب العادى سوف يكون له مرونـه طلب اكبر من منحنى الطلب التعويضى ، بمعنى ان ε_{11} سوف يكون اكثر سالبيه عن ξ_{11} اذا كانت مرونه الدخل للطلب موجبه •

نتائج مباشرة : Direct Effects

بالنظر فى المعادله (٢_٣٢) نجد ان الحد الاول من الجانب الايمن للمعادلـه يوضح المعدل الذى يستطيع المستهلك من خلاله تعويض Q_1 بسلع اخرى عندما يتغير سعر Q_1 ويستطيع ان يتحرك على منحنى السواء المعطاه وتسمى هذه الظاهرة بنتيجة التعويض *substitution effect,* [1] اما الحد الثانى من الجانب الايمـن للمعادلة فانه يوضح المعدل الذى يتقيد عنده مشتروات المستهلك من Q_1 عندما تحدث تغيرات فى دخله مع بقاء الاسعار ثابته، وتسمى هذا بنتيجة الدخل *income effect* ومجموع المعدلين يعطى المعدل العام للتغيرات فى Q_1 مع تغيرات p_1 وفى الوضع الراهن نجد ان مضروب لاقرانج يمثل اشتقاق المنفعه بالنسبـــه للدخل مع بقاء الاسعار ثابته والكميات متغيره • ومن دالة المنفعة (٢_١)

نجد ان $\partial U/\partial y = f_1(\partial q_1/\partial y) + f_2(\partial q_2/\partial y)$. وبتعويض $f_1 = \lambda p_1$ وكذلك $f_2 = \lambda p_2$

نجد ان :

$$\frac{\partial U}{\partial y} = \lambda \left(p_1 \frac{\partial q_1}{\partial y} + p_2 \frac{\partial q_2}{\partial y} \right) = \lambda$$

وهذا بسبب أن : $y: 1 = p_1(\partial q_1/\partial y) + p_2(\partial q_2/\partial y)$ من الاشتقاق الجزئى لقيد الميزانيه (٢_٧) بالنسبه للمتغير وهذا يوكد النتيجة التى توصلنا اليها من المعادلة (٢_١١) فـــى وقت مبكر من هذا الباب •

وبحل المعادلة (٢_٢٧) للقيمة $d\lambda$ نحصل على

$$d\lambda = \frac{\lambda \mathcal{D}_{13}\, dp_1 + \lambda \mathcal{D}_{23}\, dp_2 + \mathcal{D}_{33}(-dy + q_1\, dp_1 + q_2\, dp_2)}{\mathcal{D}} \qquad (٢_٣٥)$$

---

(١) ولقـد سماها العالم سلتزكى تغيرات المتبقى *residual variability* للسلعه التى عليها الطلب .

فأذا أفترضنا الآن أن الدخل المتغير الوحيد ، بمعنى أن $dp_1 = dp_2 = 0$ فان المعادلة (٢ـ٣٥) تصبح

$$\frac{\partial \lambda}{\partial y} = -\frac{\mathscr{D}_{33}}{\mathscr{D}} = -\frac{f_{11}f_{22} - f_{12}^2}{\mathscr{D}} \qquad (٢ـ٣٦)$$

وبما أن $\mathscr{D}$ موجبه فان معدل التغير في المنفعة الحدية للدخل (marginal utility of income) سوف يكون له نفس علامة المقدار $-(f_{11}f_{22} - f_{12}^2)$. وهذه سوف تكون سالبة اذا كانت دالة المنفعة مقعرة بانضباط ولكن للدوال المنفعية الترتيبيه أفترض شبه ــ التقعر المنضبط وعليه فان النظرية لايمكن أن تتنبأ اذا كانت المنفعــــه الحدية للدخل في ازدياد أو في انخفاض مع التغيرات التي تطرأ على الدخل .

ولإثبات أن اشارة نتيجة التعويض substitution effect تكون دائما سالبــه وأن منحنى الطلب التعويضي يكون دائما مائلا الى أسفل ، نستخدم المعادلة (٢ـ٣٢) لايجاد نتيجة التعويض وهي $\mathscr{D}_{11}\lambda/\mathscr{D}$ بحيث أن محددة $\mathscr{D}$ تكون موجبة لانها هي نفسها في المعادلة (٢ـ١٢) وبتحليل $\mathscr{D}_{11}$ نجد أن $\mathscr{D}_{11} = -p_2^2$ والتي توضح تماما أنها سالبة .

ان التغير في الدخل الحقيقي real income قد يسبب في اعادة توزيع موارد المستهلك حتى ولو أن الاسعار لم تتغير أو أنها تغيرت بنفس النسبة . فنتيجة الدخـل (وهي تساوي $-q_1(\partial q_1/\partial y)_{prices=const}$) قد تكون موجبه أو سالبة فالنتيجة النهائيـــة للتغير في السعـر على شراء السلع تكون غير معروفة ومع هذا فاننا نستطيع أن نســتخلص النتيجة الاتية :

كلما صغرت الكمية المطلوبة من السلع Q_1، كلما قلت أهمية نتيجة الدخل . وتســمى السلعة Q_1 سلعة أدنى *inferior good* اذا كانت مشتريات المستهلك منها تنخفض كلما ارتفع دخل المستهلك ويرتفع أستهلاكة منها كلما انخفض دخله بينما تعـــرف سلعة جيفون (*A Giffen good*) فانها سلعة أدنى لها نتيجة دخل بالكبــــر الكافي للتعويض عن نتيجة التعويض السالبة ولجعل المقدار ($\partial q_1/\partial y$) موجبا وهذا يعــني أنه كلما انخفض سعر Q_1 فان شراء المستهلك للسلعة Q_1 ينخفض تباعا لها . وقـــد يحدث هذا اذا كان المستهلك فقيرا لدرجة أن جزء كبيرا من دخله يصرف علـــى ســلعه مثل البطاطا والتي يحتاجها لمعيشته . فلنفترض الآن أن أسعار البطاطا انخفضت فنجد أن المستهلك الذى لايشغف بالبطاطا كثيرا يشعر وكأن دخله الحقيقي أزداد نتيجـة لانخفاض سـعر البطاطا وعليه فانه سوف يقوم بشراء كميه أقل من البطاطا ويشـتري سـلع أخرى احب الى نفسة بما بقى لدية من دخل نتيجة لانخفاض سعر البطاطا .

مثال : ان معادلة سلتزكى يمكن اشتقاقها لدالة المنفعة التى ذكرت فى الأمثلة الماضية ولهذا الغرض نضع قيد ميزانية المستهلك فى الشكل العام المطلق $y - p_1q_1 - p_2q_2 = 0$ ثم تكون الدالة الآتية $V = q_1q_2 + \lambda(y - p_1q_1 - p_2q_2)$

وبوضع الاشتقاقات الجزئية لهذه الدالة مساوية لصفر نحصل على المعادلات الاتيه :

$$q_2 - \lambda p_1 = 0$$
$$q_1 - \lambda p_2 = 0$$
$$y - p_1q_1 - p_2q_2 = 0$$

ومنها نحصل على المعادلات الآتية بأخذ الاشتقاق الكامل لها :

$$dq_2 - p_1\,d\lambda = \lambda\,dp_1$$
$$dq_1 - p_2\,d\lambda = \lambda\,dp_2$$
$$-p_1\,dq_1 - p_2\,dq_2 = -dy + q_1\,dp_1 + q_2\,dp_2$$

فاذا رمزنا لمحدودة عوامل هذه المعادلات بالحرف $\mathcal{D}$ وكذلك رمزنا للعامل المرافق للعنصر فى الصف رقم i والعمود رقم j بالحرف $\mathcal{D}_{ij}$ فاننا نحصل على الآتى :

$$\mathcal{D} = 2p_1p_2$$
$$\mathcal{D}_{11} = -p_2^2$$
$$\mathcal{D}_{21} = p_1p_2$$
$$\mathcal{D}_{31} = -p_2$$

ويستخدم طريقة كريمر Cramer's rule يمكن الحصول على dq_1 على النحو التالى :

$$dq_1 = \frac{-p_2^2\lambda\,dp_1 + p_1p_2\lambda\,dp_2 - p_2(-dy + q_1\,dp_1 + q_2\,dp_2)}{2p_1p_2}$$

وبافتراض أن سعر السلعة الأولى فقط هو القابل للتغير ، نحصل على :

$$\frac{\partial q_1}{\partial p_1} = -\frac{p_2\lambda}{2p_1} - \frac{q_1}{2p_1}$$

ولكن نحصل على قيمة λ فاننا نعوض بقيم q_1 وقيم q_2 من المعادلتين الأوليتين من معادلات شروط الدرجة الأولى فى المعادلة الثالثة ونحصل على قيم λ بدلالة $y, p_1, p_2,$ وهكذا تكون $\lambda = y/2p_1p_2$. وبتعويض هذة القيمه فى المعادلة $\frac{\partial q_1}{\partial p_1} = -\frac{p_2\lambda}{2p_1} - \frac{q_1}{2p_1}$ وكذلك القيم $(y = 100, p_1 = 2, p_2 = 5)$

وكذلك قيمة الموازنة للمجهول q_1 (وتساوى (25)) نحصل على الاجابة العددية الاتيه:

$$\frac{\partial q_1}{\partial p_1} = -12.5$$

ومعنى هذه الاجابة هو أنه اذا بدأنا من حالة التوازن البدائية فان السعر p_1 اذا تغير، بفرق أن جميع المجهولات الأخرى على وضعها لم تتغير، فان مشتروات المستهلك سوف تتغير بمعدل وقدرة 12.5 وحده ق Q_1 لكل ريال تغير فى سعر Q_1، واتجاه هذا التغيرفى مشتروات المستهلك هو عكس اتجاه التغير فى السعر. فالتغيير $-p_2\lambda/2p_1$ هو نتيجة التعويض substitution effect، وقيمته فى المثال الحالى هى 6.25-. أما التغبير $-q_1/2p_1$ هو نتيجة الدخل income effect، وقيمتة الحالية هى 6.25- .

النتائج المتداخلة : Cross Effects

ان معادلة سلتزكى (٢ـ٣٣) وتمثيل مروناتها فى المعادلات (٢ـ٣٤) يمكن امتدادة ليشمل التغيرات فى الطلب لسلعة واحدة كنتيجة للتغيرات فى السعر للسلع الاخرى، وتكون على الانماط العامة التالية :

$$\frac{\partial q_i}{\partial p_j} = \frac{\mathcal{D}_{ji}\lambda}{\mathcal{D}} + q_j\frac{\mathcal{D}_{3i}}{\mathcal{D}} = \left(\frac{\partial q_i}{\partial p_j}\right)_{U = \text{ثابته}} - q_j\left(\frac{\partial q_i}{\partial y}\right)_{\text{الأسعار = ثابته}} \qquad (٢ـ٣٧)$$

$$\varepsilon_{ij} = \xi_{ij} - \alpha_j\eta_i \qquad (٢ـ٣٨)$$

لجميع $i, j = 1, 2$ واشارات النتائج المتداخلة $(i \neq j)$ غير معروفة عادة. فاذا كانت $S_{ij} = \mathcal{D}_{ji}\lambda/\mathcal{D}$ تمثل نتيجة التعويض عندما تتعدل كمية السلعه كنتيجة للتغيرات فى السعر j وبما ان $\mathcal{D}$ محدده متماثلة[1] symmetric determinant فان $\mathcal{D}_{12} = \mathcal{D}_{21}$، وكذلك يتبع ان $S_{ij} = S_{ji}$. وهذا يعنى ان نتيجه التعويض على السلعه فى الترتيب i كنتيجة للتغير فى السعر فى الترتيب j هو نفسه على السلعه فى الترتيب j نتيجة للتغير فى السعر فى الترتيب i[2] .

وهذه النتيجه تستدعى الانتباه فتخيل ان طلب المستهلك للشاهى يزداد بمعدل كوبين من الشاهى لكل قرش زيادة فى سعر القهوة ومن الممكن ان نستنتج من هذا ان مشترواته من القهوة سوف تزداد بمعدل كوبين من القهوة لكل قرش زيادة فى سعر الشاهى Q_1 compensated demand elasticities .
كنتيجة للتغيرات فى السعرين p_1، p_2 نحصل على الآتى،

$$\therefore \quad \xi_{11} + \xi_{12} = \frac{p_1\mathcal{D}_{11}\lambda}{q_1\mathcal{D}} + \frac{p_2\mathcal{D}_{21}\lambda}{q_1\mathcal{D}} = \frac{\lambda(p_1\mathcal{D}_{11} + p_2\mathcal{D}_{21})}{q_1\mathcal{D}} = 0$$

وبما ان $(p_1\mathcal{D}_{11} + p_2\mathcal{D}_{21})$ يساوى الصفر، لانه مفكوك المحدده فى المعادلة(٢ـ٢٧)

---

(١) يقال للمحدده A determinant بانها تماثليه symmetric اذا كانت مصطفاتها array متماثله حول قطرها الرئيسى principal diagonal .

(٢) نقصد هنا بالترتيب i، j التعبير ith و jth (المترجم)

بالنسبه للعوامل المرافقه cofactors المغايره(وهى العوامل المرافقه لعناصر العمود الاول مضروبه فى سالب عناصر العمود الاخير) فان مرونه التعويض السالبه للسلعه Q_1 بالنسبه للسعر p_1 تساوى القيمه المطلقه لمرونه التعويض الموجبه للسلعه Q_1 بالنسبه للسعر p_2 .

واذا جمعنا مرونات الطلب العاديه للسلعه Q_1 بصفه سالبه كنتيجه للتغيرات فى السعرين p_1 ، p_2 كما هى معطاة فى المعادلة(٢ــ٣٨) نحصل على :

$$-(\varepsilon_{11}+\varepsilon_{12}) = -(\xi_{11}+\xi_{12}) + (\alpha_1+\alpha_2)\eta_1 = \eta_1 \qquad (٢ــ٤٠)$$

فباستخدام المعادله (٢ــ٣٩) والمعادله ($\alpha_1+\alpha_2=1$) نحصل على النتيجة التى تنص على ان مرونه الدخل لطلب سلعة ما يساوى سالب حاصل جمع مرونات السعر العاديه لطلب السلعه نفسها بالنسبه لسعرها وبالنسبة للاسعار الاخرى .

السلع التبادلية والتكاملية Substitutes and Complements

يقال لسلعتين انهما تبادليتان اذا كانت معا تحققان للمستهلك نفس الرغبات ويقال انهما تكامليتان اذا كانت تستهلكان معا من اجل تحقيق بعض الرغبات المحدده وهذه بالطبع تعريفات غير مفيده تماما ولكن تجارب الحياة اليوميه قد تعطى بعض الامثلة المقبوله منها ان الشاى والقهوة ، فى معظم الاحيان سلعتان تبادليتان بينما القهوه والسكر سلعتان متكاملتان وتعطينا معادله سلتزكى(٢ــ٣٧) تعريفا اكثر دقه وعمق للسلع التبادليه والتكامليه عن طريق حد التعويض التداخل cross-substitution فى المعادله وعلى هذا فان السلعتين Q_1 ، Q_2 تكونان تبادليتان اذا كانت نتيجه التعويض (وهى $\mathscr{D}_{21}\lambda/\mathscr{D}$) موجبه وتكونان تكامليتان اذا كانت نتيجة التعويض سالبه .

فاذا كانت السلعتان Q_1 ، Q_2 تبادليتان (فى مفهوم تجربة الحياة اليومية)واذا كانت ايضا التغيرات التعويضية فى دخل المستهلك تحافظ فى وضعه على منحنى سواء معين ، فان اى تغير فى سعر سوف يكون حافزا للمستهلك ليعوض Q_2 بدلا من Q_1 وعليه فان $(\partial q_2/\partial p_1)_{U=const} > 0.$ ولنفس الاسباب فان $(\partial q_2/\partial p_1)_{U=const} < 0$ فى حالة السلعه التكامليه .[1]

ليس كل السلع مكملة بعضها البعض ولذلك فان التبادل فقط هو الحادث فى مثل حالة المتغيران الراهند واثبات هذه النظريه كما يلى:

---

(١) وهذا تبعا اساس لبعض التعريفات فعندما تكون $(\partial q_2/\partial p_1)_{U=const} = 0$ فان السلعتان Q_1 ، Q_2 تكونان مستقلتان .

نضرب معادلة(٢ــ٣٠) فى p_1 ومعادلة(٢ــ٣١) فى y ومعادلة (٢ــ٣٧) لقيم $i = 1$ و $j = 2$ فى p_2 ثم تجمع لنحصل على:

$$\frac{\mathcal{D}_{11}\lambda}{\mathcal{D}} p_1 + q_1 \frac{\mathcal{D}_{31}}{\mathcal{D}} p_1 + \frac{\mathcal{D}_{21}\lambda}{\mathcal{D}} p_2 + q_2 \frac{\mathcal{D}_{31}}{\mathcal{D}} p_2 - \frac{\mathcal{D}_{31}}{\mathcal{D}} y$$

$$= \frac{1}{\mathcal{D}} [\mathcal{D}_{11}\lambda p_1 + \mathcal{D}_{21}\lambda p_2 - \mathcal{D}_{31}(y - p_1q_1 - p_2q_2)]$$

$$= \frac{1}{\mathcal{D}} [\mathcal{D}_{11}\lambda p_1 + \mathcal{D}_{21}\lambda p_2 - \mathcal{D}_{31}(0)] = 0$$

والسبب فى ان المحصور داخل القوس يساوى صفرا هو انه مفكوك لحدود عوامل مغايره كما فى المعادله(٢ــ٣٩) وبتعويض $S_{ij} = \mathcal{D}_{ji}\lambda/\mathcal{D}$. نحصل على :

$$S_{11}p_1 + S_{12}p_2 = 0 \qquad (٢ــ٤١)$$

ومن المعروف ان نتيجة التعويض للسلعة Q_1 كنتيجه لتغيرات فى السعر p_1 (وهى فى المعادله تساوى S_{11}) تكون سالبه وعلى هذا فان المعادله (٢ــ٤١) تتطلب ان تكون S_{12} موجبه وهذا يعنى بالنسبه لتعريفات التبادل والتكامل ان من الضرورى ان يكونا سلعتان تبادليتان Q_1 و Q_2 .

وتعرف السلعتان i و j بأنهما تبادليتان بالجملة ***gross substitutes*** او تكامليتان بالجمله ***gross complements*** حسب اشارة $\partial q_i/\partial p_j$ من السلع (او البضائع) ان يكونا تبادليتان بالنسبه للحد S_{ij} وفى نفس الوقت يكونا تكامليتان بالجمله وكذلك فى حالة وجود عدد n من السلع فانه ايضا يحتمل ان تكون السلع تكامليه بالنسبه للحد S_{ij} وتكون كذلك فى نفس الوقت تبادليه بالجمله .

مثال : فى حالة وجود سلعتان والمعطاه بدالة المنفعه $U = q_1q_2 - q_2$ بحيث ان مجال الدالة هو $q_1 > 1, q_2 > 0$ وبايجاد الحد الاعلى تحت، قيد ميزانية المستهلك نتحصل على دالة الطلب $q_2 = (y - p_1)/2p_2$ والمحققه للمجال $p_1 < y$. وهنا $\partial q_2/\partial p_1 < 0$ لجعل السلعتان تكامليتان بالجملهوبالرغم من انهما تبادليتان بالنسبه للحد S_{12} .

٢ – ٦ التعميم إلى n متغير : GENERALIZATION TO n VARIABLES

بدلا من التحاليل السابقه فى حالة سلعتان ، نعمم النقاش ليصبح عدد المتغيرات n بدلا من اثنين وهذا التعميم سوف لا يكون بصفه موسعه ولكن الخطوات الاولى متشابهه . وفى حالة وجود عدد n من السلع فان دالة المنفعة تكون على النحو التالى :

$$U = f(q_1, q_2, \ldots, q_n)$$

وكذلك قيد الميزانيه يكون على النحـو التالــي:

$$y - \sum_{i=1}^{n} p_i q_i = 0$$

فاذا كونا دالة لاقرانج نحصل على:

$$V = f(q_1, q_2, \ldots, q_n) + \lambda \left(y - \sum_{i=1}^{n} p_i q_i \right)$$

وبوضع الاشتقاقات الجزئيه لدالة لاقرانج مساويه لصفر نحـصل على:

$$\frac{\partial V}{\partial q_i} = f_i - \lambda p_i = 0 \qquad i = 1, \ldots, n \qquad (٢_٤٢)$$

وهذه الشروط فى(٢_٤٢) يمكن تعديلها لتنص على المساواة لجميع السلع التى لهـا منفعة حديه marginal utility مقسومه على السعر. وهنا ايضا فان اشتقاق V بالنسبه لمضروب لاقرانج λ يمثل قيد الميزانيه للمستهلك ويوجد مجموع $(n + 1)$ من المعادلات فى$(n + 1)$ من المجاهيل (وهى عدد n من q بالاضافــــه الــى λ = $(n + 1)$ ويمكن الحصول على منحنيات الطلب للـعدد n من السلـع بحل المعادلات لقيم q ويمكن كتابة الشروط فى معادله(٢_٤٢) بطريقه بديله:

$$-\frac{\partial q_i}{\partial q_j} = \frac{p_j}{p_i}$$

لجميع $j; i$ وهذا يعنى ان معدل تعويض السلعه i للسلعه j يجب ان يساوى خارج قسمه الاسعار p_j/p_i. وشروط الدرجه الثانيه يجب تحقيقها للتاكد من اى مجموعـه من السلع، والتى تحقق شروط معادله(٢_٤٢) هـى مجموعة ذات حد اعلا optimal ويجب كذلك ان تكون محددات هيسيان المجاورة bordered Hessian determinants تبادليه فى اشاراتها (بمعنى ان تكون موجبه ومره سالبه وهكذا) على النحو التالى :

$$\begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} & -p_1 \\ f_{21} & f_{22} & -p_2 \\ -p_1 & -p_2 & 0 \end{vmatrix} > 0, \qquad \begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} & -p_1 \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} & -p_2 \\ f_{31} & f_{32} & f_{33} & -p_3 \\ -p_1 & -p_2 & -p_3 & 0 \end{vmatrix} < 0,$$

$$\ldots, (-1)^n \begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} & \cdots & f_{1n} & -p_1 \\ f_{21} & f_{22} & \cdots & f_{2n} & -p_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f_{n1} & f_{n2} & \cdots & f_{nn} & -p_n \\ -p_1 & -p_2 & \cdots & -p_n & 0 \end{vmatrix} > 0$$

وهى بالطبع تعميم للشرط فى معادلة(٢_١٢).

ويمكن ايضا تعميم افتراض تحدب convexity منحنيات السواء من مجال ذو بعدين two dimensions الى سطوح فى مجال بعدد n من الابعاد. واول شـرط من

شروط الدرجه الثانيه فى حالة n من الابعاد هو نفسه شرط الدرجه الثانيه فى حالة المجال ذو البعدين والذى اوضحنا انه ينتج فى انخفاض RCS بين السلع • اما فى حالة n من الابعاد فانه ينتج فى انخفاض RCS بين كل زوجين من السلع• وتحقيق شروط الدرجه الثانيه يأتى بضمان وجود شرط شبه ــ التقعر المنضبط لدالة المنفعة •
والنظريات الاخرى يمكن تعميمها كذلك فمثلا، معادلات سلتزكى فى (٢ــ٣٧) وكذلك فى (٢ــ٣٨) تتحقق لجميع $i, j = 1, \ldots, n.$ وتعميم معادلة (٢ــ٤١) ينتج عنه المعادلات التالية :

$$\sum_{j=1}^{n} S_{ij} p_j = 0 \qquad i = 1, \ldots, n \qquad (٢ــ٤٢)$$

ويتبع من هذا ايضا انه لايمكن ان تكون جميع السلع مكمله لبعضها البعض، مع العلم بأنه بعض ازواج من هذه السلع يمكن ان تكمل بعضها البعض بمعنى ان بعض $S_{ij} < 0$ لقيم $j \neq i$ • وكذلك يمكن تعريف التبادل والتكامل بالجمله على نفس النمط السابق •
ويمكن ايضا تعميم العلاقات الخاصه بالمرونات • فالنمط لها فى حاله العدد n من السلع للمعادلات فى (٢ــ١٨) و(٢ــ١٩) و(٢ــ٢١) يكون :

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \varepsilon_{ij} = -\alpha_j \qquad j = 1, \ldots, n$$

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \xi_{ij} = 0 \qquad j = 1, \ldots, n$$

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_j \eta_j = 1$$

وتعميم المعادلات فى (٢ــ٣٩) وكذلك (٢ــ٤٠) تكون على النحو التالى :

$$\sum_{j=1}^{n} \xi_{ij} = 0 \qquad i = 1, \ldots, n$$

$$-\sum_{j=1}^{n} \varepsilon_{ij} = \eta_i \qquad i = 1, \ldots, n$$

٢ - ٧ ملخص SUMMARY

لقد قام علماء الاقتصاد فى القرن التاسع عشر بوضع نظريات المستهلك وسلوكه على الافتراض القاضى بتقدير لكمية النفعه التى يحصل عليها المستهلك من سلعة ما ولكن هذا الافتراض المقيد للنظريات هجر مع بداية هذا القرن ونفترض ان المستهلك قادر على ترتيب السلع حسب الافضليه فى نظام محدد • وهذا الترتيب يوصف من الناحية الرياضيه عن طريق دالة المنفعه الترتيبيه والتى تعين رقما اعلى للسلع الاكثر رغبه عند المستهلك الذى يفترض ان لديه دالة منفعة شبه ــ مقعرة بانضباط تام مؤديه الى انخفاض فى معدل تعويض السلع (RCS) •

ولقد وجدنا ان القاعده الاساسيه لنظريه وسلوك المستهلك فى ايجاد الحد الاعلى للمنفعه • وحيث ان دخله محدود لذا فان المستهلك يحاول ايجاد الحد الاعلى للمنفعه تحت شرط قيد ميزانيته والذى يعبر عن محدوديه دخله رياضيا • وبالطبع فان معدل تعويض السلع RCS للمستهلك يجب وان يساوى نسبه الاسعار للحد الاعلى للمنفعه •

وبلغة الرسم فان مجموعه السلع والتى تعطى للمستهلك حده الاعلى من المنفعه تقع على النقطه التى يلامس عندها خط دخله مع منحنى السواء • وشرط الدرجه الثانيه تتحقق بضمان افتراض التحدب •

ونجد ايضا ان دالة المنفعه ليست وحيدة او فريده من نوعها لان اى دالة تقوم بدور وصف افضليات المستهلك يمكن الحصول على دالة اخرى تقوم بنفس الغرض عن طريق التحويلات بشرط ان تكون تحويلة تزايديه موجبه بالنسبه للدالة الاولى ولكن بعض انواع التحويلات لا يحافظ على الترتيب المعين لافضليات المستهلك ولهذا فان دالة المنفعة تكون فريده من نوعها وحتى الحصول على تحويلة تزايديه موجبه لنجعل منها دالة غير وحيده •

ويمكن بالطبع الحصول على دوال الطلب العاديه للسلع من شروط الدرجه الاولى للحصول على الحد الاعلى للمنفعه وهى تعطى الكميات المطلوبة بدلالة جميع الاسعار ودخل المستهلك وهذه الدوال وجد انها ذات قيمة فريديه ومتجانسه من درجة صفر فى الاسعار والدخل ، بمعنى ان اى تغير تناسبى فى جميع الاسعار ودخل المستهلك لا يغير الكميات المطلوبه • اما دوال الطلب التعويضيه للمستهلك فقد ركبت على الغرض بأن دخله قد ازداد او تناقص ، كنتيجة لتغير فى السعر من اجل الحفاظ على رغبه المستهلك على مستوى المنفعة الذى بدء به وهذه الدوال تعطى الكميات المطلوبة بدلالة جميع الاسعار وهى ايضا دوال ذات قيمة فرديه متجانسه من درجة صفر فى الاسعار • وتحصلنا كذلك على منحنى الطلب بوضع الكميه المطلوبه بدلالة سعرها الخاص على افتراض ان المتغيرات الاخرى فى دالة الطلب تعامل كما لو كانت معطاه (ثابته غير متغيرة) ولقد عرفنا مرونات السعر لدوال الطلب المختلفه الانواع وعرفنا ايضا ، مرونات الدخل لدوال الطلب العاديه •

وعلى وجه العموم وجدنا ان كمية العمل التى يقوم بها المستهلك تأثر على مستوى المنفعه والتى يمكن الحصول عليها عن طريق ايجاد الحد الاعلى للمنفعه وشروط التوازن تشبه للشروط التى تتحقق عند اختيار الحد الاعلى من مجموعات السلع المختلفه والمعروضه للمستهلك ليختار منها •

ومن الممكن معرفة رد الفعل عند المستهلك للتغيرات فى دخله واسعار السلع عن طريق نتائج الدخل والتعويض فتأثير اى تغير فى سعر معطى يمكن تحليله الى مركبين هامين احدهما نتيجه التعويض والتى تقيس المعدل الذى يعوض به المستهلك سلعة مكان اخرى بتحركه عبر نفس منحنى السواء والثانى هو نتيجة الدخل كتصنيف متبقى فاذا تغير سعر سلعة ما ، فان الكميه المطلوبه سوف تتغير فى الاتجاه المعاكس اذا اجبر المستهلك على التحرك عبر نفس منحنى السواء وفى الحالة تكون نتيجه التعويض سالبه ، ولكن اذا كانت نتيجه الدخل موجبه فان السلعة المطلوبه تسمى سلعة ادنى inferior good اما اذا كان مجموع النتيجتين (نتيجه الدخل والتعويض) موجبه فان السلعه المطلوبه تسمى بسلعة جيفين .Giffen good ولقد عرفنا تبادل وتكامل السلع عن طريق اشاره نتيجة التعويض بالنسبه لسلعة ما عندما يتغير سعر سلعة اخرى على النحو التالى : اذا كانت نتيجة التعويض التداخلى موجبه فهذا يعنى تبادلية السلع ، اما اذا كان سالبا فهذا يعنى تكاملها • وعرفنا ايضا ، مجمل التبادل والتكامل عن طريق التأثر الكامل لتغير الاسعار على الكميات المطلوبه وفى نهاية الباب ، عممنا النظريات الى عدد من السلع بدلا من افتراض وجود سلعتين فقط •

EXERCISES

2-1 Determine whether the following utility functions are regular strictly quasi-concave for the domain $q_1 > 0$, $q_2 > 0$: $U = q_1 q_2$; $U = q_1^{\gamma} q_2$; $U = q_1^2 + q_2^2$; $U = q_1 + q_2 + 2q_1 q_2$; $U = q_1 q_2 - 0.01(q_1^2 + q_2^2)$; and $U = q_1 q_2 + q_1 q_3 + q_2 q_3$.

2-2 Let $f(q_1, q_2)$ be a strictly concave utility function, and let $q_j^{(2)} = (q_j^0 + q_j^{(1)})/2$, $j = 1, 2$, where superscripts denote particular values for the variables. Prove that

$$f(q_1^{(2)}, q_2^{(2)}) - f(q_1^0, q_2^0) > f(q_1^{(1)}, q_2^{(1)}) - f(q_1^{(2)}, q_2^{(2)})$$

2-3 Find the optimum commodity purchases for a consumer whose utility function and budget constraint are $U = q_1^{1.5} q_2$ and $3q_1 + 4q_2 = 100$ respectively.

2-4 The locus of points of tangency between income lines and indifference curves for given prices p_1, p_2 and a changing value of income is called an income expansion line or Engel curve. Show that the Engel curve is a straight line if the utility function is given by $U = q_1^{\gamma} q_2$, $\gamma > 0$.

2-5 Show that the utility functions $U = Aq_1^{\alpha} q_2^{\beta}$ and $W = q_1^{\alpha/\beta} q_2$ are monotonic transformations of each other where A, α, and β are positive.

2-6 Let a consumer's utility function be $U = q_1^6 q_2^4 + 1.5 \ln q_1 + \ln q_2$ and his budget constraint $3q_1 + 4q_2 = 100$. Show that his optimum commodity bundle is the same as in Exercise 2-3. Why is this the case?

2-7 Construct ordinary and compensated demand functions for Q_1 for the utility function $U = 2q_1 q_2 + q_2$. Construct expressions for ε_{11}, ξ_{12}, and η_1.

2-8 Derive the elasticity of supply of work with respect to the wage rate for the supply curve for work given by the example in Sec. 2-4.

2-9 Prove that Q_1 and Q_2 cannot both be inferior goods.

2-10 Verify that $S_{11} p_1 + S_{12} p_2 = 0$ for the utility function $U = q_1^{\gamma} q_2$.

2-11 Let $U = f(q, H)$ be a utility function the arguments of which are the quantity of a commodity (q) and the time taken to consume it (H). The marginal utilities of both arguments are positive. Let W be the amount of work performed, $W + H = 24$ (hours), r be the wage, and p be the price of q. Formulate the appropriate constrained utility maximization problem. Find an expression for dH/dr. Is its sign determined unambiguously?

2-12 Imagine that coupon rationing is in effect so that each commodity has two prices: a dollar price and a ration-coupon price. Assume that there are three commodities and that the consumer has a dollar income y and a ration-coupon allotment z. Also assume that this allotment is not so liberal that any commodity combination that he can afford to purchase with his dollar income can also be purchased with his coupons. Formulate his constrained-utility-maximization problem assuming a strictly concave utility function. Derive conditions for a maximum. Interpret the conditions from an economic point of view. Find a sufficient condition which guarantees that the imposition of rationing does not alter the consumer's purchases.

SELECTED REFERENCES

Debreu, Gerard: *Theory of Value* (New York: Wiley, 1959). The theory of the consumer is discussed in chap. 4 from an advanced and modern mathematical point of view.

Friedman, M.: *Essays in Positive Economics* (Chicago: University of Chicago Press, 1953), "The Marshallian Demand Curve," pp. 47–99. An analysis of the various types of demand functions and demand curves.

Georgescu-Roegen, N.: "The Pure Theory of Consumer Behavior," *Quarterly Journal of Economics*, vol. 50 (August, 1936), pp. 545–593. A mathematical analysis of ordinal utility theory.

Hicks, J. R.: *Value and Capital* (2d ed., Oxford: Clarendon Press, 1946). Chaps. I–III contain an exposition of ordinal utility theory. The mathematical analysis is in an appendix.

Linder, S. B.: *The Harried Leisure Class* (New York: Columbia University Press, 1970). An analysis of the effect on consumption of the time required for consumption activities. The mathematical analysis is in an appendix.

Marshall, Alfred: *Principles of Economics* (8th ed., London: Macmillan, 1920). Chaps. I–IV, book III, contain a nonmathematical discussion of wants, utility, marginal utility, and demand from the cardinalist viewpoint.

Samuelson, P. A.: *Foundations of Economic Analysis* (Cambridge, Mass.: Harvard University Press, 1948). Chaps. V and VII contain a comprehensive analysis of utility theory using fairly advanced mathematics.

Slutsky, E. E.: "On the Theory of the Budget of the Consumer," *Giornale degli Economisti*, vol. 51 (July, 1915), pp. 1–26. Also reprinted in American Economic Association, *Readings in Price Theory* (Homewood, Ill.: Irwin, 1952), pp. 27–56. The article upon which the modern mathematical theory of consumer behavior is based. Fairly difficult mathematics.

Theil, H.: *Theory and Measurement of Consumer Demand* (Amsterdam: North-Holland, 1975). The mathematics of demand theory is developed in the first three chapters, using calculus and matrix algebra.

الفصل الثالث

موضوعات فى سلوك المستهلك
TOPICS IN CONSUMER BEHAVIOR

لقد تم التوسع فى نظريات سلوك المستهلك الاساسية ، والتى تقدم شرحها فى الباب الثانى ، فى هذا الباب من جميع الجهات لتغطى سلوك المستهلك للحصول على الحد الاعلى للمنفعة لبعض دوال المنفعة المختلفة الانواع.

ففى الجزء ٣ـ١ نوقشت دالة المنفعه المولدة لدوال المنصرفات الخطيه المقدرة estimable linear expenditure functions اما فى الجزء ٣ـ٢ فقد عرفت دوال المنفعه التجميعيه والانفصاليه Separable and additive مع خواصها . وفى الجزء ٣ـ٣ فقد نوقشت خواص دوال المنفعه المتجانسه والمتالفه homothetic ولقد عرفت دوال المنفعه بدلالة الاسعار والدخل فى الجزء ٣ـ٤ وكذلك اى علاقات اخرى بين المنفعه ودوال الطلب .أما فى الجزء ٣ـ٥ فان نظريات الافضليه المفصح عنها revealed preference وثم نظريات اخرى هامه تتبع من سلوك المستهلك الملاحظ قد تم جمعها واختصارها فى الجزء ٣ـ٥ .

ففى الجزء ٣ـ٦ لقد تم اثبات ان مجموعة من السلع يمكن ان تعامل كسلعه فرديه مركبه single composite commodity اذا كانت اسعار هذه السلع تتغير دائما بنفس النسبه.اما مقاييس " فائض المستهلك"consumer's surplus" والتى اكتسبها المستهلك من استهلاكه سلعة ما فقد نوقشت فى الجزء ٣ـ٧ . ولقد توسع فى نظرية سلوك المستهلك لتغطى الاختيار تحت ظروف عدم التاكد uncertainty فى الجزء ٣ـ٨ وهذه التحاليل طبقت على مسائل التأمين فى الجزء ٣ـ٩ .

٣ - ١ نظام الصرف الخطى : A LINEAR EXPENDITURE SYSTEM

ولسنين عدة قام علماء الاقتصاد النظريون بمعالجة وتحليل سلوك المستهلكين للحصول على اعلى مرتبه للمنفعه وقام فى نفس الوقت علماء الاقتصاد التطبيقيون econometricians بتقدير طلبات ومنصرفات المستهلك بدون اتصال مع بعضهم البعض الا القدر اليسير

فالنظريون Theorists يقدمون بعض الامثله التي لا تساعد كثيرا في العمل التطبيقي، والتطبيقيون يعطون تقديرات لبعض العلاقات التي ليس لها ارتباط ، الا القليل ، بطريقة الحصول على الحد الاعلى للمنفعه ، ولكن لحسن الحظ ، فقد قصرت الهوة بين الاثنين وقدمت امثله لها قاعدة نظرية سليمة تسمح بالتقديرات التطبيقيه عليها • ونعطي هنا مثالا لهذا •

مثال : افترض ان دالة المنفعه (١) هي كالتالي :

$$U = \alpha_1 \ln(q_1 - \gamma_1) + \alpha_2 \ln(q_2 - \gamma_2)$$

في المجال $q_1 > \gamma_1,\ q_2 > \gamma_2$.ويمكن تعريف المجاهيل على انها الكميات الموجبه للحد الادنى من المعيشه minimum subsistence quantities وكذلك المجاهيل فاننا نفترض انها موجبه • وبتطبيق التحويلة التزايدية الموجبه positive monotonic transformation $U' = U/(\alpha_1 + \alpha_2)$ لتحصل على $U' = \beta_1 \ln(q_1 - \gamma_1) + \beta_2 \ln(q_2 - \gamma_2)$

وتسمى العوامل β_1 ، β_2 (بحيث ان $(\beta_1 + \beta_2 = 1)$) عوامل المشاركه "share" وتكون الدالة Z بحيث ان :

$$Z = \beta_1 \ln(q_1 - \gamma_1) + \beta_2 \ln(q_2 - \gamma_2) + \lambda(y - p_1 q_1 - p_2 q_2)$$

ونضع اشتقاقاتها الجزئيه مساويه للصفر لتحصل على :

$$\frac{\partial Z}{\partial q_1} = \frac{\beta_1}{q_1 - \gamma_1} - \lambda p_1 = 0$$

$$\frac{\partial Z}{\partial q_2} = \frac{\beta_2}{q_2 - \gamma_2} - \lambda p_2 = 0$$

$$\frac{\partial Z}{\partial \lambda} = y - p_1 q_1 - p_2 q_2 = 0 \qquad (٣\text{–}١)$$

ويمكن للقارئ ان يثبت تحقق شرط الدرجه الثانيه وبتقييم المعادله(٢ــ٣٦) يستطيع القارئ ، ايضا ان يثبت ان المنفعه الحديه للدخل تكون في تناقص بالنسبه لهذا المثال وبحل معادلات(٣ــ١) للكميات القصوى نحصل على دوال الطلب

---

(١) هذه الداله تعرف بدالة (كلاين ــ روبين) Klein-Rubin او ستون وقيرى) Stone-Geary راجع مقالة كلاين وروبين تحت عنوان " مؤشر المنفعه الثابت المستوى المعيشه " في دوريه مختصر الدراسات الاقتصاديه Review of Economics Studies مجلد رقم ١٥ من عام ١٩٤٧ــ٤٨ على صفحات ٨٤ــ٨٧ وكذلك مقاله قيرى في نفس الدوريه مجلد رقم ١٨ من عام ٤٩/ ٥٠ على الصفحات ٦٥ــ٦٦ تحت عنوان " ملاحظه على مؤشر المنفعه الثابت لمستوى المعيشه " وكذلك راجع مقالة ستون تحت عنوان " انظمة المصروفات الخطيه وتحاليل الطلب : تطبيقا على انمطة الطلب البريطانيه في دورية الاقتصاد Economic Studies مجلد ١٥ من عام ١٩٥٤ على صفحات ٥١١ ــ ٥٢٧ •

التاليـــه :

$$q_1 = \gamma_1 + \frac{\beta_1}{p_1}(y - p_1\gamma_1 - p_2\gamma_2)$$

(٢ـ٣)

$$q_2 = \gamma_2 + \frac{\beta_2}{p_2}(y - p_1\gamma_1 - p_2\gamma_2)$$

وبضرب المعادله الاولى فى (٣ـ٢) بالسعر p_1 والثانيه بالسعر p_2 نحصل علـــى دوال المصروفات expenditure functions التاليه :

(٢ـ٣)

$$p_1q_1 = p_1\gamma_1 + \beta_1(y - p_1\gamma_1 - p_2\gamma_2)$$

$$p_2q_2 = p_2\gamma_2 + \beta_2(y - p_1\gamma_1 - p_2\gamma_2)$$

وهذه المعادلات هى معادلات خطيه (اى معادلات من الدرجه الاولى linear) بالنسبه للدخل والاسعار وعليه فانها مناسبه لتحليل الانحداد الخطيــــــــــه linear regression analysis ٠

٣ ٢ دوال المنفعة القابلة للجمع والانفصال :

SEPARABLE AND ADDITIVE UTILITY FUNCTIONS

لقد افترضنا فى الباب الثانى ان دوال المنفعه لها صفات خاصه منها قابليـــة الاشتقاق وانها دوال متزايده وانها كذلك شبه ـ مقعره بانضباط تام واعطينـــا بعض الامثله وكذلك فى الجزء ٣ـ١ ٠ وفى هذا الجزء وكذلك الجزء ٣ـ٣ نناقش خواص دوال المنفعه والتى تحقـق بعض الافتراضات الاضافيه العامه ٠

ومن هذه الخواص ، خاصية قابلية الانفصال ونقول بان دالة المنفعه لها خاصيـــه الانفصال الشديد *strongly separable* فى جميع متغيراتها المستقله اذا كان يمكـن كتابتها على النحو التالى :

(٤ـ٣)

$$U = F\left[\sum_{i=1}^{n} f_i(q_i)\right]$$

بحيث ان وكذلك تمثلان دالتان متزايدتان ومثال ذلك الداله

$$U = \ln(q_1^\alpha + q_2^\beta + q_3^\gamma)$$

ونقول بان دالة المنفعه لها قابلية الجمع *strongly additive* اذا كان يمكن كتابتها على النحو التالى :

(٥ـ٣)

$$U = \sum_{i=1}^{n} f_i(q_i)$$

بحيث ان f_i تمثل مجموعة دوال متزايده وخاصية قابلة الجمع ما هى الا حالة خاصة لمقابلة الانفصال ومثال قابلية الجمع هو الداله $U = q_1^\alpha + q_2^\beta + q_3^\gamma$ ٠ وان اى دالة منفعه والتى لهـــا تحويلة تزايديه قابله للجمع يمكن معاملتها على انها قابله للجمع لكل النظريات القابلـــة للتطبيق فى الدوال القابله للجمع فالداله $U = q_1^\alpha q_2$ قابلة للانفصال ولكنها لا تظهر علـى انها قابله للجمع ولكن تحويلة اللوغاريتم الطبيعى لهـــا $F(U) = \alpha \ln q_1 + \ln q_2$ قابـــل للجمع وكذلك فى مضاد اللوغاريتم الطبيعى للداله :

$U = \ln(q_1^\alpha + q_2^\beta + q_3^\gamma)$ فانها قابله للجمع بشده ٠

وبتفاضل المعادله (٣ـ٤) بالنسبه للكميات q_i و q_j وبقسمة اشتقاق بآخر نحصل على :

$$RCS = \frac{F'f'_i}{F'f'_j} = \frac{f'_i}{f'_j} \qquad (٣ـ٦)$$

ويتبع من المعادله ان المنفعه الحديه ، بوجه عام ، لكل سلعه تعتمد اعتمادا تاما على كميات جميع السلع الاخرى · ولكن المعادله (٣ـ٦) توضح ان RCS بين Q_i و Q_j تعتمد فقط على الكميات q_i و q_j ونتيجة لهذا فان افتراض قابلية الانفصال بشدة يسمح لنا بالتحاليل الزوجيه والتى لم تكن ممكنه فى الحاله العامة ·

ودالة المنفعه القابله للجمع لها الخاصية التى تنص على ان جميع الاشتقاقات الجزئية المتداخله تساوى صفرا بمعنى ان $\partial^2 U/\partial q_i \partial q_j = 0$ لجميع قيم $i \neq j$، وان شرط شبه ـ التقعر المنضبط فى حالة وجود متغيرين هو : $f_{11}f_2^2 + f_{22}f_1^2 < 0$

وتعرف دالة المنفعة بانها قابلة للانفصال بضعف *weakly separable* اذا كان من الممكن تقسيم المجاهيل الى مجموعتين او اكثر مثل $(q_1, \ldots, q_k)$ وكذلك $(q_{k+1}, \ldots, q_n)$ بحيث ان :

$$U = F[f_1(q_1, \ldots, q_k) + f_2(q_{k+1}, \ldots, q_n)]$$

وتعرف الدالة بانها قابله للجمع بضعف *weakly additive* اذا كان :

$$U = f_1(q_1, \ldots, q_k) + f_2(q_{k+1}, \ldots, q_n)$$

ونقصد بالانفصال هنا ان جميع RCS لكل ازواج المتغيرات داخل المجموعة الواحدة لا تتأثر بالكميات للمتغيرات خارج مجموعتها ؛ ونقصد ، كذلك بقابلية الجمع ان جميع الاشتقاقات المتداخله ، لازواج المتغيرات فى المجموعات المختلفه تساوى صفرا ·

٣ ٣ دوال المنفعة المتجانسة والمتآلفة :

HOMOGENEOUS AND HOMOTHETIC UTILITY FUNCTIONS

نعرف دالة المنفعه بانها متجانسه من درجة k اذا كان :

$$f(tq_1, \ldots, tq_n) = t^k f(q_1, \ldots, q_n) \qquad (٣ـ٧)$$

بحيث ان k ثابت و t اى رقم حقيقي موجب بحيث ان $(tq_1, \ldots, tq_n)$ تكون ضمن مجال الداله والاشتقاقات الجزئيه لدالة متجانسه من درجه k تكون ايضا متجانسه ولكن من درجه $k - 1$ وبتفاضل المعادلة (٣ـ٧) جزئيا بالنسبه للمتغير q_i مستخدمين قاعدة دالة الدالة the function of a function rule (١) من الناحية اليسرى لنحصل على :

$$tf_i(tq_1, \ldots, tq_n) = t^k f_i(q_1, \ldots, q_n)$$

---

(١) راجع الجزء A-2 فى نهاية الكتاب للتعرف على هذه القاعدة ·

وبهذا نحصل على RCS للسلع Q_i و Q_j كالتالى :

$$\frac{tf_i(tq_1, \ldots, tq_n)}{tf_j(tq_1, \ldots, tq_n)} = \frac{t^{k-1}f_i(q_1, \ldots, q_n)}{t^{k-1}f_j(q_1, \ldots, q_n)} = \frac{f_i(q_1, \ldots, q_n)}{f_j(q_1, \ldots, q_n)}$$

مبينا ان RCS لم يتغير بالنسبه للتغيرات النسبيه فى مستويات الاستهلاك وانه كذلك ، اذا كان المستهلك لا يفرق بين مجموعتين من السلع من حيث الافضليه فانه سوف لا يفرق ايضا من حيث الافضليه ، بين اى مجموعتين اخريتين هما بمثابة تكرار للمجموعة الاولى (راجع تمرين ٣ــ٢) .

اما بالنسبه الى منحنيات السواء والتى تمثل ، هنا دالتان مختلفتان من دوال المنفعه فانها واحدة اذا كانت احدى الدالتين دالة متزايدة مطرده بالنسبة للدالة الثانيــه ، وبالتالى فان خواص الدوال المتجانسه ،هى نفسها خواص جمع الدوال التزايديه المطرده للدوال المتجانسه .وهذه الدوال المنفعيهوالتى تدخل ضمـــن اطار هذا النمط العام والذى يضم الدوال المتجانسه ، تسمى دوال متالفه *homothetic* فاذا كانت دالة المنفعه من الدوال المتالفه فان معدلات تعويض السلع سوف يعتمد على كميات السلع النسبيه بدلا من كميات السلع المطلقة ويمكن معرفه ما اذا كانت دالة منفعه معينه دالة تالفيه بفحص معادلات RCS وعلى سبيل المثال ، فان الدالة $U = a - 1/q_1^a q_2$ ليست دالة متجانسه ولكنها دالة متآلفه حيث ان: $f_1/f_2 = aq_2/q_1$.

٣ - ٤ دوال المنفعة الغير مباشرة والازدواجية فى الاستهلاك :

INDIRECT UTILITY FUNCTIONS AND DUALITY IN CONSUMPTION

دوال المنفعة الغير مباشرة : Indirect Utility Functions

اذا افترضنا ان $v_i = p_i/y$ فان شرط قيد ميزانية المستهلك يمكن كتابته الان علـــــى النخو التالى :

$$1 = \sum_{i=1}^{n} v_i q_i \qquad (٣ــ٨)$$

وبما ان الحلول التى تؤدى الى الحصول على الحد الاعلى متجانسه من درجة صفر بالنسبه للدخل والاسعار فان هذه التحويله فى (٣ــ٨) لمن غفقد المعادلـة الاصليه شيئا وانما الغرض هو لوضع الاسعار فى وضعها الطبيعى او الاعتيادى فمعادلة(٣ــ٨) بالاضافه الى داله المنفعه $U = f(q_1, \ldots, q_n)$ تعطى شروط الدرجه الاولى الاتيه

للحصول على الحد الاعلى :

$$f_i - \lambda v_i = 0 \quad i = 1, \ldots, n$$

(٣ـ٩)

$$1 - \sum_{i=1}^{n} v_i q_i = 0$$

ونتحصل على دوال الطلب العاديه بحل المعادلات (٣ـ٩)

(٣ـ١٠) $$q_i = D_i(v_1, \ldots, v_n)$$

وعليه نعرف دالة المنفعه الغير مباشره $g(v_1, \ldots, v_n)$ على النحو التالـــي :

(٣ـ١١) $$U = f[D_1(v_1, \ldots, v_n), \ldots, D_n(v_1, \ldots, v_n)] = g(v_1, \ldots, v_n)$$

وهذه الدالة تعطى الحد الاعلى للمنفعه بدلالة الاسعار الاعتياديه او الطبيعيـــه normalized prices. وتعكس درجة الحصول على هذا الحد وكذلك تعكس اسعار السوق بينما دالة المنفعة العاديه تصف افضليات المستهلك مستقله بذلك عن ظاهرة السوق . وبتطبيق قاعدة الدالة ــ المركبه (١)

على المعادلة (٣ـ١١) نحصل على

(٣ـ١٢) $$g_j = \sum_{i=1}^{n} f_i \frac{\partial q_i}{\partial v_j} = \lambda \sum_{i=1}^{n} v_i \frac{\partial q_i}{\partial v_j} \qquad j = 1, \ldots, n$$

حيث ان المتساويات الثانيه مبنيه على المعادلة (٣ـ٩) وباخذ الاشتقاق الجزئـــي للمعادلة(٣ـ٨) بالنسبه للمجهول v_j نحصل على :

$$\sum_{i=1}^{n} v_i \frac{\partial q_i}{\partial v_j} = -q_j \qquad j = 1, \ldots, n$$

وعلى هذا فان المعادلة (٣ـ١٢) تتطلب ان :

(٣ـ١٣) $$q_j = -\frac{g_j}{\lambda} \qquad j = 1, \ldots, n$$

والتي تسمى " بمحايدة روى Roy's identity وطلبات السلع المثالى ترتبط باشتقـاقـات دالة المنفعة الغير مباشرة وكذلك القيمه المثلى لمضروب لاقرانج (وهى المنفعة الحديه للدخل) وبتعويض المعادلة(٣ـ١٣) فى اخر معادلة من معادلات (٣ـ٩) نحصـل على :

$$q_j = \frac{g_j}{\sum_{i=1}^{n} v_i g_i} \qquad j = 1, \ldots, n$$

بالإضافة إلى : $\lambda = -\sum_{i=1}^{n} v_i g_i$ ،

وهذه تعطينا نموذجا بديلا لمحايدة روى

والان افترض مسألة تتطلب الحصول على الحد الامثل بحيث ان المطلوب هو ايجاد الحد الادنى لمعادلة(٣ـ١١) تحت شرط معادلة(٣ـ٨) على ان تكون الاسعار الاعتياديه كمتغيرات والكميات متغيرة القيمه ولذلك تكون الدالة (٢) :

$$Z = g(v_1, \ldots, v_n) + \mu \left(\sum_{i=1}^{n} v_i q_i - 1\right)$$

---

(١) راجع الجزء A-2 فى اخر الكتاب للتعرف على هذه القاعدة .
(٢) يمكن للقارىء ان يتحقق من ان مضروب لقرانج فى هذه الحالة يكون موجبا .

وبوضع اشتقاقتها مساويه للصفر نحصل على :

$$\frac{\partial Z}{\partial v_i} = g_i - \mu q_i = 0 \qquad i = 1, \ldots, n$$

(٣ـ١٤)

$$\frac{\partial Z}{\partial \mu} = \sum_{i=1}^{n} v_i q_i - 1 = 0$$

ونحصل على معكوس دوال الطلب "Inverse demand functions" بحل معادلة (٣ـ١٤) من اجل الاسعار بدلالة الكميات على النحو التالــى :

$$v_i = V_i(q_1, \ldots, q_n) \qquad (٣ـ١٥)$$

واخيرا ، نعرف دالة المنفعه المباشرة $h(q_1, \ldots, q_n)$ كالتالى :

$$U = g[V_1(q_1, \ldots, q_n), \ldots, V_n(q_1, \ldots, q_n)] = h(q_1, \ldots, q_n) \qquad (٣ـ١٦)$$

وهذا يعطى موازاة للمسألة المباشرة والتى فيها كانت الكميات متغيره والاسعار لها قيم متغيره •

نظريات الازدواجية : Duality Theorems

يمكن وصف العلاقات بين دوال المنفعه المباشره والغير مباشره بمجموعة مـــن النظريات الازدواجيه ونعطى هنا بعض النظريات التوضيحيه بدون اثبات •

النظريه الاولى : افترض ان f تمثل دالة محدودة تزايديه شبه ــ مقعره بانضبــاط متمشيه مع الافتراض الداخلى[1] interior assumption والداله g التى تقررت بالمعادلة (٣ـ١١) هى دالة محدده تناقصيه شبه ــ محدبه[2] بانضباط بالنسبه للاسعـــار الموجبه •

النظريه الثانيه : افترض ان g تمثل دالة محدده تناقصيه شبه ــ محدبه بانضبـــاط بالنسبه للاسعار الموجبه • فان الداله h والتى تقررت بالمعادلة (٣ـ١٦) تكون دالة محدده تزايديه شبه ــ مقعرة بانضباط منظم •

النظريه الثالثه : وعلى حسب الافتراضات السابقه فان :

$$h(q_1, \ldots, q_n) = g[V_1(q_1, \ldots, q_n), \ldots, V_n(q_1, \ldots, q_n)]$$

---

(١) ينص الافتراض الداخلى على ان منفعة اى مجموعة من السلع والتى بها ، كميـــة او اكثر مساويه للصفر تكون اقل من المنفعه لاى مجموعة من السلع والتى تكـــون كمياتها كلها موجبه •

(٢) تعرف الداله $g(v)$ بحيث ان v تمثل كمية متجهة vector لها n من الحدود بانها شبه ــ محدبه اذا كان :

$$g[\lambda v^{(1)} + (1-\lambda)v^{(2)}] < \max[g(v^{(1)}), g(v^{(2)})] \quad •$$

لجميع $1 > \lambda > 0$ وكذلك لجميع ازواج النقاط $v^{(1)}$ ، $v^{(2)}$ ضمن مجـــال الدالـــه.

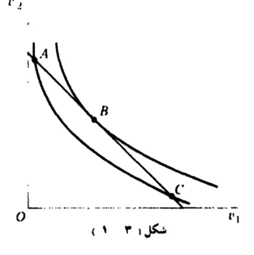
وكذلك

$$g(v_1, \ldots, v_n) = h[D_1(v_1, \ldots, v_n), \ldots, D_n(v_1, \ldots, v_n)]$$

فدالة المنفعه المباشرة والتى تقررت عن طريق دالة المنفعه الغير مباشرة تكون بالضبط مثل دالة المنفعة المباشرة والتى هى نفسها التى قررت دالة المنفعه الغير مباشرة •

ولقد شقت الازدواجيه فى الاستهلاك الطريق الى ارتباط وثيق بين الطلب ودوال المنفعه من اجل عمل دراسات تطبيعية على الطلب. وانه يمكن فى بعض الاحيان التخطى من دوال الطلب الى دالة المنفعه الغير مباشرة باستخدام محايدة روى، ومن ثم الى دالة المنفعه المباشرة المطابقة ، ويمكن ايضا الاستعانه بالازدواجيه فى التحاليل المقارنه الساكنه ، ونجد ايضا نظائر لدالة المنفعهالغير المباشرة فى خواص التالف وقابلية الانفصال وقابلية الجمع ولهذا فانه من الممكن القيام بتحاليل نظرية عديدة بدلالة دالة المنفعه المباشرة او الغير مباشرة وحسب ايهما اسهل •

مثال : افترض المثال المعطى لدالة المنفعة الغير مباشرة $g = a - v_1^2 v_2$ حيث ان منحنيات السواء الشبه ـ محدبه معطاه على الشكل (٣ـ١) والتى تشبه الى حد كبير منحنيات الشبه ـ مقعرة والمعطاة على الشكل (٢ـ١) السابق وعلى كل حال فان منحنيات السواء تكون محدبه فى كلا الحالتين وبالرغم من هذا فانه يوجد فرق رئيسى بينهما • ففى شكل (٣ـ١) تزداد المنفعه كلما تحرك المستهلك تجاه نقطه الاصل وان جميع النقاط الداخليه للخط AC تعطى مستويات للمنفعه أقل من المستويات والتى تعطيها النقطتين والفرق بين شبه ـ التقعر وشبه التحدب هو فى الاتجاه الذى تزداد فيه المنفعه وليس فى شكل منحنيات السواء • ونقطة B تعطى الحد الادنى للمنفعة تحت شرط ميزانية المستهلك والمصورة فى الشكل (٣ـ١) • ويمكن الحصول على منحنيات الطلب لهذا المثال باستخدام المعادله (٣ـ١٣) كما يلى :



شكل (٣ ١)

$$q_1 = \frac{2}{3v_1} \qquad q_2 = \frac{1}{3v_2} \qquad (٣ـ١٧)$$

وبعملية الحصول على الحد الادنى لدالة معينه يمكن للقارئ ان يتحقق من ان معكوس

دوال الطلب تكون كالتالى :

$$v_1 = \frac{2}{3q_1} \qquad v_2 = \frac{1}{3q_2}$$

وكذلك نجد ان دالة المنفعه المباشرة المطابقه هى :

$$U = a - \left(\frac{2}{3q_1}\right)^2 \frac{1}{3q_2} = a - \frac{4}{27q_1^2q_2} \qquad (١٨-٣)$$

وهذه داله تزايديه شبه ــ مقعرة بانضباط •

ولقد لوحظ فى الامثله الماضية ان دالة المنفعه $U^* = q_1^2q_2$ تولد دوال الطلب المعطاه فى(٣ــ١٧) وعليه فان المعادله(٣ــ١٨) لابد وان تكون تحويليه تزايديه مطرده لهذه الداله والتحويله فى هذه الحاله هى :

$$U = a + \frac{4}{27}\left(-\frac{1}{U^*}\right)$$

واخير نلاحظ ان :

$$U = a - \frac{4}{27(2/3v_1)^2(1/3v_2)} = a - v_1^2v_2$$

والتى تقرر الازدواجيه •

ازدواجية المنصرفات والمنفعة : Utility-Expenditure Duality

لنفترض ان المطلوب هو الحصول على الحد الادنى للمنصرفات والتى هى من الضرورى للحصول على مستوى معين من المنفعه.فعندما نتحصل عن طريق الحل على q_i فاننا نتحصل على دوال الطلب التعويضيه (راجع الجزء ٢ ــ٣) فاذا عوضنا فى $\Sigma_{i=1}^{n} p_iq_i$ بحلول q_i فاننا سوف نحصل على دالة المنصرفات $E(p_1, \ldots, p_n, U^0)$ والتى تعطى الحد الادنى للمنصرفات والضروريه للحصول على مستوى معين من المنفعه ومن السهوله اثبات ان E تكون دالة متجانسه بدرجة واحده بالنسبة للاسعار وانها متزايده باطراد بالنسبه لـ U^0 ويمكن ايضا اثبات ان دالة المنصرفات ، والمطابقة لدالة المنفعه شبه ــ المقعرة بانضباط منتظم والتى لا تقبل اى تشبع ، تكون مقعرة بالنسبه للاسعار • واخيرا فان مسلمة شيفارد Shephard's lemma تنص على ان الاشتقاقات الجزئيه للداله E بالنسبه للسعر فى المرتبه i ith price هو داله الطلب التعويضيه فى المرتبه ويمكن اثبات هذه المسلمه كالتالى ارمز لدالة الطلب التعويضيه فى المرتبه i بالدالة $q_i = q_i(p_1, \ldots, p_n, U^0)$.

فاذا

$$E(p_1, \ldots, p_n, U^0) = \sum_{i=1}^{n} p_iq_i(p_1, \ldots, p_n, U^0)$$

وان

$$\frac{\partial E}{\partial p_i} = q_i(p_1, \ldots, p_n, U^0) + \sum_{j=1}^{n} p_j \frac{\partial q_j(p_1, \ldots, p_n, U^0)}{\partial p_i}$$

ولكن الحصول على دوال الطلب التعويضيه يتم عن طريق الحصول على الحد الادنى للمنصرفات لمستوى معطى من المنفعه وهو U^0 وعلى ذلك ، فان التغير فى مجموع المنصرفات ، والناتج عن تغير بسيط فى الاسعار ، يكون صفرا وبالتالى فان الحد الثانى من المعادله السابقه يكون صفرا وان

$$\partial E/\partial p_i = q_i(p_1, \ldots, p_n, U^0).$$

مثال : فى المثال السابق توصلنا الى المعادلات (٣ــ١٧) و (٣ــ١٨) والتى سوف تعطينا هنا دوال الطلب التعويضية التالية :

$$q_1 = \frac{2^{1/3}p_2^{1/3}(U^0)^{1/3}}{p_1^{1/3}} \qquad q_2 = \frac{p_1^{2/3}(U^0)^{1/3}}{2^{2/3}p_2^{2/3}}$$

ونحصل كذلك على دالة المنصرفات التاليه :

$$E = p_1^{2/3}p_2^{1/3}(U^0)^{1/3}(2^{1/3} + 2^{-2/3})$$

ويمكن تحقيق مسلمة شيفارد بسهولة بتفاضل E جزئيا بالنسبه p_1 ، p_2 على التوالى •

أن الازدواجيه بين دوال المنفعة والمنصرفات تكون مطابقة تماما للازدواجية بين دوال التكلفه cost functions ودوال production functions وللحصول على شرح كامل راجع الجزء ٥ــ٤ •

٣ – ٥ نظرية الأفضلية الموضحة :

THE THEORY OF REVEALED PREFERENCE

لقد أفترضنا فى الاجزاء السابقة ان المستهلك يمتلك دالة المنفعة ولكن نظرية الافضلية الموضحة تسمح بالتنبوء بسلوك المستهلك بدون مواصفات لدالة المنفعة واضحة جليه بشرط انها تنصاع لبعض البديهات البسيطة • بالاضافه الى ان وجود وطبيعة دالة المنفعة للمستهلك يمكن استنتاجها فى اختبارات المستهلك الملحوظة بين مختلف مجموعات السلع •

لنفترض أنه يوجد عدد n من السلع وان مجموعة محدده من اسعار $p_1^0, p_2^0, \ldots, p_n^0$. نرمز لها بالرمز $\mathbf{p}^0$ وان الكميات المطابقة والتى اشتراها المستهلك يرمز لها بالرمز $\mathbf{q}^0$ ولهذا فان مجموع منصرفات المستهلك هى $\mathbf{p}^0\mathbf{q}^0$ ونعرفها بانها المجموع $\Sigma_{i=1}^n p_i^0 q_i^0$ أفترض وجود مجموعة من السلع البديلة $\mathbf{q}^1$ والتى كان من الممكن للمستهلك شراوءها ولكنه لم يفعل وعليه فان التكلفة الاجمالية للسلع البديلة $\mathbf{q}^1$ بسعر $\mathbf{p}^0$ يجب ان لايتعدى التكلفه الاجمالية للسلع $\mathbf{q}^0$ معنى أن :

$$\mathbf{p}^0\mathbf{q}^1 \leq \mathbf{p}^0\mathbf{q}^0 \qquad (٣ـ١٩)$$

وبما ان q^0 تكون على الاقل ، بغلاء q^1 وبما أن المستهلك رفض اختبار q^1 فـــان مجموعة السلع q^0 تكون " واضحة " وانها مفضلة على q^1 .

البديهية الضعيفة للأفضلية الموضحة : **Weak Axiom of Revealed Preference**

اذا أتضح لنا أن مجموعة السلع q^0 تكون مفضلة على مجموعة السلع q^1 فان المجموعة الأخيرة q^0 لاتكون واضحة ابدا انها مفضلة على q^1 .

والطريقة الوحيدة التى بها يتضح لنا ان q^1 مفضلة على q^0 هى ان يكون المستهلك قد قام بشراء q^1 تحت ظروف اسعار معينة بحيث انه أيضا يستطيع ان يشترى q^0. وبعبارة أخرى ، نقول q^1 تكون" واضحة " انها مفضلة على q^0 اذا كان :

$$p^1q^0 \leqq p^1q^1 \qquad (٣_٢٠)$$

ولكن البديهة تنص على ان المعادلة (٣_٢٠) لايمكن لها أبدا أن تتحقـــق اذا تحققت المعادلة (٣_١٩) تتطلب عكس ماتتطلبة المعادلة (٣_٢٠) أو أن :

$$p^0q^1 \leqq p^0q^0 \quad \text{تتطلب} \quad p^1q^0 > p^1q^1 \qquad (٣_٢١)$$

البديهية القوية للأفضلية الموضحة : **Strong Axiom of Revealed Preference**

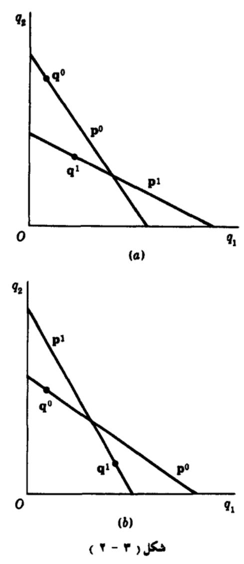
أذا وجدنا أن q^0 مفضله بوضوح على q^1 وهى بدورها مفضله بوضوح على q^2 وهكـــذا حتى نصل الى q^k والتى يجب أن لاتكون مفضله بوضوح على q^0 وهذه البديهية تضمـــن خاصية التعدى transitivity للأفضليه الموضحة ولكنها اقوى شرط التعدى العادى .

لقد رفضنا فى بداية هذا الباب الطريقة القياسية لنظرية المنفعة على أنه لايوجد أى سبب لافتراض أن المستهلك يمتلك مقياس لقياس المنفعة الناتجة من الاستهلاك ولكـن بنفس المنطق يستطيع أى شخص ان يتساءل عما اذا كان للمستهلك منحنيات سواء ولكـن لحسن الحظ يمكن اثبات (١) أن المستهلك الذى يتقيد بالبديهيات السابقة لابـد وأن يكون له منحنيات سواء والتى يمكن رسمها بدرجة عالية من الدقه بمواجهة المســـتهلك بمجموعات مختارة من اسعار مختلفة ومن ثم يلاحظ مشترواته فاذا لم يتقيد المســـتهلك بالبديهيات فيطلق عليه لقب " غير منطقى " "irrational" وفى هذه الحالـــة لا يكـــون للمستهلك منحنيات سواء لتصرفه الغير منطقى ولايمكن تقدير شكل دالة المنفعة عن طريق

---

(١) أثبات هذه النظرية صعب ولـن نذكره هنا ولكن للقارئ مراجعة مقالة هوتاكر تحت عنوان "الافضلية الموضحة ودالة المنفعة " فى دورية *Economica* مجـــلد (١٧) شهر مايو ١٩٥٠ م على صفحات ١٥٩_١٧٤ .

مراقبة مشترياته وتصرفاته ٠



شكل (٣ - ٢)

ولشرح معنى البديهية الضعيفة فى حالة وجود سلعتين نلجأ الى الشكل (٣ـ٢)٠ افترض ان المستهلك يشترى مجموعة من السلع p^0 عند ما تكون الاسعار معطاه بالخطوط المرموز لها بالرمز q^0 إنه كذلك سوف يقوم بشراء الكميه p^1 عند ما تكون الاسعار ممثله بالخطوط q^1.وفى كلا الحالتين على الشكل (٣ـ٢) كان من الممكن للمستهلك شراء q^1 عند ما كانت الاسعار p^0 لأن q^1 تقع تحت الخط p^0 وباعطاء المستهلك هذه الاختبارات من الكميات حسب الاسعار المعطاه ، فان البديهية الضعيفه تنص على ان q^0 غير ممكن الحصول عليها اذا قام المستهلك بشراء q^1 بمعنى أن q^0 لابد وان تكون فوق الخط p^1 والشكل (٣ـ٢ أ) يحقق البديهية الضعيفة ولكن الشكل (٣ـ٢ ب) يناقضها حيث انه فى هذه الحالة (حالة الشكل (٣ـ٢ ب) لايمكن الحصول على منحنيات سواء محدبه بحيث أن المنحنيات يكون ملامسا للخط p^0 عند q^1 ٠

نتيجة التعويض : The Substitution Effect

انه من الممكن باستخدام نظرية الافضلية الواضحة اثبات ان نتيجة التعويض تكـــون سالبه [1] افترض الان ان المستهلك قد اجبر على التحرك على سطح من سطوح السـواء فى حالة من الابعاد n dimensions فعندما تكون الاسعار معطاه بالخطوط p^0 فـــان المستهلك يشترى المجموعة q^0 بدلا من المجموعه q^1 والتى تقع على نفس سطح السواء وبما ان المستهلك لايفرق بين q^0 ، q^1 indifferent وفى نفس الوقت يشترى q^0 فهذا يفيـد بان المجموعة الاخيرة يجب ان تكون اكثر غلاء من الاولى بحيث ان :

$$p^0q^0 \leqq p^0q^1 \qquad (٣_٢٢)$$

فالمجموعة q^1 اشتريت عندما كانت الاسعار p^1 وعليه فان هذا يتطلب بان q^0 يجب ان لاتكون ارخص من q^1 وعندما تكون الاسعار p^1 بمعنى ان :

$$p^1q^1 \leqq p^1q^0 \qquad (٣_٢٣)$$

وبتحريك الحدود فى المعادلتين (٣ــ٢٢ و ٣ــ٢٣) الى الجانب الايسر [2] نحصـل على :

$$p^0q^0 - p^0q^1 = p^0(q^0 - q^1) = -p^0(q^1 - q^0) \leqq 0 \qquad (٣_٢٤)$$

$$p^1q^1 - p^1q^0 = p^1(q^1 - q^0) \leqq 0 \qquad (٣_٢٥)$$

وباضافة (٣ــ٢٤) و (٣ــ٢٥) نحصل على :

$$-p^0(q^1 - q^0) + p^1(q^1 - q^0) = (p^1 - p^0)(q^1 - q^0) \leqq 0 \qquad (٣_٢٦)$$

وهذه اللامتساوية inequality تأكد بان مجموع التغيرات فى الكميات مضروبـــا فى المتغيرات المقابلة فى الاسعار لايكون موجبا اذا تحرك المستهلك على منحنى السـواء المعطى • فاذا افترضنا الان ان اسعار المجموعة الاولى فقط من السلع قد تغيـرت وان جميع الاسعار الاخرى بقيت ثابتة ، فان المعادلة (٣ــ٢٦) تصبح

$$(p_1^1 - p_1^0)(q_1^1 - q_1^0) < 0 \qquad (٣_٢٧)$$

وفى هذه الحالة فان اللامتساوية (وخصوصا فى هذة الحالة حيث انه لايدخل عنصر المساواة مع عدم المساواة) فى (٣ــ٢٧) يجب وان تتحقق بسبب الافتراض بان التغيـر

---

(١) وهذه فقط واحده من عدة نظريات كان من الممكن استنباطها من هذه النظرية وعلى سبيل المثال لاالحصر (١) دوال الطلب المتجانسة من الدرجة صفر بالنسبـــه للاسعار والدخول (راجع الجزء ٢ــ٣)(٢) المساواة فى حالة نتائج التعويـض المتداخلة (راجع الجزء ٢ــ٥) •
لمزيد من المعلومات عن هذه المواضيع راجع كتاب بول ساملسن : اسس التحليـل الاقتصادى " على الصفحات ١١١ــ١١٢ وكذلك راجع كتاب هيكز " مراجعة لنظريات الطلب على الصفحه ١٢٧ •

(٢) الحد $q^0 - q^1$ يرمز الى عدد من الفروقات بحيث ان $q_1^0 - q_1^1, q_2^0 - q_2^1, \ldots, q_n^0 - q_n^1$.

فى الاسعار لايكون مساويا للصفر وأن q^1 و q^0 يمثلان كميتان مميزتان distinct بمعنى ان السعر فى هذة الحالة يمثل دالة طلب ذات قيمة فردية فاذا أزداد السعر فان الكميه المشتراه سوف تنقص والعكس صحيح وهذا يثبت سلبية نتيجة التعويض ٠

٣ - ٦ السلع المركبة : COMPOSITE COMMODITIES

تنص نظرية السلعة المركبه على انه اذا كانت أسعار مجموعة عدد m من السلع (بحيث ان $(<n)$) دائمة التغير بنفس النسبه ٠

وفى فضاء السلع ذو الابعاد n فان الطلب الاجمالى aggregate demand للسلع وعددها m سلعة يعتبر فى تصرفه كما لو كان لسلعه واحدة ٠

وهذه النظريه [1] تسمح بتبسيطات عديدة فى مجالات عدة من خلال التقليص فى عدد السلع تحت الدراسة ٠

مثال : فى حالة وجود سلعتين بحيث أن سعر واحدة منهما فقط هو الذى يتغير بينما سعر السلعة الاخرى يبقى ثابتا يمكن أن يمثل حالة وجود n من السلع بحيث ان سعر واحدة من هذه السلع فقط هو الذى يتغير ٠

ويمكن الحصول على نمط بديل لمعادلة سلتزكى (وهى المعادلة ٢ــ٣٧) بضرب طرفى المعادلة فى p_ip_j لنحصل على :

$$p_ip_j \frac{\partial q_i}{\partial p_j} = p_ip_jS_{ij} - p_ip_jq_j \left(\frac{\partial q_i}{\partial y}\right)_{\text{prices=const}} \qquad (٣ــ٢٨)$$

لأن :

$$p_ip_j \frac{\partial q_i}{\partial p_j} = p_iq_i \left(\frac{p_j}{q_i}\frac{\partial q_i}{\partial p_j}\right) = p_iq_i\varepsilon_{ij}$$

بحيث ان ε_{ij} تمثل مرونه الطلب للسلعة Q_i بالنسبه للسعر p_j بينما يمثل الجانب الايسر للمعادله (٣ــ٢٨) لقيمة التغير فى الطلب للسلعة i نتيجة للتغير النسبى المعطى فى السعر p_j ٠

ولنفترض أن اسعار جميع السلع فى المجموعة المركبه من السلع ترتفع بنفس النسبه ، ففى هذه الحالة يمكن الحصول على قيمة زيادة الطلب بتجميع summing معادله (٣ــ٢٨)

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m} p_ip_j \frac{\partial q_i}{\partial p_j} = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m} p_ip_jS_{ij} - \sum_{j=1}^{m} p_jq_j \sum_{i=1}^{m} p_i \left(\frac{\partial q_i}{\partial y}\right)_{\text{الاسعار = ثابته}}$$

وهذه المعادله تأخذ نفس نمط المعادله (٣ــ٢٨) ويمكن اثبات ان حد التعويض فى المعادله (٣ــ٢٩) يكون سالبا ومن شروط شبه ــ التقعر المنضبط المعطاه فى الجزء فى نهاية الكتاب [2] نحصل على :

---

(١) تتبع هذه المناقشه كتاب هيكز "القيمة ورأس المال" على الصفحات ٣١٢ــ٣١٣

(٢) راجع كتاب هيكز المشار اليه سابقا ٠

$$\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{m} k_i k_j \frac{\mathscr{D}_{ij}}{\mathscr{D}} < 0$$

لجميع قيم k_i و k_j التى لاتساوى صفرا بحيث أن $\mathscr{D}$ تمثل محددة هيسيان المناسبه لهذه الحالة ، وان $\mathscr{D}_{ij}$ تمثل العوامل المرافقة لهذه المحدده فاذا افترضنا ان $k_i = p_i$ وان $k_j = \lambda p_j$ مع العلم بأن $S_{ij} = \mathscr{D}_{ij}\lambda/\mathscr{D}$.

بحيث أن

$$\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{m} p_i p_j S_{ij} < 0$$

والتى تثبت ان حد التعويض فى المعادله (٣ـ٢٩) يكون سالبا •

من المعادله (٢ـ٤٣) حيث ان : $\Sigma_{i=1}^{n} p_j S_{ij} = 0,$ نجد أن :

$$\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=m+1}^{n} p_j p_i S_{ij} > 0$$

نجد أن اجمالى السلع (ومن الممكن ان يكون هناك سلعة واحدة فقط) خــــارج مجموعة السلع المركبه يتصرف على اساس انها سلع تبادليه substitute اذا اعطينـــا تغيرات نسبيه لاسعار السلعة المركبه •

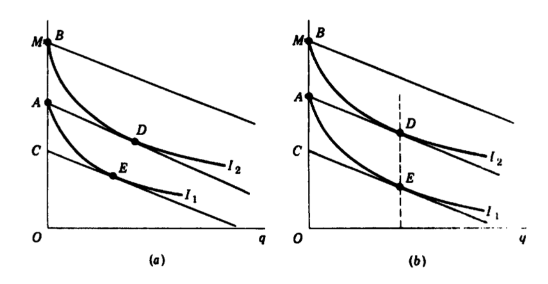
٣ - ٧ فائض المستهلك : CONSUMER'S SURPLUS

وان المستهلك عادة يدفع قيمة اقل من اجل سلعة عن القيمة الاكثر والتى من المفروض ان يدفع بدلا من التخلى عن استهلاكها ولقد اقترح مقاييس عدة لقياس مثل هذا الفائض للمستهلك ونستعرض ، هنا ثلاثة منها والتركيز هنا محددا علـى اعتبار السلعة تحت البحث وسلعة اخرى مركبه تسمى " النقود " على اعتبار ان الكميات المستهلكه تمثـل التقنية والكميه M على التوالى • فاذا افترضنا ان المسافه OA فى السطر (٣ـ٣أ) تمثل دخل المستهلك ، فانه يحقق حل عند التلامس عند نقطة D على منحنى السواء I_2 اما اذا لم يستطع المستهلك ان يستهلك الكميه Q فانه سوف يكون عند نقطه A علـى منحنى السواء الادنى I_1 وسوف يحتاج الى زيادة فى الدخل مقدارها AB من الريالات للمحافظه على مستوى الاستهلاك فى نطاق منحنى السواء I_2 بدلا من I_1.

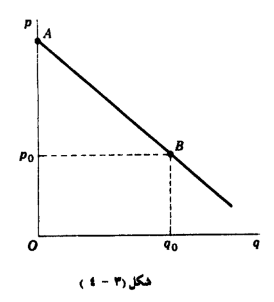
ونرمز لهذه الزياده والتى تسمى تغير (او اختلاف) الدخل التعويضـــــى *compensating income variation* بالحرف c والتى تمدنا بمقياس لفائض المستهلك •

فالمستهلك على استعداد للتنازل عن مبلغ وقدره AC من الريالات من دخله عن ان يفقد الفرصه لاستهلاك السلعه Q حسب الاسعار المعطاه • فاستهلاك المستهـــلك

يكون عند النقطه E. عندما يكون دخله OC والتى هى على نفس منحنى السواء مثل A ونرمز للكميه المطابقه للمسافه AC والتى تسمى تغير (او اختلاف) الدخـــــل المكافىء *equivalent income variation* بالرمز e والتى تمدنا بمقياس بديل لفائض المستهلـــك .
والمقياس الثالث نتحصل عليه عن طريق منحنى الطلب فى الشكل (٣ــ٤) لمجموعه السعر والكميه الممثله بالمقدار p_0q_0 وهى تساوى المساحه ABp_0 والتى تمثل الفرق بين المساحه الواقعه تحت منحنى الطلب $(OABq_0)$ ومنصرفات المستهلك (Op_0Bq_0) والتى نرمز لها بالرمز s.



شكل (٣ - ٣)



شكل (٣ - ٤)

ومن الممكن اثبات ان $c \geqq s \geqq e.\dagger$[١] فاللامتسويات (بدون علامه التساوى معهـــا) تتحقق فى الحاله المعروضه فى الشكل (٣ـ١٣) بسبب نتيجة الدخل income effect (راجع الجزء ٢ـ٥) فاذا كان المستهلك ان يدفع اكثر لاستهلاك سلعة ما فان الطلب على هذه السلعه من قبل المستهلك سوف ينخفض بسبب انخفاض دخلها الفعلى وسوف تزيد المساحه تحت منحنى الطلب عن الكمية التى سوف يدفعها المستهلك عن انه يتنازل عن استهلاك هذه السلعة[٢] فشكل (٣ـ٣ ب) يصور الحاله التى يكون فيها نتيجـه الدخل مساويه للصفر فى كل الاحوال • فالخط العمودى المسار بنقطتى D و E يوصل النقاط التى لها نفس RCS ومنحنيات السواء تكون " متوازيه " مع الاحتفاظ بمسافـة عموديه ثابته بين كل زوج من منحنيات السواء وفى هذه الحاله تكون $AB = AC$ ، وتكون الثلاثه مقاييس لفائض المستهلك متساويه •

ومن الممكن استخدام نظرية الازدواجيه Duality theory (راجع الجزء ٣ـ٤) للحصول على علاوة فى فائض المستهلك عندما تتغير اسعار السلعه فاذا افترضنا ان اسعار عدد n من السلع هى $p_1^0, \ldots, p_n^0$ افترضنا كذلك ان y^0 تمثل دخل المستهلك فان دالة المنفعه الغير مباشرة تكون $g(v_1^0, \ldots, v_n^0) \equiv U^0$ حيث ان $v_i^0 = p_i^0/y_i^0$ وان $i = 1, \ldots, n,$ وان دالة المنصرفات تكون $E(p_1^0, \ldots, p_n^0, U^0) = y^0$

فاذا تغير p_1^0 الى p_1 فان $E(p_1, p_2^0, \ldots, p_n^0, U^0) = y^0 + c$

حيث ان c تمثل الاختلاف التعويضى وان :

$$c = E(p_1, p_2^0, \ldots, p_n^0, U^0) - E(p_1^0, \ldots, p_n^0, U^0)$$

فاذا عرفنا $p_1 = p_1^0 + \Delta p_1$ واستخدمنا تعريف الاشتقاق الجزئى، فان :

$$c = \frac{\partial E(p_1^0 + \theta\Delta p_1, p_2^0, \ldots, p_n^0, U^0)}{\partial p_1}\Delta p_1$$

لبعض قيم $0 < \theta < 1$ ومن منطوق نظرية شيفارد التمهيديه Shephard's lemma فان الاشتقـــاق الجزئى $\partial E/\partial p_1$ يكون هو دالة الطلب التعويضيه $q_1(p_1^0 + \theta\Delta p_1, p_2^0, \ldots,$ $p_n^0, U^0)$ ويتبع من منطوق نظريه متوسط القيمة للتكامل mean value theorem راجع الجزء A-4) ان :

$$c = \int_{p_1^0}^{p_1} q_1(p_1^0, \ldots, p_n^0, U^0)\, dp_1 \qquad (٣٠ـ٣)$$

وبهذا يمكن تقريب قيمة علاوة فائض المستهلك بالمساحه بين السعرين الواقعين علــى الجهه اليسرى لدالة الطلب التعويضيه (عمليا ، نهمل الفرق بين دوال الطلب العاديه والتعويضيه) فالمساحه المطابقه فى الشكل (٣ـ٤) هى p_0pCB فاذا كانت p هــى

---

(١) راجع مقاله ويليق Willig, تحت عنوان " فائض المستهلك بدون اعتذار " "Consumer's Surplus without Apology," والمنشوره فى دوريه *American Economic Review* المجلد ٦٦ (شهر سبتمبر عام ١٩٧٦) صفحات ٥٨٩ ـ ٥٩٧ •

(٢) سوف لا نتعرض للسلع الادنى Inferior goods فى هذه المناقشه •

السعر الذى يكون الطلب عنده يساوى صفرا فان علاوة الفائض (والممثله فى المعادلـــة ٣ـــ٣٠) تنطبق على المثلث ABp_0 والذى يمكن اعادة كتابته كما يلى :

$$c = \int_0^{q_0} \psi(q)\, dq - p_0 q_0$$

بحيث ان $\psi(q)$ تمثل معكوس دالة الطلب ، وان q_0 تمثل الكمية المطلوبه عندما يكـــون السعر p_0 .

مثال : افترض ان دالة المنفعه هى $U = q^{0.5} + 2M$. فالقارىء يمكن ان يتحقق مـــن ان منحنى الطلب هو $q = 1/(16p)^2$ وان معكوس منحنى الطلب هو $p = 1/(4\sqrt{q})$. فاذا كانـــت $p = 0.05$ وان $q = 25$ فان فائض المستهلك يكون :

$$s = \int_0^{25} \frac{1}{4\sqrt{q}}\, dq - pq = 2.50 - 1.25 = 1.25$$

وبتقسيم نتيجة الدخل من المعادله (٢ـــ٣١) نحصل على

$$\frac{\partial q}{\partial y} = \frac{f_{12} - pf_{22}}{\mathscr{D}}$$

حيث ان الرقم السفلى (١) يمثل Q وان الرقم السلفى 2 يمثل النقود وان p يمثـــل سعر Q وبما ان الاشتقاقات الثانيه second derivatives لدالة المنفعه تكون مستقــلة عن p فان نتيجه الدخل المساويه للصفر فى كل مكان تتطلب ان يكون $f_{12} = f_{22} = 0$ فى كل مكان • وبما ان دالة المنفعة تحقق ايضا شرط شبه ــ التقعر المنضبط فى المعادله (٢ـــ٥) فان $f_{11} < 0$ وهذا يعنى ان المنفعه الحديه marginal utility للسلعه Q فـــى انخفاض ويتبع من هذا ان دالة المنفعة يجب وان تكون قابله للجمع بشده strongly additive على النمط التالى :

$$U = f(q) + kM$$

حيث ان k تمثل المنفعه الحديثه الثابته للنقود constant marginal utility of money وفكرة مارشال Marshal عن المنفعه الحديه الثابته للنقود تكون مطابقه الى الفكـــــره الحديثه عن نتيجة الدخل الصفريه zero-income effect وتكشف شروط الدرجه الاولـــى للحصول على الحد الاعلى للمنفعه عن ان معكوس منحنى الطلب المطابق للسلعه هو $p = f'(q)/k$. ولا يحتاج لتطبيق فائض المستهلك على اساس التطبيق الكلى او عدمه • فالتحاليل التى تستخدم فيها فكرة الزيادة" In crement تكون شائعه الاستخدام ، وفى الحقيقة فانهـــا مهمة جدا لمعكوس دوال الطلب مثل $p = q^{-a}$ والتى لا تعرف عند $q = 0$ •

مثال : افترض ان المستهلك اكتسب فائضا من انخفاض فى الاسعار من p_0 الى p_1 مع زيادة فى الكميات من q_0 الى q_1 فالتغير فى فائض المستهلك يكون :

$$\Delta s = \int_{q_0}^{q_1} \psi(q)\, dq - (p_1 q_1 - p_0 q_0)$$

فاذا عرضنا عن $\psi(q) = q^{-0.5}$ وان $p_0 = 0.25$ وان $p_1 = 0.20$ فان القارىء يستطيع ان يحقق بان $\Delta s = 1$ ٠

٣ - ٨ مسألة الاختيار فى حالات المجازفة التى تنطوى على الخطر :

THE PROBLEM OF CHOICE IN SITUATIONS INVOLVING RISK

ان النظريات التقليديه التى تتعلق بسلوك المستهلك لا تأخذ بعين الاعتبار الحالات المتقلبه والغير ثابته uncertain ولقد اثبت العالمان فون نيومان Von Neumann ومور جينستيرن Morgenstern انه تحت ظروف معينـه يمكن تكوين مجموعة من الارقام لشخص معين لاستخدامها للتنبأ برغباته فى الحالات الغير ثابته والمتقلبه ولقد تركزت المناقشات العديدة حول نقطة ما اذا كان مؤشر المنفعه utility index ترتيبيا ام مقياسيا ٠
وسوف نوضح ان مؤشرات المنفعه التى قام بها فون نيومان ومورجينستيرن لها بعض الخواص المقياسيه ٠

فالتحاليل السابقه غير حقيقيه لانها تفترض ان المستهلك يقوم بحركات يتبعها نتائج محددة مصمم عليها من قبل المستهلك ومعروفه عنده مسبقا وهذه هى النقطة التى تدعوه الى وصف هذه التحاليل بغير الحقيقه لانه على سبيل المثال ليس كل السيارات التى انتجت من نفس المصنع ونفس الموديل لها نفس الخواص والتصرفات ومن ملاحظة بعض الحوادث تبين ان بعض السيارات التى انتجت وبيعت لا تنطبق عليها المواصفات التى وضعها المصنع نفسه لانتاج هذه السيارات ٠

والمستهلك بالطبع لا يعرف مسبقا بهذا والا فانه سوف يرفض شراء اى سلعه ادنى من المستوى المطلوب ٠ فاذا افترضنا ان A تمثل الحاله التى يعرف فيها المستهلك ان السيارة التى اشتراها مكتمله من جميع الجوانب وانها حسب رغبته وافترض ان B تمثل الحاله التى لا يمتلك فيها المستهلك سيارة وافترض ان C تمثل الحالة التى يمتلك فيها المستهلك سيارة ولكنها دون المطلوب فاذا افترضنا ان المستهلك يفضل الحاله A على الحاله B وكذلك الحاله B على الحالة C [(١)] فاذا وضعنا امام المستهلك الاختيار البديلين الاتيين :

(١) المحافظة على الوضع الراهن وعدم تملك سيارة ابدا فهذا الاختيار له نتيجة مؤكده وهى ان النتيجه الحتميه المتوقعه هى الوحدة (اى انها تساوى واحد) ٠

---

(١) عدم حصول المستهلك على سيارة افضل من حصوله على سيارة لاتنطبق عليها شروط المصنع المنتج بسبب المشاكل والمضايقات والمنصرفات التى سوف يتحملها المستهلك فى سبيل المحافظة على هذه السياره ٠

(٢) الحصول على ورقة يانصيب اما بالحصول على سيارة صالحه وتنطبق عليها كـل المواصفات (وهذا هو البديل A او الحصول على سيارة لا تنطبق عليها كـل المواصفات (وهذا هو البديل C) فالمستهلك فى هذه الحاله يمكن لـه ان يفضل المحافظة على دخله (النقود) بدون التعرض لاى مخاطر ، او انه يفضل الحصول على ورقة اليانصيب وان يتحمل مسئولية النتيجة الغير مؤكدة او انـه لا يفرق بين هذه الحالات فالقرار الاخير للمستهلك فى اختيار ايا مـن البديلات يعتمد على فرص الربح او الخسارة بالنسبه لليانصيب •

فاذا كان احتمال البديل C عالى جدا فان المستهلك فى هذه الحاله يمكـن ان يفضل المحافظة على دخله بكل تاكيد ، اما اذا كان احتمال البديل A عالى جـدا فانه من الممكن للمستهلك ان يفضل اليانصيب • فالارقام الثلاثية(P, A, B)تمثل يانصيب مقدما النتيجه A باحتمال$1 > P > 0$ والنتيجه B باحتمال $1-P$.

البديهـات : The Axioms

من الممكن ايجاد مؤشر للمنفعه يستخدم للتنبوء باختيار المستهلك فى الحـالات الغير مؤكدة اذا التزم المستهلك بالبديهيات الخمس التاليه :

بديهية الترتيب المتكامل : Complete-ordering axiom

للبديلان A و B واحد فقط من الاتى لابد وان يتحقق بفضل المستهلك A على B او B على A او انه لايفرق بينهما • وتقويمه لهذه البديلات يخضـع لقاعدة التعدى transitive والتى تنص على اذا كان المستهلك يفضل A على B وانه كذلك يفضل B على C فاذا هو يفضل A على C •

بديهة الاتصـال : Continuity axiom

افترض ان A مفضله على B وان B مفضله على C فالبديهيه تؤكد انه يوجد بعض الاحتمالات P، $0 < P < 1$ بحيث ان المستـهلك لا يفرق بين ناتج B بالتاكيد وبين ورقـه يانصيب (P, A, C) .

بديهية الاستقلال : Independence axiom

افترض ان المستهلك لا يفرق بين A و B وان C يكون اى ناتج outcome فاذا كانت ورقة

يانصيب L_1 تعطى الفرصه للناتج B والناتج C باحتمال P ، $1-P$ بالترتيب وان ورقة يانصيب اخرى L_2 تعطى الفرصه للناتج B والناتج C بنفس الاحتمال $P, 1-P$ فالمستهلك سوف لا يفرق بين ورقتى اليانصيب وبالمثل فاذا كان المستهلك يفضل A على B فانه سوف يفضل L_1 على L_2 ٠

بديهية عدم تساوى الاحتمالات : Unequal-probability axiom

افترض ان المستهلك يفضل A على B فاذا وضعنا $L_1 = (P_1, A, B)$ ووضعنا $L_2 = (P_2, A, B)$ فان المستهلك سوف يفضل L_2 على L_1 اذا وفقط اذا كان $P_2 > P_1$ if and only if ٠

بديهية اليانصيب المركب : Compound-lottery axiom

افترض ان $L_1 = (P_1, A, B)$ و $L_2 = (P_2, L_3, L_4)$ بحيث ان $L_3 = (P_3, A, B)$ وان $L_4 = (P_4, A, B)$ يكونا يانصيب مركب وجوائزه عباره عن تذاكر اليانصيف ٠ فنقول ان L_2 مكافئه لـ L_1 اذا كانت :

$$P_1 = P_2P_3 + (1 - P_2)P_4.$$

فاذا اعطينا L_2 فان احتمال الحصول على L_3 يكون P_2 وبالتالى فان احتمال الحصول على A من خلال L_2 يكون P_2P_3 وبنفس الطريقة ، فان احتمال الحصول على L_4 يكون $(1 - P_2)$ وان احتمال الحصول على A من خلال L_4 يكون $(1 - P_2)P_4$ فاحتمال الحصول على A من خلال L_2 يكون مجموع الاحتمالين فالسمتهلك يقيم اوراق اليانصيب بدلالة احتمالات الحصول على الجوائز ، وليس بدلالة عدد مرات تعرضه لفرص الفوز الاليه ٠

وهذه البديهيات تكون عمومية وانه من الصعب معارضتها على اساس انها تضع قيود غير معقولة على سلوك المستهلك وعلى كل حال ، فانها تلغى بعض انواع من سلوك المستهلك المقبوله ٠ افترض وجود شخص ما بحيث انه يحقق منفعه من قيامه بعمليات المراهنه gambling لغرض المراهنه فقط لاغير لذلك فانه من المحتمل عدم وجود P عدا $P = 1$ و $P = 0$ لمثل هذا الانسان ، بحيث انه لايفرق بين الناتج B بالتأكيد ونتائج اخرى غير مؤكده مكونه من A و C وعلى هذا فان هذا الشخص يفضل دائما ان يراهن ٠ فاذا كان الشخص يخشى من المراهنه فانه يفضل دائما الشئ الاكيد على الشئ الغير اكيد ٠ ولكن هذا النوع من السلوك ، الغى بسبب وجود بديهية الاتصال وكذلك بديهية اليانصيب المركب٠

ولقد وضعت البديهيات السابقة لتغطى الحالات التى يوجد فيها ناتجان فقط ولكن اذا افترضنا ان بديهيات التزاوج pair-wise axioms تتحقق فان التحاليل السابقه يمكن امتدادها بسهولة لتغطى اى عدد من النتائج outcomes فاذا افترضنا ان :

$$L = (P_1, \ldots, P_n, A_1, \ldots, A_n)$$

ترمز الى اليانصيب الذى له n من النتائج بحيث ان $0 < P_i < 1$ تمثل احتمال الناتج A_i وكذلك $\Sigma_{i=1}^{n} P_i = 1$.

المنفعة المتوقعة : Expected Utility

افترض وجود مؤشر للمنفعه بحيث انه يتقيد بالبديهيات الخمس السابقه فان المنفعه المتوقعه لليانصيب $L = (P, A, B)$ الذى يحتوى على ناتجين، فقط تكون :

$$E[U(L)] = PU(A) + (1-P)U(B) \qquad (٣١\text{—}٣)$$

فاذا افترضنا اليانصيب $L_1 = (P_1, A_1, A_2)$ واليانصيب $L_2 = (P_2, A_3, A_4)$ فان نظريه المنفعه المتوقعه تنص على انه اذا كانت L_1 مفضله على L_2 فان $E[U(L_1)] > E[U(L_2)]$ واهمية هذه النظريه هو ان الحالات الغير مؤكده يمكن تحليلها عن طريق الحصول على الحد الاعلى للمنفعه المتوقعه maximization of expected utility .

واثبات هذه النظريه غير معقد وبسيط فاذا اخترنا نتائج بحيث ان B وهى الافضل والاحسن ، تكون مفضله على جميع النتائج الاخرى المعروضه وان W وهى الاسوء تكون ادنى من جميع النتائج الاخرى المعروضه ، فانه باستخدام بديهية الاتصال نجد انه يوجد Q_i بحيث انه لافرق بين A_i وكذلك (Q_i, B, W) $(i = 1, \ldots, 4)$. وعليه فان L_1 و L_2 يكونا مطابقتين (بمعنى ان لهما نفس المنفعه المتوقعه) لليانصيبين (Z_1, B, W) وكذلك (Z_2, B, W) على الترتيب بحيث ان $Z_1 = P_1Q_1 + (1-P_1)Q_2$ وكذلك $Z_2 = P_2Q_3 + (1-P_2)Q_4$ ولكن بالافتراض فان L_1 تكون مفضله على L_2 وبالتالى فانه باستخدام بديهيه تساوى الاحتمالات $Z_1 > Z_2$ وبما ان الاصل ووحدة المقياس اختيرتا اعتباطا لمؤشرات المنفعه فاننا نفترض ان $U(B) = 1$ وان $U(W) = 0$ والان فان $E[U(L_1)] = Z_1$ وان $E[U(L_2)] = Z_2$ وبهذا نثبت النظريه • وحيث اننا اثبتنا فى الجزء ٢—٢ ان اى تحويله مطرده monotonic موجبه لدالة المنفعه تترك الترتيب لبعض النتائج المؤكده بدون تغيير ولكن هذه النتيجه لا تتحقق للترتيب فى حالة النتائج الغير مؤكده بالنسبه للمنفعه المتوقعة •

مثال : نفترض ارقام المنفعه التاليه :

$$U(A_1) = 25 \qquad U(A_2) = 64 \qquad U(A_3) = 36 \qquad U(A_4) = 49$$

افترض ، ايضا ان اليانصيب $L_1 = (0.5, A_1, A_2)$ يكون مفضلا على اليانصيب $L_2 = (0.4, A_3, A_4)$ لان $E[U(L_1)] = 44.5 > E[U(L_2)] = 43.8$ ٠
فاذا قمنا بعمل التحويله المفرده $V = U^{0.5}$ فانه الان L_2 تكون مفضله على L_1 لان $E[V(L_1)] = 6.5 < E[V(L_2)] = 6.6$ ٠
ان ترتيبات المنفعه المتوقعه غير قابله للتغيير اذا استخدمنا تحويلات خطيه متزايـــده increasing linear transformations. فاذ افترضنا ان $L_1 = (P_1, A_1, B_1)$ تكون مفضله على $L_2 = (P_2, A_2, B_2)$ بحيث ان :

$$E[U(L_1)] = P_1U(A_1) + (1 - P_1)U(B_1) > P_2U(A_2) + (1 - P_2)U(B_2) = E[U(L_2)]$$

فاذا افترضنا الان ان $V = a + bU$ بحيث ان a و b ثابتان وان $b > 0$ فان المنفعـــــة المتوقعه لـ L_1 للمؤشر V تكون هى التحويله الخطيه للمنفعه المتوقعه للمؤشر U بحيث ان :

$$P_1[a + bU(A_1)] + (1 - P_1)[a + bU(B_1)] = a + bE[U(L_1)]$$

ومن الواضح ان :

$$a + bE[U(L_1)] > a + bE[U(L_2)]$$

وهذا يحقق قابليه عدم التغير تحت استخدام التحويله الخطيه ٠
ومن الممكن استخدام معادله المنفعه المتوقعه لبناء ارقام للمنفعه للمستهلك الذى يتقيد ببديهيات فون نيومان موجينستيرن فاذا وضعنا اعتباطا ارقاما لناتجين مؤكدين همـــا A_1 و A_2 فانه على سبيل المثال ، اذا كانت A_2 مفضله علــى A_1 وانه اذا كانت $U(A_1) = 20$ وان $U(A_2) = 1000$ وأن A_3 هى ايضا احدى النتائج فانه اذا كانت A_3 تقع بين A_1 و A_2 فى ترتيب الافضليات preference ranking فاننا نسأل المستهلك ان يضع قيمة للاحتمال P بحيث انه لايفرق بين A_3 وبين (P, A_1, A_2) فاذا كان $P = 0.8$ فاننا نحصل الى حـــــل المسأله الاتيه :

$$U(A_3) = 0.8U(A_1) + 0.2U(A_2) = 216$$

فاذا كانت A_4 مفضله على جميع البدائل الثلاث السابقه فان منفعتها يمكن الحصول عليها بسؤال المستهلك بان يضع قيمة للاحتمال P بحيث انه لا يفرق بين A_2 وبين (P, A_1, A_4) ٠
فاذا كان $P = 0.6$ فاننا نصل الى حل المسأله الاتيه :

$$1000 = (0.6)(20) + 0.4U(A_4)$$

لقيمة $U(A_4) = 2470$ وتستمر هذه العملية الى ما لا نهاية بدون التوصل الى نتائج مغايرة contradictory مادام المستهلك متقيدا بالبديهيات الخمس السابقه ٠

ونجد ان المنفعات فى تحليل فون نيومن ومور جينستيرن تكون قياسيه cardinal بالمعنى المحدد ولقد تم اشتقاقها من سلوك المستهلك المنطوى على الخطر وانهـــا

صالحه للتنبوء برغبات المستهلك ما دام هذا المستهلك خاضعا لقاعدة الحصول على الحد الاعلى للمنفعه المتوقعه . ولقد تم التوصل اليها عن طريق تقديم رغبات ذات منفعه متبادله mutually exclusive choices وعلى هذا فانه ، من غير جدوى المحاوله للاستنباط من المنفعه الناتجه من الحدث A event والمنفعه الناتجه من الحدث B المنفعه الناتجه من اندماج الحدثين A و B فالمنفعات المناتجه من تحاليل فون نيومان ومور جنيستيرن تمتلك بعض خاصيات ، وليس كل خاصيات المنفعه القياسيه .

فاذا كانت $U(A) = kU(B)$ فانه ليس من المنطق ان تؤكد ان المستهلك يفضل A عدد k من المرات على B ونجد ان نسب المنفعه غير قابله للتغير invariant تحت استخدام التحويلات الخطيه وعامة نجد ان :

$$\frac{U(A)}{U(B)} \neq \frac{a + bU(A)}{a + bU(B)}$$

ولكن على كل حال فان ارقام المنفعه تعطينا مقياسيا مجاليا *interval* scale وان الفروق بينهم ليس لها اى معنى وهذا يتبع من الحقيقه القائله بان من جسامة الفروق النسبيه بين ارقام المنفعه تكون غير قابله للتغير بالنسبة للتحويلات الخطية بحيث ان :

$$V(A) - V(B) = b[U(A) - U(B)]$$

وبالمقارنه مع النظريه التقليديه للمستهلك ، نجد ان اشاره معدل التغير للمنفعة الحدية (وهى الاشتقاق الثانى لدالة المنفعة) يكون لها علاقه مباشرة لانها غير قابلة للتغير بالنسبه للتحويلات الخطيه وهذه النقطة بالذات مهمة جدا بالنسبه للجزء (٣ــ٩) ومثل هذه المقارنات لا تتطلب بأى حال تفضيل المستهلك للفرصه (C على B) على (B على A) لان البديل المختار يجب ان يتحصل على اكبر (او على) رقم من ارقام المنفعه .

ولا تزال مقارنات المنفعه بين الاشخاص Interpersonal comparisons of utility مستحيله ولكن منفعة فون نيومان ومورجنيستيرن تسمح بالاتى :

(١) الترتيب المتكامل للبدائل فى الحالات المشخصه بانها مؤكدة .

(٢) مقارنة الفروق بين المنفعات بسبب الخاصية القياسية السابقة .

(٣) المقدره على حساب المنفعات المتوقعه وهذا جعل من الممكن التعامل مع سلوك المستهلك تحت شروط عدم التأكد .

٣ - ٩ السلوك تحت عوامل عدم التأكد : BEHAVIOR UNDER UNCERTAINTY

لقد عالجنا دالة المنفعه فى اطار عام فى الجزء ٣ــ٨ ولسوف نفترض هنا ان لدالة المنفعه الخواص التاليه :

(١) ان لها المتغير الوحيد وهو الثروة "wealth" والذى يمكن قياسه بالوحدات النقدية.
(٢) تكون دائما متزايده •
(٣) تكون متصله ولها اشتقاقات اولى وثانيه متصله ايضا •

مواقف حيال المجازفة التى تنطوى على الخطر : Attitudes toward Risk

تعرف القيمه المتوقعه لليانصيب (P, W_1, W_2) حيث ان W_i تمثل مستويات الثراء wealth المختلفه بانها مجمل (مجموع) النتائج outcomes كلا مضروبا فى مقدار احتمال حدوثه بحيث ان :

$$E[W] = PW_1 + (1 - P)W_2$$

وتعرف الشخص بانه محايد للمجازفه *risk neutral* بالنسبه ليانصيب ما ، اذا كانت المنفعه الناتجه من القيمه المتوقعه لليانصيب تساوى المنفعه المتوقعه لليانصيب ، بمعنى انه اذا كان :

$$U[PW_1 + (1 - P)W_2] = PU(W_1) + (1 - P)U(W_2) \quad (٣٢\text{–}٣)$$

ومثل هذ الشخص يكون راغبا فقط فى القيم المتوقعه وغير مدركا للمجازفه فهو لا يفرق بين اليانيبان (0.5; 1; 1,000,000) و (0.5; 500,000; 500,001) فاذا كان محايدا للمجازفه حيال جميع اليانصيب فان المعادله (٣–٣٢) تتطلب بان يكون له دالة منفعه خطيه على النمط $U = \alpha + \beta W$ بحيث ان $\beta > 0$ وكل ما يتعلق بالمنفعه والتى تقدمت بالنسبه للحالات المؤكده يمكن تطبيقها على الاشخاص المحايدين للمجازفه والذين يتعرضون لحالات عدم التاكد وكل ما هو ضرورى فى مثل هذه الحاله هو وضع قيم مكان قيم مؤكده •

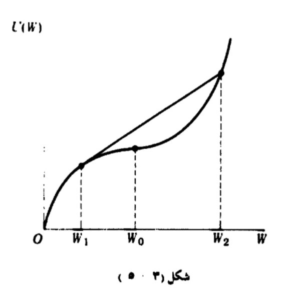
وتعرف الشخص بانه متفادى للمجازفه *risk averter* بالنسبه ليانصيب ما ، اذا كانت المنفعه لقيمتها المتوقعه اكبر من القيمة المتوقعه لمنفعتها بحيث ان :

$$U[PW_1 + (1 - P)W_2] > PU(W_1) + (1 - P)U(W_2)$$

ومثل هذا الشخص يفضل ناتجا مؤكدا على اخر غير مؤكد بنفس القيمه المتوقعه فاذا كانت المعادله (٣–٣٣) صالحه لجميع $1 > P > 0$ وكذلك لجميع W_1 و W_2 ضمن مجال دالة المنفعه ، فان دالة المنفعه تكون محدبه بانضباط خلال مجالها لان المعادله (٣–٣٣) تكون مطابقة لتعريف التقعر المنضبط والمعطى فى الجزء A-2 فاذا كانت $d^2U/dW^2 < 0$, فان دالة المنفعه تكون متقعرة بانضباط وان المستهلك يكون متفاديا للمجازفه .
ولقد بينت الملاحظات السلوكيه وعلم النفس ان معظم الناس يكونون من نوع الاشخاص المتفادين للمجازفه فى اغلب معاملاتهم • وبالرغم من هذا ، فان التحاليل السابقه يمكن لها ان تغطى بالمساواه الاشخاص الذين يفضلون النتائج الغير مؤكده •

ويعتبر الشخص بانه " محبا للمجازفه *risk lover* " بالنسبه ليانصيب ما اذا كانت المنفعه بقيمتها المتوقعه اقل من منفعتها المتوقعه • وفى هذه الحاله فان اللامتساويه فى المعادلة(٣ـ٣٣) تكون مقلوبه والمحب للمجازفه سوف يكون دائما ميالا للمراهنات (المراهنات التى تكون فيها القيمه المتوقعه للربح مساوية للقيمه المتوقعه للخساره) وباتباع نفس النقاش الذى استخدم فى حالة الشخص المتفادى للمجازفه ، فانه اذا كان $d^2U/dW^2 > 0$ فان دالة المنفعه تكون محدبه بانضباط وان المستهلك هو شخص محب للمجازفه •

ومن المحتمل لشخص ما ان يكون متفاديا للمجازفه فى بعض الحالات ومحبا للمجازفه فى حالات اخرى، فاذا اعتبرنا على سبيل المثال شخص ذو دخل ـ منخفض متفاديا للمجازفه فى ، تقريبا جميع معاملاته ماعدا انه سوف يدفع ريالا واحدا لورقة يانصيب بقيمة متوقعه تساوى نصف ريال (مثلا) على ان يكسب ٥٠٠٠٠٠ ريال باحتمال واحد فى المليون • ففى الظاهر ان تصرفاته غير متوافقه ، ولكنها سوف تكون متوافقه اذا كانت دالة المنفعه بالصورة الموضحه فى الشكل (٣ـ٥) حيث ان W_1 تمثل ثروة المستهلك اذا خسر اليانصيب ، وان W_2 تمثل ثروته اذا ربح اليانصيب • فدالة منفعته تكون مقعرة بانضباط



شكل (٣ ـ ٥)

بين $0 \leqq W \leqq W_0$ وتكون محدبه بانضباط بين $W > W_0$ وبالتالى فانه متفاديا للمجازفة فى جميع الحالات الغير مؤكده والتى يكون فيها افضل النتائج ليس اكبر من W_0 ويكون جميع سلوكه الملاحظ فى هذا المدى • والمستهلك مستعدا لدفع مبلغا اضافيا من اجل فرصه ولو نادره للتخلص من حالة الدخل ـ المنخفض •

ان اشارة الاشتقاق الثانى لدالة المنفعه يعطينا مؤشرا لموقف المستهلك بما ان جسامته غير قابله للتغير تحت تحويلات خطيه، فانه لايمكن ان تستخدم لاعطاء اشارات عن مستوى

تغادى المجازفه او عن الافضليه وتعطينا النسبه بين الاشتقاقات الثانيه والاولى مقياسا r لتغادى المجازفه المطلق[1] *absolute risk aversion* على النحو التالى :

$$r = -\frac{U''(W)}{U'(W)} = -\frac{d \ln U'(W)}{dW} \qquad (٣٤_٤)$$

وهذا المقياس يكون موجبا ، سالبا او مساويا للصفر حسب كون المستهلك مغاديا محبا او محايدا حيال المجازفة . فاذا افترضنا ان : $V = a + bU$ بحيث ان $b > 0$ فان :

$$r = -\frac{V''(W)}{V'(W)} = -\frac{bU''(W)}{bU'(W)} = -\frac{U''(W)}{U'(W)}$$

وهذه تثبت لنا قابلية عدم التغير المطلوب .

مثال : اعتبر دالة المنفعة التربيعية (quadratic) $U = W - \alpha W^2$ بحيث ان $\alpha > 0$ وان المجال هو: $0 < W < 1/(2\alpha)$ وهذه الداله تصف سلوك الشخص المتغادى للمجازفة لان $U'' = -2\alpha < 0.$ وتقييم المعادلة (٣٤_٣) نحصل على :

$$r = \frac{2\alpha}{1 - 2\alpha W}$$

بحيث ان $dr/dW = 4\alpha^2/(1-2\alpha W)^2 > 0$ ونجد ان تغادى المستهلك للمجازفة يزداد بزيادة ثروته وفى أغلب الاحيان ، قد يفترض شخص ما عكس هذه الحاله ــ ودالة المنفعه $U = \ln(W + \alpha)$ بحيث ان $\alpha > 0$ تعطى مقياسا منخفضا لتغادى المجازفه .

أعتبر مجموعة دوال المنفعه التى تعطى مقياسا ثابتا لتغادى المجازفه فأذا افترضنا ان $r = c$ واعدنا كتابة المعادله (٣٤_٣) على النحو التالى :

$$\frac{d \ln U'(W)}{dW} = -c$$

وبتكامل Integrating المعادله السابقه بالنسبه W نحصل على :

$$\ln U'(W) = -cW + k_1$$

بحيث ان k_1 تمثل ثابت التكامل constant of integration فأذا أخذنا العدد المقابل للوغاريتم antilog فاننا نحصل على :

$$U'(W) = e^{k_1} e^{-cW}$$

وباخذ التكامل مرة أخرى نحصل على :

$$U(W) = e^{k_1} \int e^{-cW} dW = -\frac{e^{k_1}}{c} e^{-cW} + k_2$$

حيث أن k_2 يمثل ثابت اخر للتكامل . واخيرا نقوم بتطبيق التحويله الخطيه بفرض ان $a = -(k_2 c)/e^{k_1}$ وان $b = c/e^{k_1}$ لنحصل على :

$$V(W) = -e^{-cW}$$

---

(١) يعطينا خارج الضرب rW مقياسا لتغادى المجازفه النسبى *relative risk aversion* .

وهذه المعادله هى نمط عام لدالة المنفعه والتى لها ثابتا مطلقا لتفادى المجازفه

المجازفة والتأمين : Risk and Insurance

افترض أن المستهلك سوف تواجهة مخاطر ومجازفه بفقدان مبلغ وقدره A من الريالات باحتمال وقدرة P اذا حصل له حريق وهذا يكافئ* لليانصيب $(P, W_0 - A, W_0)$ بحيث ان W_0 تمثل ثروة المستهلك قبل الحريق فاذا كان المستهلك يدفع مبلغا وقدرة R من الريالات لشركة التأمين ، والشركة بدورها تعطى المستهلك مبلغا وقدره A من الريالات أذا حصل الحريق وعلى هذا فان المستهلك ضامن ثروة قدرها $W_0 - R$ سواء حدث الحريق أم لم يحدث يمكن الحصول على الحد الاعلى للمبلغ الذى يرغب المستهلك فى دفعه للتأمين بحل المعادله التاليه بقيمه R .

$$U(W_0 - R) = PU(W_0 - A) + (1 - P)U(W_0)$$

ونجد ان القيمة المتوقعة للخسارة من الحريق تساوى PA فاذا كان المستهلك متفاديا للمجازفه ، فأن قيمة الحل لمبلغ R تكون اكبر من PA وسوف يشترى المستهلك التأمين اذا كان سعره لايزيد عن المبلغ R فاذا كان المبلغ أكبر من R فان المستهلك سوف لا يشترى التأمين بالرغم من انه متفاديا للمجازفه او المخاطرة .

وبما ان شركات التأمين ترغب فى الحصول على ارباح بعد تغطية التكلفة ، فانها سوف تحافظ على اسعار التأمين لتكون اعلى من PA ففى السوق التام perfect market نجد أن جميع الاشخاص المحبى للمجازفه ، وجميع الاشخاص المحايدين بالنسبه للمجازفه وبعض الاشخاص المتفادين للمجازفة سوف لا يشترون بوليصة تامين .

مثال : افترض ان دالة المنفعة للمستهلك هى $U = W^{0.5}$ وافترض ايضا ان $W = 90{,}000$ وان $A = 80{,}000$ وان $P = 0.05$ وعليه فاننا نتحصل على :

$$(90{,}000 - R)^{0.5} = 0.95(90{,}000)^{0.5} + 0.05(10{,}000)^{0.5}$$

ونحصل منها على الحل لقيمة R بمقدار $R = 5900$ ونجد ان القيمة المتوقعة للخسارة هى $PA = 4000$ فالمستهلك المتفادى للمجازفة سوف يرغب فى دفع ١٩٠٠ ريال اضافيه ليتحاشى المخاطرة من حدوث الحريق .

وتختلف بوليصة التأمين عن بعضها البعض من عدة نواحى . فالبعض يقم ميزة الخصم deductible بحيث ان الشركة سوف لاتدفع للمستهلك فى حالة تضرره المبلغ D من الريالات الاولى من قيمة الخسارة والبعض الاخر يقدم صيغة المشاركة فى التأمين حيث ان المستهلك سوف يدفع نسبه معينه $1 > \alpha > 0$ من قيمة اى خسارة على المستهلك . تخيل

ان شخصا ما يمتلك سيارة ومعرض للخطر من الحوادث الجانبية باحتمال وقدره P_1 ومعرض للخطر من الحوادث الرئيسية باحتمال وقدره P_2 ولكنه لايحتمل ان يتعرض للاثنين معا (بمعنى: تعرض لحادث جانبي واخر رئيسي معا) فحصيلة الخسارة تكون A و B من الريالات على التوالي بحيث أن $A < B$ فاذا افترضنا ان المستهلك من النوع المتفادى للخطر (المجازفة) وانه لابد وان يختار بين ميزة الخصم او المشاركة في بوليصة التأمين . وافترضنا أيضا ان D و α اختيرت بحيث ان القيمة المتوقعة للخسارة متساوية في كلا الحالتين لبوليصة التأمين (حالة الخصم او حالة المشاركة) وانها كذلك مساوية لقيمة بوليصة التأمين premium و R ولذلك نجد ان لكل حالة :

$$R = P_1(A-D) + P_2(B-D) = P_1(1-\alpha)A + P_2(1-\alpha)B \quad (٣_٣٥)$$

ونجد انه تحت هذه الظروف سوف يلجأ المستهلك لشراء بوليصة التأمين التي تقدم له ميزة الخصم لانها تعطيه منفعة متوقعة عاليه . ويمكن أثبات هذا عن طريق تحقيق اللامتساوية الاتيه :

$$P_1U(W_0-D-R) + P_2U(W_0-D-R) + (1-P_1-P_2)U(W_0-R)$$
$$> P_1U(W_0-\alpha A-R) + P_2U(W_0-\alpha B-R) + (1-P_1-P_2)U(W_0-R)$$

فاذا طرحنا المقدار $(1-P_1-P_2)U(W_0-R)$ من طرفي المعادلة ، ونسمنا الجمع على (P_1+P_2). ثم جمعنا الحدود المتشابهه ، نحصل على :

$$U(W_0-D-R) > Q_1U(W_0-\alpha A-R) + Q_2U(W_0-\alpha B-R) \quad (٣_٣٦)$$

بحيث ان $Q_1 = P_1/(P_1+P_2)$ وكذلك $Q_2 = P_2/(P_1+P_2)$ وبما ان $D = Q_1\alpha A + Q_2\alpha B$ من المعادلة (٣_٣٥) فان اللامتساوية (٣_٣٦) لابد وان تكون صالحه للمستهلك المتفادى للمجازفه لانه من الممكن تفسيرها على انها حاله من المعادله (٣_٣٣) حيث ان منفعة القيمة المتوقعة اكبر من القيمة المتوقعة للمنفعه .

٣ ١٠ ملخص ما سبق : SUMMARY

لقد نوقشت امتدادات لنظرية سلوك المستهلك الاساسيه وكذلك خواص بعض دوال المنفعة المعينة . ووجدنا ان دالة المنفعة الخطيه اللوغاريتمية بمتطلباتها للاستهلاك الادنى انها ولدت دوال للمنصرفات الخطيه قابلة للتعديل حسب التقديرات الاحصائية لمجاهيلها .

وعرفنا دالة المنفعة بانها قابلة للانفصال بشدة اذا كان من الممكن كتابتها كدالة الداله لمستويات الاستهلاك الفردية وان RCS الخاصة بها لزوج من السلع تعتمد اعتمادا مباشرا على مستويات الاستهلاك لهذه السلع . وعرفنا كذلك دالة المنفعة بانها قابلة

للجمع بشدة أذا كان من الممكن كتابتها كمجموع دوال مستويات الاستهلاك الفردية ووجدنا ان قابلية الجمع تكون حاله خاصة من قابلية الانفصال ووجدنا كذلك أن قابلية الجمع تعنى أن المنفعة الحدية لكل سلعة تكون مستقله من مستويات الاستهلاك للسلع الأخرى ٠

وعرفنا دالة المنفعة بانها تالفية أذا كان من الممكن كتابتها على أنها تحويلة طردية موجبه لدالة متجانسة ، ووجدنا ان الدوال المتألفة لها خاصية مهمة وهى ان RCS الخاصه بها تعتمد فقط على النسبه التى تستهلك بها السلع ٠

ان دوال المنفعة الغير مباشرة تعطى مستويات منفعة اكثر رغبة بدلالة الاسعار والدخل يمكن الحصول عليها بتعويض دوال الطلب فى دالة المنفعة المباشرة ٠

ومحايدة روى تربط طلبات السلع باشتقاقات دالة المنفعة الغير مباشرة ونظريات الازدواجية بالاضافة الى محايدة روى ، تربط دوال المنفعة المباشرة والغير مباشرة وهؤلاء يساعدون فى امداد أساس نظرى للعمل الاحصائى ويساعدون ايضا فى السماح بالقيام ببعض التحاليل النظرية بالنسبه لدوال المنفعة الغير مباشرة ٠

ويمكن أعادة صياغة نظرية سلوك المستهلك الاساسيه بدلالة نظرية الافضلية الموضحه والتى لاستخدم حساب التفاضل وتصل الى نتائج تكاد تكون هى نفسها النتائج التى توصلنا أليها بالتحاليل السابقة ٠

وتحصلنا على هذه النتائج بتعريض المستهلك لحالات اسعار ودخل تخيليه ومن ثم ملاحظة تصرفاته ومن هذا يمكن أشتقاق منحنيات السواء ويمكن كذلك التنبوء برغبات مستقبلية على أساس الرغبات الماضية اذا حقق سلوك المستهلك البديهيات الاساسية للافضلية الموضحة ٠

أذا كانت اسعار مجموعه من السلع تتغير دائما بنفس النسبه ، فأن الطلب لهذه المجموعة سوف يتصرف بنفس الطريقة التى يتصرف فيها الطلب لسلعة واحدة فقط ٠ ونظرية السلعة المركبه هذه تعنى ان عدة سلع يمكن اجمالها ومعاملتها على انها سلعة واحدة لعدة تحاليل نظرية ٠ والمستهلك عادة يكسب فائض من أستهلاكة لسلعة ما بالمعنى أنه سوف يدفع اقل من الكمية القصوى التى كان ولابد من ان يدفعها بدل حرمانه من استهلاك هذه السلعة ولقد اقترح مقاييس عديدة نقدية مختلفه لقياس هذا الفائض ٠

وعموما نجد ان هذه المقاييس ليست متساوية فأذا كانت نتيجة الدخل للمستهلك

مساوية لصفر فأن :
(١) المقاييس الرئيسية للفائض تكون متساوية •
(٢) أن فائض المستهلك يساوى المساحة تحت منحنى الطلب ناقصا المنصرفات •
(٣) أن المنفعة الحدية لسلعة مركبة من جميع السلع الاخرى تكون ثابتة •
(٤) أن المنفعة الحدية للسلعة المدروسة تكون دائما متناقصة •

أن طريقة فون نيومان ومور جنيستيرن مهتم بسلوك وتصرفات المستهلك فى حالات توصف بأنها غير مؤكدة فاذا كان سلوك المستهلك يحقق بعض البديهيات الهامه فأنه يمكن أشتقاق دالة المنفعة للمستهلك بتقديم سلسلة من الرغبات له بين نتائج مؤكدة من جهة وناتجين غير مؤكدين تحت مجموعة من الاحتمالات من الجانب الاخر •

وعلى هذا فان دالة المنفعة المشتقه تكون فريدة من نوعها لحد تحويلة خطيه وتقدم لنا ترتيبا للبدائل فى حالات لايدخل فيها عنصر المجازفه او المخاطر •

فالمستهلك يرغب فى الحصول على الحد الاعلى للمنفعة المتوقعة وان دوال المنفعة الخاصة بفون نيومان ومور جينتستيرن تكون قياسية بمعنى انه يمكن ربطها للوصول الى حسبة المنفعات المتوقعة والتى يمكن استخدامها لمقارنة الفروق فى المنفعة •

ومن الممكن أستخدام حسابات المنفعة المتوقعة لتقرير اختبارات المستهلك فى حالات يدخل فيها عنصر المجازفة أو المخاطرة •

وبوجود الثروة كمجهول وحيد فى دالة المنفعة ، فأن المنفعة للقيمة المتوقعة للناتج من حالة عدم تأكد تفوق المنفعة المتوقعة للناتج للمستهلك الذى يتغادى المجازفة او الخطر • بمعنى أن دالة المنفعة للمستهلك تكون مقعرة بانضباط وبنفس الطريقة ، نجد أن محبى المجازفة والمحايدين يمتلكون دوال خطيه ومحدبه بأنتظام للمنفعة حسب الترتيب •

وتعرف المؤشر للمستهلك الذى يتغادى المجازفة مطلقا بانه النسبه بين الاشتقاقات الثانية والاولى لدالة المنفعة وسوف يدفع الاشخاص الذين يرغبون فى تغادى المجازفه قيمة بوليصة تأمين لتحويل نتائج غير مؤكدة ألى نتائج مؤكدة •

EXERCISES

3-1 Which of the following utility functions are (*a*) strongly separable, or (*b*) additive with respect to all variables: $U = (q_1^{1/4} + q_2^{1/2})^{1/2}$; $U = q_1q_2 + q_3q_4$; $U = \beta_1 \ln (q_1 - \gamma_1) + \beta_2 \ln (q_2 - \gamma_2)$; $U = (q_1 + 2q_2 + 3q_3)^{1/4}$. Show for each strongly separable or additive function what the F and f_i functions are.

3-2 Prove that if the consumer is indifferent between commodity bundles $(q_1^0, \ldots, q_n^0)$ and $(q_1^{(1)}, \ldots, q_n^{(1)})$ and has a homothetic utility function, she will also be indifferent between the bundles $(tq_1^0, \ldots, tq_n^0)$ and $(tq_1^{(1)}, \ldots, tq_n^{(1)})$.

3-3 Prove that an additive, strictly quasi-concave utility function is concave.

3-4 Construct an indirect utility function that corresponds to the direct function $U = \alpha \ln q_1 + q_2$. Use Roy's identity to construct demand functions for the two goods. Are these the same as the demand functions derived from the direct utility function?

3-5 A consumer is observed to purchase $q_1 = 20$, $q_2 = 10$ at prices $p_1 = 2$, $p_2 = 6$. She is also observed to purchase $q_1 = 18$, $q_2 = 4$ at the prices $p_1 = 3$, $p_2 = 5$. Is her behavior consistent with the axioms of the theory of revealed preference?

3-6 Let the consumer's utility function be $f(q_1, q_2, q_3) = q_1q_2q_3$, and her budget constraint $y = p_1q_1 + p_2q_2 + p_3q_3$. Consider $q_1 + (p_2/p_1)q_2 = q_c$ as a composite good. Formulate the consumer's optimization problem in terms of q_c and find the demand function for q_c.

3-7 Let the consumer's inverse demand curve be $p = a - bq$ with $a, b > 0$, and assume that a sales tax of $100t$ percent is imposed so that the unit price she pays is increased to $p(1 + t)$. Prove that her loss of consumer's surplus will always exceed the revenue raised by the government through the imposition of the tax.

3-8 A consumer who conforms to the von Neumann–Morgenstern axioms is faced with four situations A, B, C, and D. She prefers A to B, B to C, and C to D. Experimentation reveals that the consumer is indifferent between B and a lottery ticket with probabilities of 0.4 and 0.6 for A and D respectively, and that she is indifferent between C and a lottery ticket with probabilities of 0.2 and 0.8 for B and D respectively. Construct a set of von Neumann–Morgenstern utility numbers for the four situations.

3-9 Show which of the following utility functions exhibit decreasing risk aversion: $U(W) = (W + \alpha)^\beta$, $\alpha \geqq 0$, $0 < \beta < 1$; $U(W) = W$; $U(W) = \ln (W + \alpha)$, $\alpha \geqq 0$; $U(W) = W^3$.

3-10 A consumer who obeys the von Neumann–Morgenstern axioms and has an initial wealth of 160,000 is subject to a fire risk. There is a 5 percent probability of a major fire with a loss of 70,000 and a 5 percent probability of a disastrous fire with a loss of 120,000. Her utility function is $U = W^{0.5}$. She is offered an insurance policy with the deductibility provision that she bear the first 7620 of any fire loss. What is the maximum premium that she is willing to pay for this policy?

3-11 Let a consumer's strictly quasi-concave utility function be $U = f(q) + 3M$ where M is the quantity of a composite commodity with unit price. Assume that her demand function for Q is $q = p^{-\alpha}$ where $\alpha > 0$. Determine $f(q)$ by solving a differential equation formed from the first-order condition for utility maximization.

SELECTED REFERENCES

Arrow, K. J.: *Aspects of the Theory of Risk-Bearing* (Helsinki: Academic Bookstore, 1965). Contains excellent discussions of expected utility maximization, risk aversion, and insurance.

Currie, J. M., J. A. Murphy, and A. Schmitz: "The Concept of Economic Surplus and Its Use in Economic Analysis," *Economic Journal*, vol. 81 (December, 1971), pp. 741–799. A detailed and nonmathematical survey with an extensive bibliography.

Friedman, M., and L. J. Savage: "The Utility Analysis of Choices Involving Risk," *Journal of Political Economy*, vol. 56 (August, 1948), pp. 279–304. Also reprinted in American Economic Association, *Readings in Price Theory* (Homewood, Ill.: Irwin, 1952), pp. 57–96. An analysis of situations with uncertain outcomes leading to a hypothesis concerning utility as a function of income. Simple mathematics.

Hicks, J. R.: *Value and Capital* (2d ed., Oxford: Clarendon Press, 1946). An analysis of composite commodities is contained in the appendix.

———: *A Revision of Demand Theory* (Oxford: Clarendon Press, 1956). A discussion of consumer theory relying on the theory of revealed preference and employing little mathematics.

Houthakker, H. S.: "Revealed Preference and the Utility Function," *Economica*, n.s., vol. 17 (May, 1950), pp. 159–174. Contains a proof of the existence of indifference curves for consumers who satisfy the axioms of revealed-preference theory.

Katzner, D. W.: *Static Demand Theory* (New York: Macmillan, 1970). A modern and abstract treatment; illuminating but not easy.

Lau, L. J.: "Duality and the Structure of Utility Functions," *Journal of Economic Theory*, vol. 1 (December, 1969), pp. 374–396. An extensive treatment of the relations between direct and indirect utility functions employing the calculus.

Pratt, J. W.: "Risk Aversion in the Small and in the Large," *Econometrica*, vol. 32 (January–April, 1964), pp. 122–136. Introduces the concepts of relative and absolute risk aversion in mathematical terms.

Richter, M. K.: "Revealed Preference Theory," *Econometrica*, vol. 34 (July, 1966), pp. 635–645. A modern approach using advanced mathematics.

Samuelson, Paul A.: *Foundations of Economic Analysis* (Cambridge, Mass.: Harvard, 1948). Composite commodities, revealed preference theory, and consumer surplus are treated in chaps. VI and VII.

von Neumann, J., and O. Morgenstern: *Theory of Games and Economic Behavior* (2d ed., Princeton, N. J.: Princeton University Press, 1947). Chap. 1 and an appendix contain the original statement of the von Neumann–Morgenstern approach.

Willig, R. D.: "Consumer's Surplus without Apology," *American Economic Review*, vol. 66 (September, 1976), pp. 589–597. A sophisticated justification of using the concept of consumer's surplus in practical situations.

الفصل الرابع

نظريات المؤسسات والشركات التجارية والمالية
THE THEORY QF THE FIRM

تعرف المؤسسه او الشركة بانها الوحدة التقنية التى بداخلها يتم انتاج السلع والتى يكون لاصحابها (المالك والمدير) entrepreneur (owner and manager) حق اتخاذ القرار بمقدار ونوعيته السلع المنتجة ولهم الربح وعليهم الخسارة الناتجة من اتخاذ هذه القرارات فصاحب المؤسسة يقوم بتحويل المواد الاوليه الداخلة inputs الى مواد انتاجية خارجة outputs خاضعة للقواعد التقنية المنصوص عليها فى دالة الانتاج production function فالفرق بين ايراداته revenue من بيع المنتجات وبين تكلفة cost الانتاج يساوى ربحه profit اذا كان الفرق موجبا أو خسارته اذا كان الفرق سالبا ·

وتعطى دالة الانتاج الخاصه بصاحب المؤسسه تعبيرا رياضيا يبين العلاقه بين كميات المواد الاوليه الداخلة للانتاج inputs وبين الكميات المنتجه وهذه العلاقه تكون علاقة عامة اما اذا كانت دالة الانتاج دالة معينه فانها يمكن ان تعطى بنقطه منفرده ، او داله مفرده متصله او غير متصله ، او مجموعه من المعادلات· وهذا الباب مقصورا على دوال الانتاج المعطاه بدالة متصله مفرده ويكون لها اشتقاقات جزئيه اوليه وثانيه متصله ·وتبدء المناقشه بحالات بسيطه نسبيا بحيث ان اثنان من الدواخل inputs قد مزجتا لانتاج منتج واحد output ومن ثم توسع المناقشه لتشمل حالات اكثر عمومية ·

ونعرف الدواخل (او المواد الاوليه الداخله) inputs بانها تكون اى بضاعه او سلعه good او خدمه service والتى تشارك فى انتاج منتج ما وسوف يستخدم صاحب المؤسسة عدة دواخل مختلفه لانتاج منتج ما ، وبعض هذه الدواخل قد تكون منتجات من مؤسسات اخرى · فعلى سبيل المثال ، الحديد والصلب هو واحد من الدواخل فى انتاج السيارات وهو فى نفس الوقت منتج بالنسبه لمؤسسة الحديد والصلب وقد تكون بعض هذه الدواخل ، مثل العمل labor والارض land والثروات المعدنيه غير منتجه على الاطلاق ولفتره معينه من الزمن ، قد تصنف هذه الدواخل على انها اما

ثابته fixed او متغيره variable فالدواخل الثابته ضروريه جدا للانتاج ولكن كمياتها غير قابله للتغير بالنسبه لكميات المنتجات المصنعه وان اسعار هذه الدواخل يتحملها صاحب المؤسسة بغض النظر عن قرارته بالحصول على الحد الاعلى من الربح في الزمن القصير short-run والكميه الضروريه للدواخل المتغيره تعتمد على كميه المنتج المصنوع والتمييز بين الدواخل الثابته والمتغيره تعتمد على العنصر الزمني temporal بمعنى ان الدواخل التي تكون ثابته لفتره من الزمن قد تكون متغيره لفتره زمنيه اطول فصاحب مصنع مكائن قد يتطلب فتره زمنيه مقدارها ثلاثة اشهر من اجل شراء مكائن اخرى جديده او قد اجل ان يتخلص من المكائن الحاليه وسوف يعتبر المكائن كدواخل ثابته في تخطيطه للانتاج لفترة شهر واحد ويعتبرها دواخل متغيره في تخطيطه للانتاج لفترة سنه واحدة • فكل الدواخل تعتبر متغيره اذا اعطينا فتره زمنيه طويله •

ان التحاليل الجوهريه للمؤسسه تكون مشابهة للتحاليل الاساسيه للمستهلك من عدة نواحي فالمستهلك يشترى السلع التي بها ينتج اقتناعه وراحته ورضاه وصاحب المصنع من الناحية الاخرى يشترى الدواخل التي بها ينتج السلع • المستهلك يمتلك دالة منفعه والمؤسسه تمتلك دالة انتاج • ميزانيه المستهلك عبارة عن معادلة تعبر عن دالة خطيه بالنسبه لكميات السلع التي يشتريها بينما معادلة التكلفة cost equation للمؤسسة المنافسه تكون دالة خطيه بالنسبه لكميات الدواخل التي تشتريها المؤسسه •

اما الفروقات بين التحاليل للمستهلك والمؤسسة فانها غير واضحه كالمتشابهات فدالة المنفعه تكون دالة ذاتيه وليس لها مقياس معياري، بينما دالة الانتاج تكون دالة موضوعيه ويمكن مقياس كميه الانتاج للمؤسسه والتي من الممكن ان تنتج اكثر من منتج واحد • وعمليه الحصول على الحد الاعلى لصاحب المؤسسه قد تتعدى العمليه نفسها بالنسبه للمستهلك • فالمستهلك العاقل يحاول الحصول على الحد الاعلى من المنفعه حسب الدخل المعطى له بينما صاحب المؤسسه يحاول الحصول على الحد الاعلى في الانتاج حسب مستوى التكلفه المعطى له ولكنه في بعض الاحيان قد يعتبر ان التكلفه تكون متغيره • وقد يرغب في الحصول على الحد الادنى للتكلفه لانتاج مستوى معين من منتجاته أو أنه يحاول حصول على الحد الاعلى للربح الذي يتحصل عليه من الانتاج وبيع السلع•

سوف نناقش في الاجزاء الثلاثة الاولى من هذا الباب مشاكل صاحب المؤسسه الذي يستخدم اثنان من الدواخل two inputs لانتاج منتج واحد فقط output • وسوف يعطى الجزء الاول طبيعة دالة الانتاج لصاحب المؤسسه وطريقة اشتقاق منحنيات الانتاج productivity curves ومنحنيات تساوى الكميات isoquants وسوف يغطى الجزء الثاني اساليب وطرق بديله للحصول على الحد الاعلى ، والجزء الثالث يغطى عناصر الطلب المشتقه من سلوك صاحب المؤسسه للحصول على الحد الاعلى • وفي الجزء ٤ ـ ٤

نقوم باشتقاق دوال التكلفه من علاقات الانتاج production relations اما مشاكل صاحب المؤسسة الذى يقوم باستخدام دخل واحد لانتاج منتجين فقد نوقشت فى الجزء ٤ـ٥ ثم عممنا المناقشه لاى عدد من الدواخل والخوارج فى الجزء ٤ ـ ٦ .

٤ - ١ مفاهيم (افكار) اساسية : BASIC CONCEPTS

دالة الإنتاج : The Production Function

افترض ان لدينا عملية انتاج بسيطه بحيث ان صاحب المؤسسة يستخدم داخلان متغيران هما X_1 X_2 بالاضافه الى داخل واحد ثابت لانتاج منتج واحد (هو(Q)) فدالة الانتاج فى هذه الحاله ، تنص على ان كمية المنتج (q) تكون بدلالة كميات الدواخل المتغيره x_1 و x_2 بحيث ان :

$$q = f(x_1, x_2) \qquad (٤_١)$$

ونفترض فى هذه الداله ان تكون دالة متصله ذات قيمه مفرده ولها اشتقاقات اوليه وثانيه متصله، ولا تكون معرفه الا بقيم غير سالبه للدواخل والخوارج لان القيم السالبه لا تعطى اى معنى فى السياق الحاضر. ومجال دالة الانتاج قد يحتوى مجال الدالة على جميع القيم الغير سالبه فى الربع الرابع من المحاور وقد يختلف من حالة لحاله اخرى .

ولكن جرت العاده على افتراض ان دالة الانتاج تكون دائما متزايده بمعنى ان $f_i > 0$ ضمن مجال الداله وايضا يفترض فيها ان تكون دالة شبه ـ مقعرة بانضباط عندما يعمل صاحب المؤسسه على الحصول على الحد الاعلى او الحد الادنى للتكلفه وتكون دالة مقعرة بانضباط عندما يعمل صاحب المؤسسه على الحصول على الحد الاعلى للربح .

وقد يتمكن صاحب المؤسسة من استخدام مجموعات عديده مختلفه من X_1 و X_2 لانتاج مستوى معين من النتائج ، وفى الحقيقه فان العدد المحتمل مثل هذه المجموعات قد يكون لا نهائى بما ان المعادله (٤ــ١) تمثل دالة متصله والتقنيه المتوفره لصاحب المؤسسه هى تكون فقط المعلومات الفنيه من مجموعات الدواخل الضروريه للحصول على المنتج المطلوب وهى كذلك تحتوى على جميع الاحتمالات الفيزيائيه وقد تنص التقنية المتوفره على انه من الممكن استخدام مجموعة واحدة من X_1 و X_2 بعدد من الطرق المختلفة لانتاج مستويات عديدة مختلفه من المنتجات . وتختلف دالة الانتاج عن التقنيه المعطاه فى انها تفترض مسبقا وجود التقنيه الاكثر كفاءة وتعطى الحد الاعلى للانتاج الذى يمكن الحصول عليه من كل مجموعة دواخل محتمله . وان افضل استخدام لاى مجموعة محددة من الدواخل انما هو مسأله فنيه وليست اقتصاديه او على هذا فان اختيار افضل مجموعه دواخل لانتاج

مستوىمعين من المنتجات يعتمد على اسعار الدواخل والخوارج ويكون معرضا للتحاليل الاقتصاديه •

ان مستويات الدواخل والخوارج تمثل معدلات انسياب flow بمعدل وحدة زمنية وهذه الفترات الزمنيه والتي من اجلها عرفت هذه المعدلات الانسيابيه ، بالتالي دالة الانتاج للمدى الزمني القصير short-run تكون معرضةلثلاثه قيود عامه هي :

(١) يجب ان تكون الفتره الزمنيه قصيرة قصرا كافيا حتى لا يتمكن صاحب المؤسسه من تغيير مستويات الدواخل الثابته •

(٢) يجب ان تكون قصيرة قصرا كافيا حتى لا يمكن تغيير شكل دالة الانتاج من خلال التحسينات الفنيه •

(٣) يجب ان تكون الفتره الزمنيه بطول كاف ليسمح بتكمله العمليات الفنيه الضرورية •

فاختيار فترة زمنيه محدده ضمن اطارات محدده يتم بطريقه عشوائيه arbitrary. ومن الممكن تغيير مجرى المناقشه قواعد للمدى الزمني الطويل long-run اذا ارخينا حبل الشرط(١) وعرفنا دالة الانتاج لفتره زمنيه طويله كافيه للسماح بحدوث تغيرات في الدواخل الثابته •

وكل النتائج تقريبا للفتره الزمنيه القصيره سوف تتبع في شكل مختلف اختلافا بسيطا لنتائج الفتره الزمنيه الطويلة •

منحنيات الإنتاج : Product Curves

نعرف مجمل الانتاج للداخل x_1 في انتاج Q بانه الكميه من Q التي يمكن استخلاصها من الداخل x_1، اذا عينا للداخل x_2 القيمه الثابته x_2^0 والتي يمكن معاملتها على اساس انها كميه متغيره (ذات قيمة ثابته) وان q تصبح في هذه الحاله ، بدلالة x_1 فقط

$$q = f(x_1, x_2^0) \qquad (٤-٢)$$

ويمكن تغيير العلاقة بين q و x_1 بتغيير x_2^0 والشكل (٤-١) يمثل مجموعة من منحنيات الانتاج الاجمالية total product curves وكل واحد من يعطي العلاقة بين q و x_1 للقيمة مختلفه من x_2^0 وعادة فان اي زياده في x_2^0 سوف ينتج عنه انخفاض في كميه X_1 الضروريه لانتاج المستوى المعين لكل منتج ضمن المدى الممكن فاذا كان احد منحنيات الانتاج يقع على يسار منحنى اخر فان هذا المنحنى يمثل قيمة اعلى للكمية x_2^0: بحيث أن $x_2^{0(1)} > x_2^{0(2)} > x_2^{0(3)}$

ونعرف معدل الانتاج *average product* والانتاج الحدى marginal products للداخل بطريقه مشابهه لقيم محدده للداخل x_2^0. على النحو التالي :

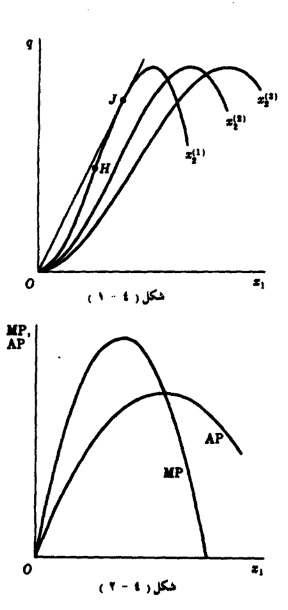
ان معدل الانتاج (ونرمز له بالرمز AP) للداخل X_1 هو اجمالي الانتاج مقسوما على كميته :

$$AP = \frac{q}{x_1} = \frac{f(x_1, x_2^0)}{x_1}$$

ونعرف الانتاج الحدى(ونرمز له بالرمز MP للداخل X_1 بانه معدل التغير لاجمالـــى الانتاج بالنسبه للتغيرات فى كمياته بمعنى انه هو الاشتقاق الجزئى للمعادله (٤ــ١) بالنسبه لقيمة الداخل :

$$MP = \frac{\partial q}{\partial x_1} = f_1(x_1, x_2^0) \qquad (٤ــ٣)$$

ويمكن رسم مجموعات من منحنيات AP و MP بتعيين قيم مختلفه الى x_2^0 ومنحنيات AP و MP والتى تقع الى اقصى اليسار بالنسبه لمنحنيات اجمالى الانتاج فى الشكل(٤ــ١) تكون ممثله فى الشكل ٤ــ٢ .



شكل (٤ - ١)

شكل (٤ - ٢)

ان معدل الانتاج AP لنقطه ما على منحنى الانتاج الاجمالى يساوى ميل الخط الواصل بين هذه النقطه ونقطة الاصل والخطين OK و OJ على الشكل(٤ــ١) مثاليــن لهذا

وبملاحظة منحنى AP نجد انه يزداد اذا تحركنا عبر منحنى اجمالى الانتاج من نقطه الاصل الى النقطه J وينخفض بعد ذلك. ونقطه J تمثل نقطة الحد الاعلى على منحنى AP فى الشكل (٤ـ٢).

وقيمة MP لنقطة ما على منحنى الانتاج الاجمالى تساوى ميل خط التماس الى منحنى عند تلك النقطه ففى الشكل (٤ـ١) نجد ان MP يزداد من نقطة الاصل الى نقطة الانقلاب inflexion point H حيث ان ميل خط التماس يكون فى ذروته ويتناقص بعد ذلك ونجد ايضا ان MP و AP متساويان عند اعلى نقطه فى AP (وهى نقطة J) حيث ان ميل خط التماس يساوى ميل الخط[١].

ان منحنيات الانتاج المعطاه فى الشكل (٤ـ١) والشكل ٤ـ٢) تحقق القانون العام المعروف بقانون تناقص الانتاج الحدى *law of diminishing marginal product* ونجد ان الانتاج الحدى MP للداخل X_1 سوف يتناقص فى النهايه كلما ازدادت مع الحفاظ على x_2^0 من غير تغيير.[٢]
وهذا القانون لا ينفى المرحلة الاولى والتى يكون فيها MP متزايدا والواضحه فى المثال الراهن. فاذا اعتبرنا عملية الانتاج التى خلطنا فيها الارض land والعمل labor لانتاج الحب wheat ثم قمنا بحساب كمية الحب المنتج كلما اضفنا عمال اكثر فاكثر الى قطعة الارض ذات المساحة الثابته . وسوف نجد فى البدايه انه بزيادة عدد العمال تزايدا فى MP الخاص بالعمال . ولكن بعد تحقيق هذه الاقتصاديات الاوليه ، نجد ان الزيادات فى اعداد العمال سوف يؤدى الى زيادات اصغر فاصغر فى انتاج الحب وتصبح اعداد العمال اكبر واكبر نسبه الى كميه الارض الثابته فقانون تناقص الانتاج الحدى يهتم بالكميات النسبيه للدواخل ولا يمكن تطبيقه اذا ازدادت كميات الدواخل معا وفى نفس الوقت.

---

(١) لايجاد القيمه العظمى لمعدل الانتاج AP نضع اشتقاقة الجزئى بالنسبه للمقدار يساوى صفرا بحيث ان

$$\frac{\partial AP}{\partial x_1} = \frac{x_1 f_1(x_1, x_2^0) - f(x_1 x_2^0)}{x_1^2} = 0$$

ومن معلوماتنا عن الكسور ، تعرف انه اذا ساوى كسرا ما المقدار صفر ، فان البسط يكون مساويا لصفر وعليه فان :

$$x_1 f_1(x_1, x_2^0) - f(x_1 x_2^0) = 0$$

وبتحريك الحد الثانى الى الجانب الايمن والقسمه على x_1 نحصل على

$$f_1(x_1, x_2^0) = \frac{f(x_1, x_2^0)}{x_1}$$

وبهذا فان MP و AP يتساويان عند النقطه العظمى لمعدل الانتاج AP اذا وجد مثل هذه النقطه.

(٢) هذا القانون قد ذكر فى انماط مختلفه .راجع مقالة منجر Menger تحت عنوان "قوانين العائدات "The Laws of Return." فى كتاب مورجنستيرن Morgenstern بعنوان *Economic Activity Analysis* على الصفحات ٤١٩ـ٤٨٢.

وتعرف مرونه المنتج للداخل X_1 ونرمز لها بالرمز ω_1 بانها معدل التغير النسبى للمقدار Q بالنسبه للداخل X_1 :

$$\omega_1 = \frac{\partial(\ln q)}{\partial(\ln x_1)} = \frac{x_1}{q}\frac{\partial q}{\partial x_1} = \frac{MP}{AP} \qquad (٤_٤)$$

ومن هذه المعادله نجد ان مرونات المنتج (او الناتج) قد يعبر عنها بالنسبه بين MP و AP ، وتكن موجبه اذا كان AP و MP موجبين · ومرونة الناتج لداخل ما ، تكون اكبر من او تساوى ، او اقل من الوحده كلما كان MP الخاص بها اكبر من ، أو يساوى ، او اصغر من AP الخاص بها على التوالى · · · ومن الممكن تطبيق كامل تحاليل الانتاج لتغيرات فى x_2 ومعاملة x_1 على انها كمية متغيره ذات قيمة ثابته ·

مثال : اعتبر دالة الانتاج المعطاه بالمعادله من الدرجه السادسه :

$$q = Ax_1^2x_2^2 - Bx_1^3x_2^3 \qquad (٥_٤)$$

بحيث ان $A, B > 0$ ونجد ان منحنيات الانتاج المطابقه مرسومة فى الشكلين (٤ــ١) و (٤ــ٢)[1] ·

واذا وضعنا $Ax_2^2 = k_1$ ووضعنا $Bx_2^3 = k_2$ فان مجموعة منحنيات الانتاج الاجمالى للداخل X_1 تكون معطاة بالمعادله من الدرجة الثالثه :

$$q = k_1x_1^2 - k_2x_1^3$$

بحيث ان k_1 و k_2 تعتمد على القيمة الثابته المعينه للمقدار x_2 اما منحنيات AP وMP فانها تكون معطاة بالمعادلتين من الدرجه الرابعه :

$$AP = k_1x_1 - k_2x_1^2 \qquad MP = 2k_1x_1 - 3k_2x_1^2$$

ونجد ان AP يصل الى النقطه العظمى عندما تكون $x_1 = k_1/2k_2$، وان MP يصل الى النقطه العظمى عندما تكون $x_1 = k_1/3k_2$ وبما ان $x_1, k_1, k_2 > 0$ فان MP يصل الى النقطه العظمى عند قيمة اصغر للداخل X_1 من AP ويمكن للقارئ ان يثبت ان AP = MP عندما تكون $x_1 = k_1/2k_2$ وتكون مرونة الناتج للداخل X_1 هى :

$$\omega_1 = \frac{2k_1 - 3k_2x_1}{k_1 - k_2x_1}$$

ويمكن للقارئ ايضا ان يتحقق من ان ω_1 تتناقص كلما تزايدت x_1 ·

<u>مثال اخر</u> : اعتبر دالة الانتاج المعطاة $q = x_1^{\alpha}x_2^{1-\alpha}$ حيث ان $0 < \alpha < 1$ نجد ان AP وان MP للداخل x_1 يتناقصان باستمرار ولا يتساويان عند اى قيمة من قيم X_1 :

$$AP = \frac{q}{x_1} \qquad MP = \alpha\frac{q}{x_1}$$

---

(١) لقد استخدمنا القيم $A = 0.09$ ، $B = 0.0001$ لانشاء المنحنيات فى الشكلين (٤ــ١)و(٤ــ٢)

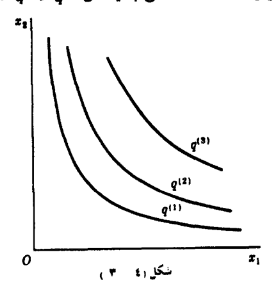
ونجد ان مرونه الناتج للداخل X_1 تساوى الثابت α ٠

منحنيات تساوى الكميات : Isoquants

ان منحنى تساوى الكميات يمثل بالنسبه للمؤسسة نظيرة منحنى السواء بالنسبة للمستهلك ، ويعرف بانه المحل الهندسى locus لاجمالى مجموعات x_1 و x_2 والتى تؤدى الى مستوى انتاجى محدد ٠ ولمستوى انتاجى معطى فان المعادلة(٤ـ١)تصبح:

$$q^0 = f(x_1, x_2) \qquad (٤ـ٦)$$

حيث ان q^0 متغير بقيمه ثابته ٠ وان المحل الهندسى لاجمالى مجموعات x_1 و x_2 والتى تحقق المعادلة (٤ـ٦) فانها تكون منحنى من منحنيات تساوى الكميات ٠ وبما ان دالة الانتاج تكون متصله ، فانه يوجد عدد لا نهائى من مجموعات الدواخل التى تقع على كل منحنى من منحنيات تساوى الكميات ، والتى يمثلها فى الشكل (٤ـ٣) $q^{(1)}$ $q^{(2)}$ $q^{(3)}$ وجميع كميات الدواخل التى تقع على مثل هذا المنحنى انما ينتج عنها ناتجا يوضحه ذلك المنحنى وضمن المدى النسبى لهذه العطيه ، فان اى زيادة فى اى من الداخلين معا سوف ينتج عنه زيادة فى الانتاج ٠ وكلما كان المنحنى بعيدا عن نقطة الاصل كلما ازداد مستوى الانتاج الذى يمثله هذا المنحنى بحيث ان $q^{(1)} < q^{(2)} < q^{(3)}$ ٠



شكل (٤ ـ ٣)

ان ميل خط التماس لنقطة على منحنى تساوى الكميات يمثل المعدل الذى يجب عنده تعويض X_1 مكان X_2 (او X_2 مكان X_1) من اجل المحافظه على مستوى الانتاج المناسب ويعرف الميل السالب بانه معدل التعويض الفنى (التقنى) *rate of technical substitution* ونرمز له بالرمز (RTS)

$$\text{RTS} = -\frac{dx_2}{dx_1}$$

وهذا المعدل بالنسبه للمؤسسه يقابله المعدل RCS بالنسبه للمستهلك وهو نفسه لا

يتغير عند اى نقطه اذا تحركنـا فى اى اتجاه .

ويأخذ الاشتقاق الكامل total differential لدالة الانتاج نحصل على :

$$dq = f_1\,dx_1 + f_2\,dx_2 \qquad (٤-٧)$$

بحيث ان f_1 و f_2 هما الاشتقاقين الجزئيين للكمية q بالنسبه للمقدارين x_1 و x_2 (يمثلان الانتاج الحدى للداخلين x_1 و x_2) . وبما ان $dq = 0$ للتحرك على منحنى تساوى الكميات ، فان :

$$0 = f_1\,dx_1 + f_2\,dx_2$$

وعليه فان :

$$RTS = -\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{f_1}{f_2} \qquad (٤-٨)$$

بمعنى ان RTS عند نقطة ما يساوى نسبة MP للداخل x_2 الى MP للداخل x_2 عند تلك النقطه .

ويمكن الحصول على منحنيات تساوى الكميات الموضحة فى الشكل (٤ــ٣) لدالـــة الانتاج المعطاة فى المعادلة(٤ــ٥) اذا افترضنا ان $z = x_1x_2$ واعدنا كتابه(٤ــ٥) لتصبح

$$q^0 = Az^2 - Bz^3$$

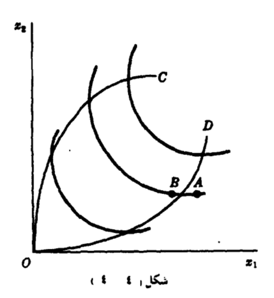
ومنها نكون المعادلة التكعيبية :

$$Bz^3 - Az^2 + q^0 = 0$$

والتى يمكن حلها لقيمة z ، ونتعامل مع اصغر جزر حقيقى موجب على انه الحل لقيمه z فنجد ان قيمة z تعتمد على q^0 بحيث ان $z = \psi(q^0)$ او $x_1x_2 = \psi(q^0)$ وهذه المعادله تعرف لنا منحنيات تساوى الكميات بحيث ان $\psi(q^0)$ تكون ثابته لاى قيمة محـــــدده للمقدار q^0 .

وقد يحدث ان يكون الانتاج الحدى MP سالبا وهذا يكون نتيجة لاستعمال x_1 بدرجة كبيره كافيه . فالانسان يمكن ان يتخيل حالة تكون فيها كمية العمال المستخدمه نسبة الى ميات الدواخل اخرى كبيرة لدرجة اى زيادة فى عدد العمال سوف ينتج عنـه اختناق وعدم كفائة وتعريف دارة الانتاج على انها تعطى الحد الاعلى من المنتجات لكل مجموعة من الدواخل المحتمله ، لا تلغى هذا الاحتمال (احتمال حدوث اختناق وعـدم كفائة . فاذا كان MP الخاص بالداخل x_1 سالبا وكان MP الخاص بالداخل x_2 موجبا فان RTS يكون سالبا كما هو الحال عند نقطة A فى الشكل ٤ــ٤ فاذا تحركنا علـــى المنحنى من A الى B فان النتيجه هى انخفاض فى x_1 و x_2 معا . ومن الواضح ان نقطه B تكون مفضله على نقطة A اذا كان لصاحب المؤسسة ان يدفع اسعارا موجبـــه للدواخل التى يحتاجها . فصاحب المؤسسة العاقل لايمكن ان يعمل الجزء المائل بشكل موجب من المنحنى ، بمعنى انه سوف لايستخدم اى مجموعة يكون ناتجها MP سالبـــا

لوحدات من الدواخل وتكون حوات الخطوط OC و OD المساحه التى يستطيـع اى صـاحب مؤسسة عاقل العمل داخلها ٠



شكل (٤ ـ ٤)

شكل دالة الإنتاج : Shape of the Production Function

نفترض عادة بان دوال الانتاج تمتلك منحنيات تساوى الكميات بشكل محدب وبانحناء الى جهة نقطة الاصل مع انخفاض فى RTS كلـما X_1 عوضت عن X_2 على المنحنى فالمنحنيات فى الشكل (٤ ـ ٣) تكون من نفس النوع، وتلك فى الشكل (٤ ـ ٤) ايضا من نفس النـوع ما دامت داخل المساحه المحدودة بحافة الخطوط OC و OD

مثال : اعتبر مجالا لائقا لدالة الانتاج المعطاه بالمعادلة (٤ ـ ٥) وهـــــــى $q = Ax_1^2x_2^2 - Bx_1^3x_2^3$ وان الناتج Output يكون موجبا اذا كانت $0 < x_1x_2 < A/B$ وهذه الدالة تزايديه (لـها MP موجبه) اذا كانت $0 < x_1x_2 < 2A/3B$ ونجد ان اللامتساويه لدالة تكون شبه ـ مقعرة بإنضباط وانتظام واستخدام مثل التى اعطيت بالمعادلة (٢ ـ ٥) تكون ايضا محققه بالنسبه للتعبير $0 < x_1x_2 < 2A/3B$ وعليه فان (٤ ـ ٥) تكون دالة لـها قيم موجبه وهى شبه مقعة بانتظام داخل المجال المعتبر ٠

وفى نطاق حالة وجود بعدين two-dimensional case فان دالة الانتاج تكون دالة مقعرة بانضباط (راجع الجزء A-3) اذا كان :

$$f_{11} < 0 \qquad f_{22} < 0$$

$$\begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{vmatrix} = f_{11}f_{22} - f_{12}^2 > 0 \qquad (٤ - ٩)$$

ونجد ان الاشتقاقات الجزئية المباشرة الثانيه للمعادلة (٤ـ٥) تكون سالبه لقيم $x_1 x_2 > A/3B$ وتكون هيسيان المحددة (٤ـ٩) موجبه فقط للمجال :

$$\frac{2A}{5B} < x_1 x_2 < \frac{2A}{3B} \quad (١٠\text{ـ}٤)$$

وعليه فان (٤ـ٥) تكون دالة شبه ـ مقعرة تزايديه ، لها قيم موجبه ضمن هذا المجال. وانه من السهل الحصول على المجالات لذلك الفصل class من دوال الانتاج المعطاه بالمعادله : $q = Ax_1^\alpha x_2^\beta$ بحيث ان $\alpha, \beta > 0$ وان الناتج وكذلك قيم MP معا تكون موجبه للقيم $x_1, x_2 > 0$ ومن الممكن اثبات تحدب منحنيات تساوى الكميات الخاصة بالقيم الموجبه للدواخل على النحو التالى :

$$x_2 = \left(\frac{q^0}{A}\right)^{1/\beta} x_1^{-\alpha/\beta}$$

$$\frac{d^2x_2}{dx_1^2} = \frac{\alpha(\alpha+\beta)}{\beta^2}\left(\frac{q^0}{A}\right)^{1/\beta} x_1^{-(\alpha+2\beta)/\beta} > 0$$

وعلى هذا فسوف تكون المنحنيات على الشكل المطلوب لاى قيم موجبه لـ α و β والان اعتبر الشروط التى سوف يكون بسببها دوال من دوال الفصل class السابق مقعره بانضباط ولذلك نجد ان الاشتقاقات الجزئيه الثانيه المباشره لدالة الانتاج سوف تكون سالبه كما هو مطلوب من اجل تقعرها اذا كانت α و β اقل من واحد بحيث ان :

$$f_{11} = \alpha(\alpha-1)\frac{q}{x_1^2} \qquad f_{22} = \beta(\beta-1)\frac{q}{x_2^2}$$

وبتقسيم المعادلة (٤ـ٩) نحصل على :

$$\alpha(\alpha-1)\frac{q}{x_1^2}\beta(\beta-1)\frac{q}{x_2^2} - \left(\frac{\alpha\beta q}{x_1 x_2}\right)^2 = (1-\alpha-\beta)\frac{\alpha\beta q^2}{x_1^2 x_2^2}$$

والتى يمكن ان تكون موجبه او سالبه او صفر اعتمادا على قيم α و β فاذا كانت $\alpha + \beta < 1$ فانها تكون موجبه وتكون دالة الانتاج مقعرة بانضباط لقيم x_1 و x_2 الموجبه ولكن اذا كانت $\alpha + \beta = 1$ فانها تكون صفرا وتكون دالة الانتاج مقعرة وليست مقعرة بانضباط اما اذا كانت $\alpha + \beta > 1$ فانها تكون سالبه وتكون دالة الانتاج مقعرة وليست محدبه .

مرونة التعويض : Elasticity of Substitution

اذا كان لدالة الانتاج منحنيات (تساوى الكميه) محدبه ، فان معدل التعويض الفنى RTS بقيمة X_2 لقيمة X_1 وان النسبه x_2/x_1 سوف ينخفضان معا عندما تعوض X_2 مكان X_1 على المنحنى .

وتعرف مرونة التعويض (ويرمز لها بالرمز (σ)) بانها رقم بحت pure number لقياس

المعدل الذى يتم من خلاله عملية التعويض وبدقة إكثر نعرف المرونه التعويضيه بانهـا معدل التغير النسبى لنسبة الدواخل مقسومة على معدل التغير النسبى لـ RTS

$$\sigma = \frac{d\ln(x_2/x_1)}{d\ln(f_1/f_2)} = \frac{f_1/f_2}{x_2/x_1}\frac{d(x_2/x_1)}{d(f_1/f_2)}$$

وبتعويض

$$d(x_2/x_1) = (x_1\,dx_2 - x_2\,dx_1)/x_1^2$$

$$d(f_1/f_2) = \frac{\partial(f_1/f_2)}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial(f_1/f_2)}{\partial x_2}dx_2$$

وكذلك

$$dx_2 = -(f_1/f_2)\,dx_1$$

ومن المعادلة (٤ــ٨):

$$\sigma = \frac{f_1(f_1x_1 + f_2x_2)}{f_2x_1x_2\left[f_1\frac{\partial(f_1/f_2)}{\partial x_2} - f_2\frac{\partial(f_1/f_2)}{\partial x_1}\right]}$$

وبتقييم الحدود داخل الاقواس من المعادله (٤ــ٨) نحصل على :

$$\sigma = \frac{f_1f_2(f_1x_1 + f_2x_2)}{x_1x_2\mathscr{D}} \qquad (٤\text{ــ}١١)$$

بحيث ان $\mathscr{D} = 2f_{12}f_1f_2 - f_1^2f_{22} - f_2^2f_{11}$ تكون موجبه بسبب افتراض شبه ــ التقعر المنضبط وبما ان الحدود فى المعادله (٤ــ١١) كلها موجبه، فان مرونه التعويض سوف تكون موجبه ايضا وبعض دوال الانتاج قد يكون لها مرونه تعويض ثابته ، ولكن σ عموما سوف تتغير من نقطة لاخرى على دالة الانتاج وان قيمة $\mathscr{D}$ تعكس معدل التغير لميل منحنى من منحنيات تساوى الكميات isoquant وكلما اصبحت $\mathscr{D}$ كبيرة كلما اصبح المنحنى اكثر انحناءاً .

مثال : اعتبرالفصل class من دوال الانتاج المعطاة بالمعادلة $q = Ax_1^{\alpha}x_2^{\beta}$

بحيث ان $\alpha, \beta > 0$ وبتقييم المعادله (٤ــ١١) نجد ان :

$$\sigma = \frac{\alpha q}{x_1}\frac{\beta q}{x_2}\frac{(\alpha q + \beta q)}{x_1x_2}\frac{x_1^2x_2^2}{q^3\alpha\beta(\alpha+\beta)} = 1$$

ومن هذا يتضح ان هذا الفصل من دوال الانتاج يكون له مرونة تعويض مساويه للوحده فى كل مكان من الدالة .

٤ - ٢ سلوك تحقيق الأمثلية : OPTIMIZING BEHAVIOR

ان النقاش الراهن يكون محصورا على الحالة التى يقوم فيها صاحب المؤسسه بشـراء X_1 و X_2 من الاسواق التنافسيه الكامله perfectly competitive markets باسعار ثابته للوحدة الواحده وبهذا يكون اجمالى تكلفة الانتاج (C) ممثلا بالمعادله الخطيه التاليه:

$$C = r_1x_1 + r_2x_2 + b \qquad (٤\text{ــ}١٢)$$

بحيث أن r_1 و r_2 يمثلان بالترتيب أسعار x_1 و x_2 وأن b تمثل التكلفه لاى داخـل

ثابت • ونعرف خط تساوى التكلفه isocost line بانه المحل الهندسى لمجاميع الدواخل التى قد تشترى بتكلفة اجماليه محددة C^0 :

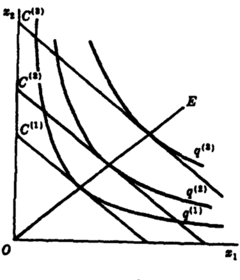
$$C^0 = r_1x_1 + r_2x_2 + b \qquad (\text{٤ــ١٣})$$

بحيث أن C^0 تمثل متغير بقيمة ثابته •

وبحل المعادله (٤ــ١٢) لقيم x_1 نحصل على :

$$x_1 = \frac{C^0 - b}{r_1} - \frac{r_2}{r_1}x_2$$

ونعرف ميل خط تساوى التكلفه بانه يساوى سالب نسبة اسعار الدواخل وتعرف قاطع intercept خط تساوى التكلفه على المحور x_1 وهو يساوى $[(C^0 - b)/r_1]$ بانه الكميه من X_1 التى يمكن شراؤها اذا كانت التكاليف المبدئيه باسرها entire outlay فيما عدا (بأستثناء) تكلفة الدواخل الثابته قد صرفت على X_1 ونعرف قاطع الخط على المحور X_2 وهو يساوى $[(C^0 - b)/r_2]$ بانه الكميه من X_2. التى يمكن شراؤها اذا كان هذا المقدار قد صرف على x_2 وشكل (٤ــ٥) يبين بعض افراد خطوط تساوى التكلفه فنجد كلما كبر اجمالى التكاليف المبدئيه التى يمثلها خط تساوى التكلفه ، كلما كبرت القواطيع على المحورين x_1 و x_2 وبالتالى كلما بعدت هذه الخطوط من نقطة الاصل كما هو واضح من الخطوط $C^{(1)}$، $C^{(2)}$، $C^{(3)}$ بحيث ان $C^{(3)} > C^{(2)} > C^{(1)}$ ونجد ايضا ان افراد هذه الخطوط تملأ الربع الغير سالب من السطح المستوى x_1x_2 •



شكل (٤ - ٥)

تحقيق الحد الأعلى المقيد للناتج : Constrained Output Maximization

تبين لنا من المناقشات السابقة في سلوك المستهلك انه يقوم بتحقيق الحد الاعلى (أو الاقصى) للمنفعه عرضة (تحت شرط) قيد ميزانيته · فالمسألة المماثلة بالنسبه للمؤسسة هي تحقيق (او الحصول على) الحد الاقصى للناتج المعطى في المعادلة (٤ـ١٣) فصاحب المؤسسة يرغب في الحصول على اكبر كميه ممكنه من الناتج بتكاليف مبدئية معطاه ·

وعليه فاننا نقوم بتكوين معادلة لاقرانج :

$$V = f(x_1, x_2) + \mu(C^0 - r_1x_1 - r_2x_2 - b)$$

بحيث أن $\mu \neq 0$ تمثل مضروبا لاقرانج غير محددا · وبوضع الاشتقاقات الجزئيه للمعادله السابقة بالنسبه لـ x_1, x_2 و μ مساوية لصفر نحصل على :

$$\frac{\partial V}{\partial x_1} = f_1 - \mu r_1 = 0$$

$$\frac{\partial V}{\partial x_2} = f_2 - \mu r_2 = 0$$

$$\frac{\partial V}{\partial \mu} = C^0 - r_1x_1 - r_2x_2 - b = 0$$

وبنقل حدود الاسعار الى الجانب الايمن للمعادلتين الاوليتين وقسمة المعادله الاولى على الثانية نحصل على :

$$\frac{f_1}{f_2} = \frac{r_1}{r_2} \qquad (٤ـ١٤)$$

فشروط الدرجه الاولى تنص على ان نسبة MP الخاص بـ X_1 و X_2 الخاص بـ μ, يجب أن تساوى نسبة اسعارهما ويمكن ايضا النص على شروط الدرجه الاولى بعدة طرق اخرى مكافئة للاولى ·

وبحل المعادلتين الأوليتين لقيمة :

$$\mu = \frac{f_1}{r_1} = \frac{f_2}{r_2} \qquad (٤ـ١٥)$$

وهذه المعادلة تعني ان الاسهام للناتج من صرف اخر ريال على كل داخل يجب أن يساوى μ فالمضروب μ هو اشتقاق الناتج بالنسبه للتكلفه مع المحافظة على ثبات

الاسعار وتغيير الكميات (١) ٠

واخيرا بتعويض $RTS = f_1/f_2$ من المعادله (٤ــ٨) فى المعادلة (٤ــ١٤) نحصل على :

$$RTS = \frac{r_1}{r_2} \qquad (٤ــ١٦)$$

ومن الممكن التعبير عن شروط الدرجه الاولى على انها تعادل المساواة بين RTS ونسبة اسعار الداخل والتركيبات الثلاثة لشروط الدرجه الاولى والمعطاه بالمعادلات (٤ــ١٤) ، (٤ــ١٥) ، (٤ــ١٦) تمثل بدائل متكافئة فاذا تحققت اى واحدة منهم فان الثلاثة جميعا تتحقق ٠

أن النمط المعطى بالمعادلة (٤ــ١٦) له تفسيرا هندسيا واضحا ٠ ان خليط الداخل الامثل optimum يعطى بنقطة التماس بين منحنى تساوى الكميات وبين خط تساوى التكلفه النسبى ٠ فاذا كانت $C^{(3)}$ (انظر الشكل رقم ٤ــ٥) تمثل مستوى التكلفه المقرر عليه مسبقا فان الحد الاعلى للناتج يكون $q^{(3)}$ ان شروط الدرجه الثانية تتطلب بان تكون محددة هيسيان المحدودة موجبه :

$$\begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} & -r_1 \\ f_{21} & f_{22} & -r_2 \\ -r_1 & -r_2 & 0 \end{vmatrix} > 0$$

ومن الممكن استخدام شروط الدرجة الثانية لاثبات أن معدل التغير لميل خط التماس لمنحنى تساوى الكميات لابد وان يكون موجبا (بمعنى ان $(d^2x_2/dx_1^2 > 0$ عند نقطة التماس مع خط تساوى التكلفة (٢) ٠

وسوف يضمن افتراض ان دالة الانتاج تكون شبه ــ مقعرة بانضباط ان شرط الدرجة الثانية سوف يتحقق متى ماتحققت شروط الدرجة الاولى وهى نفس المناقشة التى استخدمت لاشتقاق المعادلة (٢ــ١٤) من المعادلة (٢ــ١٢) ٠

---

(١) اذا افترضنا ان التكلفه قابلة للتغيير ، فان مشتق معادلة التكاليف (٤ــ١٢) يكون

$$dC = r_1\,dx_1 + r_2\,dx_2$$

وبتعويض $r_1 = f_1/\mu$ وكذلك $r_2 = f_2/\mu$ من شروط الدرجه الاولى نحصل على :

$$dC = \frac{1}{\mu}(f_1\,dx_1 + f_2\,dx_2)$$

وبقسمة هذا التعبير على مشتق دالة الانتاج (٤ــ٧) يصبح اشتقاق الناتج بالنسبه للتكلفه مع الاحتفاظ بالاسعار ثابتة على النحو التالى :

$$\frac{dq}{dC} = \mu\frac{f_1\,dx_1 + f_2\,dx_2}{f_1\,dx_1 + f_2\,dx_2} = \mu$$

(٢) ان الاثبات الاساسى لهذه النقطة يكون مماثلا للاثبات الذى استخدم لاثبات ان معدل التغيير لميل منحنى السواء يجب ان يكون موجبا عند نقطة الحد الاعلى للمنفعة ٠

تحقيق الحد الأدنى المقيد للتكلفة : Constrained Cost Minimization

قد يرغب صاحب المؤسسة فى تحقيق الحد الادنى للتكلفة انتاج مستوى معيـــن من منتج ما ، ففى هذه الحالة تكون المعادلة (٤ـ١٢) معادلة لتحقيق الحد الادنى تحت شرط معادلة (٤ـ٦) وبتكوين دالة لقرانج نحصل على :

$$Z = r_1x_1 + r_2x_2 + b + \lambda[q^0 - f(x_1, x_2)]$$

وبوضع الاشتقاقات الجزئية للمعادلة السابقة بالنسبه لـ λ، x_2، x_1 مساوية لصفر ، نحصل على

$$\frac{\partial Z}{\partial x_1} = r_1 - \lambda f_1 = 0$$

$$\frac{\partial Z}{\partial x_2} = r_2 - \lambda f_2 = 0 \qquad (٤ـ١٧)$$

$$\frac{\partial Z}{\partial \lambda} = q^0 - f(x_1, x_2) = 0$$

وبما ان r_1 و f_1 يكونان موجبتان معا ،فان λ تكون موجبة ايضا وبتحريك حدود السعر للمعادلتين الاوليتين الى الجانب الايمن ، وقسمة المعادلة الاولى بالثانيــــه نحصل على :

$$\frac{f_1}{f_2} = \frac{r_1}{r_2} \quad \text{or} \quad \frac{1}{\lambda} = \frac{f_1}{r_1} = \frac{f_2}{r_2} \quad \text{or} \quad \text{RTS} = \frac{r_1}{r_2}$$

فشروط الدرجة الثانية لتحقيق الحد الادنى للتكلفة تحت قيد المنتج تكون مشابهه لشروط تحقيق الحد الاعلى للمنتج تحت قيد التكلفة ومضروب لاقترانج λ يكون مقلوب المضـــروب μ ، او انه اشتقاق التكلفه بالنسبه لمستوى المنتج (عرفناها على انها التكلفة الحدية) marginal cost فى الجزء (٤ـ٤) ٠

وفى الحالة الراهنة فان صاحب المؤسسة يتحصل على اوطى خط تساوى التكلفــــه والذى له نقطة واحدة مشتركة على الاقل مع منحنى مختار من منحنيات تساوى الكميه ٠فهـو يمكن أن ينتج $q^{(1)}$ (انظر الشكل ٤ـ٥) بتكلفة قدرها $C^{(1)}$، $C^{(2)}$ أو $C^{(3)}$ ولكن أقـــل من أى واحدة منهما وأقل تكلفة يدفعها صاحب المؤسسة تقع على خط تساوى التكلفة الذى يكون ملامسا لمنحنى تساوى الكميات المختارة ٠

ويتطلب شرط الدرجة الثانية بان تكون محددة هيسيان المحدودة سالبة :

$$\begin{vmatrix} -\lambda f_{11} & -\lambda f_{12} & -f_1 \\ -\lambda f_{21} & -\lambda f_{22} & -f_2 \\ -f_1 & -f_2 & 0 \end{vmatrix} < 0$$

وبتعويض $-r_1/\lambda = -f_1$ وتعويض $-r_2/\lambda = -f_2$ وضرب العمودين الاولين بالمقدار $-1/\lambda$ ثم ضرب الصف الثالث بالمقدار $-\lambda^2$ وضرب العمود الثالث بالمقدار λ [1] نحصل على :

$$\begin{vmatrix} -\lambda f_{11} & -\lambda f_{12} & -\frac{r_1}{\lambda} \\ -\lambda f_{21} & -\lambda f_{22} & -\frac{r_2}{\lambda} \\ -\frac{r_1}{\lambda} & -\frac{r_2}{\lambda} & 0 \end{vmatrix} = \lambda^2 \begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} & -\frac{r_1}{\lambda} \\ f_{21} & f_{22} & -\frac{r_2}{\lambda} \\ \frac{r_1}{\lambda^2} & \frac{r_2}{\lambda^2} & 0 \end{vmatrix} = -\frac{1}{\lambda} \begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} & -r_1 \\ f_{21} & f_{22} & -r_2 \\ -r_1 & -r_2 & 0 \end{vmatrix} < 0$$

وبما أن $\lambda > 0$ فأن :

$$\begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} & -r_1 \\ f_{21} & f_{22} & -r_2 \\ -r_1 & -r_2 & 0 \end{vmatrix} > 0$$

وشرط الدرجه الاولى هو نفسه الشرط في حالة تحقيق الحد الاعلى المقيد للناتج. فاذا كانت دالة الانتاج شبه ـ مقعرة بانضباط عادي فان كل نقطة تماس بين منحني تساوي الكميات وخط تساوي التكلفه • تكون هي الحل لمسألة تحقيق الحد الاعلى المقيد والحد الادنى المقيد معا • فاذا كانت $q^{(1)}$ (انظر الشكل ٤ـ٥) تمثل الحد الاعلى للناتج الذي يمكن الحصول عليه من تكلفات مبدئية تساوي $C^{(1)}$ من الريالات ، فـان $C^{(1)}$ من الريالات تكون هي الحد الادنى للتكلفة التي بها يتم انتاج $q^{(1)}$ والمحل الهندسي لنقطة التماس (الخط OE في الشكل ٤ـ٥) يعطي مجرى التوسع expansion path للمؤسسة • فصاحب المؤسسة العاقل سوف يختار فقط مجاميع الداخل التي تقع على هذا المجرى او المسار واساسا فان مجرى التوسع (او مسار التوسع) يمثل دالة ضمنيه implicit function للمتغيران x_1 و x_2 بحيث أن :

$$g(x_1, x_2) = 0 \qquad (٤ـ١٨)$$

والتي يتحقق بها شروط الدرجة الاولى والثانية للحصول على الحد الاعلى والادنى •

مثال : اعتبر دالة الانتاج المعطاة بالمعادلة (٤ـ٥) فبحساب نسبتي MP للداخل X_1 والداخل X_2 :

$$\frac{f_1}{f_2} = \frac{2Ax_1x_2^2 - 3Bx_1^2x_2^3}{2Ax_1^2x_2 - 3Bx_1^3x_2^2} = \frac{x_2(2Ax_1x_2 - 3Bx_1^2x_2^2)}{x_1(2Ax_1x_2 - 3Bx_1^2x_2^2)} = \frac{x_2}{x_1}$$

وبوضعها مساوية لنسبة اسعار الداخل نحصل على :

$$\frac{x_2}{x_1} = \frac{r_1}{r_2}$$

---

(١) وبضرب العمود الاول بالمقدار $-1/\lambda$ يزيد من قيمة المحددة بنفس قيمة المضروب بـه وضرب العمودان الاول والثاني معا في المقدار $-1/\lambda$ يزيد من قيمة المحددة بالمقدار $1/\lambda^2$ وقيمتها سوف لاتتغير اذا كان صف المحددة باكملة قد ضرب بالمقدار λ^2 انظر الجزء 1-A •

وبوضع شروط الدرجة الاولى هذا على نمط دالة ضمنية فان مجرى التوسع سوف يعطى بالمعادلة الخطية الاتية :

$$r_1x_1 - r_2x_2 = 0$$

وهذا يطابق مجرى التوسع OE فى الشكل (٤ـ٥) .

ودالة الانتاج $q = ax_1^a x_2^a$ هذه لها ايضا منحنيات تساوى الكمية بميل يساوى $f_1/f_2 = x_2/x_1$ وهذه الدالة تظهر وكأنها مخالفه تماما لتلك المعطاة بالمعادلة (٤ـ٥) وبالرغم من هذا فان لها نفس المنحنيات . واذا تبعنا نفس نقاش الباب الثانى ، فان هذا سوف يوضح ان دوال الانتاج تكون تحويلات مطرده موجبه الواحدة للاخرى ضمن المجال الذى تكون له المعادلة (٤ـ٥) شبه ـ المقعرة بانضباط عادى: $0 < x_1x_2 < 2A/3B$. فاذا وضعنا وللمرة الثانية $z = x_1x_2$ بحيث ان $q = az^a$ وطبعنا التحويلة المطرده الموجبه $q^* = (q/a)^{1/a}$ بحيث ان $q^* = z$ فاذا فاضلنا الان المعادلة (٤ـ٥) بالنسبه

$$\frac{dq}{dz} = 2Az - 3Bz^2$$

وهذا الاشتقاق يكون موجبا للقيم $0 < z < 2A/3B$ والذى يثبت ان المعادله(٤ـ٥) ماهى الا تحويلة مطرده موجبه للمعادلة $q^* = z$ والتى هى ، بدورها تكون تحويلة مطردة موجبه لدالة الانتاج الاساسية .

الحصول على الحد الأعلى من الربح : Profit Maximization

ان صاحب المؤسسة ، له حق تغيير مستويات التكلفة والانتاج ويفضل فى النهاية الحصول على الحد الاعلى من الربح كهدف نهائى بدلا من حل مسائل تحقيق حد اعلى او ادنى مقيدة . فايرادات revenue صاحب المؤسسة من بيع منتجاته فى سوق تنافسية كاملة تعطى بعدد الوحدات المباعة مضروبة فى سعر الوحدة الثابتة الذى يتحصل عليه صاحب المؤسسة مقابل المنتج المباع وعليه فان ربحه profit (ونرمز له بالرمز (π)) هو الفرق بين اجمالى ايراداته واجمالى التكلفه .

$$\pi = pq - C$$

أو بتعويض $q = f(x_1, x_2)$ من المعادلة (٤ـ١) وبتعويض $C = r_1x_1 + r_2x_2 + b$ من المعادلة (٤ـ١٢) نحصل على :

$$\pi = pf(x_1, x_2) - r_1x_1 - r_2x_2 - b$$

والربح عادة يكون بدلاله x_1 ، x_2 وبتحقق حدة الاعلى بالنسبه لهاذين المتغيرين : a function of

وبوضع الاشتقاقات الجزئية للربح π بالنسبه لـ x_1 و x_2 مساوية لصفر نحصل على:

$$\frac{\partial \pi}{\partial x_1} = pf_1 - r_1 = 0 \qquad \frac{\partial \pi}{\partial x_2} = pf_2 - r_2 = 0$$

وبتحريك حدود السعر والداخل الى الجانب الايمن نحصل على :

$$pf_1 = r_1 \qquad pf_2 = r_2 \qquad (١٩\text{—}٤)$$

فالاشتقاقات الجزئية لدالة الانتاج بالنسبه للدواخل inputs تمثل الانتاجــات الحدية MPs للدواخل . فقيمة الانتاج الحدى MP للداخل X_1 (وهى تساوى (pf_1)) تكون المعدل الذى يستطيع صاحب المؤسسة من خلاله زيادة فى تطبيق X_1. وتتطلب شروط الدرجة الاولى لتحقيق الحد الاعلى من الربح فى المعادلة (٤ـ١٩) بـان يستخدم كل داخل الى النقطة التى تكون عندها قيمة انتاجه الحدى تساوى سعره .

ويستطيع صاحب المصنع ان يزيد من ربحه مادامت الاضافة الى ايراداته من تشغيل وحدة اضافية من X_1 تعوق تكلفته وتقع مجموعة الداخل والخارج المثلى على مجرى التوسع لان المعادلة (٤ـ١٩) تمثل حالة خاصة من المعادلة (٤ـ١٤) .

وتتطلب شروط الدرجة الثانية ان تتبادل الاساسيات الصغرى principal minors لمحددة هيسيان فى الاشارة :

$$\frac{\partial^2 \pi}{\partial x_1^2} = pf_{11} < 0 \qquad \frac{\partial^2 \pi}{\partial x_2^2} = pf_{22} < 0 \qquad (٢٠\text{—}٤)$$

وكذلك :

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 \pi}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 \pi}{\partial x_1 \partial x_2} \\ \frac{\partial^2 \pi}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 \pi}{\partial x_2^2} \end{vmatrix} = p^2 \begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{vmatrix} > 0 \qquad (٢١\text{—}٤)$$

وتتطلب شروط (٤ـ٢٠) ان يتناقص الربح بالنسبه لزيادة تطبيق اما X_1 أو X_2 ويضمن شرط (٤ـ٢١) ان يتناقص الربح بالنسبه لزيادة تطبيق X_1 و X_2 معا وبما أن $p > 0$ فان شروط (٤ـ٢٠) تتطلب ان يتناقص الانتاج الحدى لكلا الداخلين X_1 و X_2 فاذا كان احد الانتاج الحدى للداخلين متزايدا فان اى تحرك من النقطه التى يتحقق بها شروط الدرجة الاولى سوف ينتج عنه زيادة فى قيمة MP وبما ان سعره ثابتا ، فان صاحب المؤسسة يستطيع زيادة ربحة بزيادة كمية الداخل وتتطلب شروط (٤ـ٢٠) وشروط (٤ـ٢١) ان تكون دالة الانتاج مقعرة بانضباط فى جوار النقطة التى يتحقق عندها شروط الدرجة الاولى بحيث ان $X_1 X_2 \gtrless 0$ اذا وجدت مثل هذه النقطه . ولقـد حصرت الحلول فى المناطق المقعرة بانضباط لدالة الانتاج على مستويات غير سـالبه للدواخل والخوارج فاذا لم يكن لدالة الانتاج مثل هذه المناطق فان حلول تحقيـق

الحد الاعلى من الربح بالطرق التنافسية من النوع السابق لايمكن الحصول عليها ٠ فاذا كانت دالة الانتاج مقعرة بانضباط فان النقطة التى يتحقق عندها شروط الدرجه الاولى تكون حل فريد لتحقيق الحد الاعلى من الربح ٠

٤ - ٣ طلبات الدواخل : INPUT DEMANDS

دوال طلب الدواخل : Input Demand Functions

نستطيع اشتقاق طلبات الدواخل للمنتج عن طريق الطلب البارز للسلعة التى ينتجها ونتحصل على دوال طلب الدواخل بحل معادلة شروط الدرجة الاولى وهى المعادلـــه (٤ــ١٩) للكميات x_1 و X_1 بدلاله r_1 و r_2 وكذلك بدلالة p وهذه تـــــكون معرفى للاجزاء المقعرة بانضباط لدالة الانتاج بحيث ان شروط الدرجة الثانيـــة تكـون محققة ٠ وتشبه دوال طلب الداخل للمنتج دوال الطلب العادية للمستهلك من عـــدة جهات وان من الواضح من (٤ــ١٩) ان دوال الطلب الداخل تكون متجانســـة من الدرجه صفر فى الثلاثة اسعار (راجع بالتخصيص الجزء ٢ــ٣) ويمكن تعريف المرونـات لكل واحد من الداخل بالنسبه لكل واحد من الاسعار ٠ ونحصل على منحنى طلـــب الداخل X_1 عن طريق رسم دالة طلب الداخل بدلالة r_1 فقط بافتراض ان r_2 و p كميتان متغيرتان بقيمتين ثابتتين ٠

مثال : اعتبر الفصل class من دوال الانتاج المعطاة بالمعادلة $q = Ax_1^\alpha x_2^\beta$ بحيث ان $\alpha, \beta > 0$ وان $\alpha + \beta < 1$ والتى اثبتنا فى الجزء (٤ــ١) انها مقعرة بانضباط للقيم $x_1, x_2 > 0$ ومن دالة الربح نجد ان :

$$\pi = pAx_1^\alpha x_2^\beta - r_1x_1 - r_2x_2$$

ونضع اشتقاقاتها الجزئية مساوية لصفر :

$$\frac{\partial \pi}{\partial x_1} = p\alpha Ax_1^{\alpha-1}x_2^\beta - r_1 = 0$$

$$\frac{\partial \pi}{\partial x_2} = p\beta Ax_1^\alpha x_2^{\beta-1} - r_2 = 0$$

وبحل هذه المعادلة لقيم x_1 و x_2 نحصل على دوال طلب الداخل المقابله :

$$x_1 = \left(\frac{\alpha}{r_1}\right)^{(1-\beta)/\gamma} \left(\frac{\beta}{r_2}\right)^{\beta/\gamma} (Ap)^{1/\gamma} = \phi_1(r_1, r_2, p) \qquad (٤ــ٢٢)$$

$$x_2 = \left(\frac{\alpha}{r_1}\right)^{\alpha/\gamma} \left(\frac{\beta}{r_2}\right)^{(1-\alpha)/\gamma} (Ap)^{1/\gamma} = \phi_2(r_1, r_2, p)$$

بحيث ان $\gamma = 1 - \alpha - \beta$ وسوف ينخفض الطلب على كل داخل من الدواخل كلمـــا زادت r_1 أو r_2 وسوف يزداد الطلب على كل داخل كلما زادت p ٠

وكلما تغيرت الاسعار فان المنتج سوف يغير من مستويات الدواخل ليحقق شـــروط الدرجة الاولى والمعطاة بالمعادلة (٤ـ١٩) وبتفاضل (٤ـ١٩) تفاضلا تاما وأعـادة ترتيب الحدود نحصل على :

$$pf_{11}\,dx_1 + pf_{12}\,dx_2 = -f_1\,dp + dr_1$$
$$pf_{21}\,dx_1 + pf_{22}\,dx_2 = -f_2\,dp + dr_2 \qquad (٤\text{ـ}٢٣)$$

وبحل المعادلة (٤ـ٢٣) لقيم dx_1 و dx_2 باستخدام قاعدة كريمر Cramer's rule

$$dx_1 = \frac{1}{p\mathscr{H}}[f_{22}\,dr_1 - f_{12}\,dr_2 + (f_{12}f_2 - f_{22}f_1)\,dp] \qquad (٤\text{ـ}٢٤)$$

$$dx_2 = \frac{1}{p\mathscr{H}}[-f_{21}\,dr_1 + f_{11}\,dr_2 + (f_{21}f_1 - f_{11}f_2)\,dp]$$

بحيث أن $\mathscr{H} = (f_{11}f_{22} - f_{12}^2) > 0$ بسبب افتراض التقعر المنضبط وبقسمة طرفى المعادلـــه الاولى فى (٤ـ٢٤) على dr_1 ووضع $dr_2 = dp = 0$ نحصل على :

$$\frac{\partial x_1}{\partial r_1} = \frac{f_{22}}{p\mathscr{H}} < 0 \qquad (٤\text{ـ}٢٥)$$

وبما ان $p > 0$ وأن $f_{22} < 0$ من المعادلة (٤ـ٢٠) فان معدل تغير مشتروات المنتج من X_1 بالنسبة للتغيرات فى اسعاره ، على البقاء على ثبات الاســـعار الاخرى ، تكون دائما سالبة وسوف تكون منحنيات طلب الداخل للمنتج دائما مائلة ... الى الاسفل . وهذه تكون واحدة من الحالات القليلة فى علم الاقتصاد التى تكون فيهـــا أشارة الاشتقاق غير مبهمة unambiguous ويوجد فقط نتيجة تعويض ، ولكنه لايوجد نظير لنتيجة الدخل للمستهلك فى نظريات الحصول على الحد الاعلى للربح لصاحب الانتاج[1].

وبقسمة طرفى المعادلة الاولى من (٤ـ٢٤) على dr_2 ووضع $dr_1 = dp = 0$ نحصل على :

$$\frac{\partial x_1}{\partial r_2} = -\frac{f_{12}}{p\mathscr{H}}$$

وسوف يكون لهذا الاشتقاق اشارة معاكسة لاشارة الاشتقاق الجزئى الثانى المتداخل f_{12} the second cross partial derivative وفى معظم الحالات التى درست من قبـــل الاقتصاديين نجد ان زيادة فى كمية احد الدواخل سوف يؤدى الى زيادة الانتـــاج الحدى للداخل الاخر ، بمعنى ان $f_{12} > 0$ وعلى هذا فان أى زيادة فى سعر واحد من الدواخل سوف يؤدى عادة الى انخفاض فى استخدام الداخل الاخر .

وبقسمة طرفى المعادلة (٤ـ٢٣) على dp ووضع $dr_1 = dr_2 = 0$ نحصل على :

---

(١) ويمكن الحصول على نظير لمعادلة سلتزكي لصاحب الانتاج الذى يرغب فى الحصول على الحد الاعلى من المنتجات تحت شرط قيد التكلفة وسوف يتحصل على نتيجـــة تكلفة "cost effect" غير متماثلة .

$$\frac{\partial x_1}{\partial p} = \frac{(f_{12}f_2 - f_{22}f_1)}{p\mathcal{H}}$$

ونجد عادة ان اى زيادة فى سعر الناتج سوف يؤدى الى زيادة فى الطلب على الدواخل وهذا الاشتقاق يكون موجبا • ومن اجل أن يكون هذا الاشتقاق سالبا فانه من الضرورى أن تكون $f_{12} < 0$ وأن تكون $f_{12}f_2$ أكبر ، فى قيمتها المطلقة من $f_{22}f_1$ •

تطبيق لقاعدة شاتيلير : An Application of the Le Chatetier Principle

أن دالة الربح لحالة وجود n من الدواخل هى :

$$\pi = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) - \sum_{i=1}^{n} r_i x_i \qquad (٤\text{—}٢٦)$$

وتنص قاعدة شاتيلير على الاتى :

$$\left(\frac{\partial x_i^*}{\partial r_i}\right)_0 \leq \left(\frac{\partial x_i^*}{\partial r_i}\right)_1 \leq \cdots \leq \left(\frac{\partial x_i^*}{\partial r_i}\right)_{n-1} \qquad i = 1, \ldots, n \qquad (٤\text{—}٢٧)$$

بحيث أن الارقام على اطراف الاقواس ترمز الى الاعداد الاضافية للقيود (أو الشـــروط) التى اضيفت الى عملية الحصول على الحد الاعلى للمعادلة (٤ــ٢٦) وعليه فان الرقـــم (٥) على طرف القوس يشير الى عملية الحصول على الحد الاعلى بدون قيد ولا شرط (عدد الشروط او القيود على العطيه = ٥) بينما الرقم (١) يشير الى وجود قيد واحد وهكـــذا وهذه القيود قد صممت بحيث أن x_i^* تمثل الحد الامثل بغض النظر عن عدد القيـــود او الشروط •

ففى حالة عدم وجود قيد او شرط فأن المعادلة (٤ــ٢٥) تبين أن اى زيادة فـــى سعر الداخل سوف ينتج عنه تدنى فى الطلب • وهذا يأتى من خلال تدنى فى الانتاج وفى اغلب الحالات من خلال تعويض دواخل أخرى مكان الداخل الذى زاد ســـــعره • وزيادة القيود لا يستطيع زيادة الفرصة لتعويض دواخل اخرى ، ومن المحتمل انه ينقـــص مثل هذه الفرصه •

وتعكس قاعدة شاتيلير ، كما اعطيت فى المعادلة (٤ــ٢٧) هذه الحالة بالنص على أن القيمة المطلقة لتدنى الطلب نتيجة لارتفاع فى السعر ، لايمكن زيادتها باضافة قيود وقد يحدث وتنخفض اذا زودنا القيود • ويعتمد الاثبات العام لقاعدة شاتيلير علـــــى الخواص المميزة المحددة هيسيان لدالة الانتاج المقعرة بانضباط •

مثال : توضح فيما يلى تطبيقا للقاعدة فى حالة وجود داخلين فقط فاذا افترضـــنا ان x_1 تمثل العمل labor وأن x_2 تمثل رأس المال capital وقارنا تأثير الزيادة فى معدل الاجر wage rate, على طلب المؤسسة للعمل فى المدى الطويل عندما تكون كميـــة

رأس المال متغيرة للتأثير فى المدى القصير عندما تكون كمية رأس المال ثابته ، نجـد ان معادلة (٤ـ٢٥) تعطينا التأثير على المدى الطويل . اما على المدى القصير ، فأننا نحتاج القيام بعملية الحصول على الحد الاعلى على النحو التالى :

$$\pi = pf(x_1, x_2^\dagger) - r_1x_1 - r_2x_2^\dagger$$

وبوضع الاشتقاقات الجزئية مساوية للصفر نحصل على :

$$\frac{\partial \pi}{\partial x_1} = pf_1 - r_1 = 0$$

فنجد انه من الواضح أن $x_2^\dagger$ لاتزال هى المثلى optimal بالتفاضل التام لشرط الدرجة الاولى نجد أن :

$$pf_{11}\, dx_1 - dr_1 = 0$$

وتستخدم هذه النتيجة مع (٤ـ٢٥) لتقييم المعادلة (٤ـ٢٧) لنحصل على :

$$\left(\frac{\partial x_1^\dagger}{\partial r_1}\right)_0 = \frac{f_{22}}{p\mathscr{H}} \leqq \frac{1}{pf_{11}} = \left(\frac{\partial x_1}{\partial r_1}\right)_1$$

وبما أن f_{11} وكذلك f_{22} سالبتان معا فان $f_{11}f_{22} \geqq (f_{11}f_{22} - f_{12}^2)$ ويتبع مع هذا الحصول على اللامتساوية المطلوبه . وسوف يكون الانخفاض فى التوظيف employment على المدى الطويل أكبر منه على المدى القصير مالم تكن $f_{12} = 0$.

٤ ـ ٤ دوال التكلفة : COST FUNCTIONS

يفترض الاقتصاديون عادة ان مسألة الحصول على المجموعات المثلى للدواخل قد حلت وبالتالى فانهم يقومون بتحاليلهم للمؤسسة بالنسبة لايراداتها وتكلفتها بدلالة الناتج ومشكلة صاحب المسألة ، بعد ذلك هى اختيار الناتج الذى يمكنه من الحصول على الحد الاقصى من الربح .

دوال التكلفة فى المدى القصير : Short-Run Cost Functions

يمكن اشتقاق دوال التكلفه من المعلومات التى يحتويها الجزء (٤ـ١) والجزء (٤ـ٦)[1] من دالة الانتاج (٤ـ١) ودالة التكلفة (٤ـ١٢) ودالة مجرى التوسع (٤ـ١٨) وهم:

$$q = f(x_1, x_2)$$
$$C = r_1x_1 + r_2x_2 + b$$
$$0 = g(x_1, x_2)$$

---

(١) نستخدم هنا التعبير " دالة التكلفة" cost function لتدل على التكلفه بدلالة اسعار الدواخل والخوارج بينما التعبير " معادله التكلفه" cost equation يستخدم ليدل على التكلفه من خلال مستويات الدواخل واسعارها .

فاذا افترضنا ان هذه المجموعة من المعادلات يمكن ضمها فى معادلة واحدة بحيث ينص على ان تكون التكلفة كدالة صريحة explicit function بالنسبه لمستوى النا‍تـــج واسعار الداخل زائدا تكلفة الدواخل الثابتة ٠

$$C = \phi(q, r_1, r_2) + b \quad (\text{٤ــ٢٨})$$

وبالنسبه لاسعار الدواخل ، فان دالة التكلفة ϕ تكون :

(١) غير تناقصية (٢) متجانسة من الدرجة الاولى (٣) مقعرة

وتظهر الخاصيه (١) بوضوح من شكل منحنيات السواء فاذا زادت اسعار واحدا أو أكثر من الدواخل وانها استخدمت بطريقة ايجابية ، فانه من الضرورى التحرك الى خط اطى مـن خطوط تساوى التكلفه لتأمين اى منتج محدد ٠ وخاصية (٢) تكون واضحه من خلال دالة التكلفة ٠ فاذا افترضنا ان :

$(r_1^0, r_2^0, x_1^0, x_2^0)$ وأن $(r_1^{(1)}, r_2^{(1)}, x_1^{(1)}, x_2^{(1)})$ يمثلان حلول للتكلفه الاقل لناتج محدد

واذا افترضنا كذلك ان : $r_i^{(2)} = \lambda r_i^0 + (1-\lambda) r_i^{(1)}$

بحيث ان $(i = 1, 2)$ فان :

$$\phi(q, r_1^{(2)}, r_2^{(2)}) = r_1^{(2)} x_1^{(2)} + r_2^{(2)} x_2^{(2)} = [\lambda r_1^0 + (1-\lambda) r_1^{(1)}] x_1^{(2)} + [\lambda r_2^0 + (1-\lambda) r_2^{(1)}] x_2^{(2)}$$

وباستخدام طريقة التكلفة الاقل نحصل على :

$$r_1^0 x_1^{(2)} + r_2^0 x_2^{(2)} \geqq \phi(q, r_1^0, r_2^0)$$

$$r_1^{(1)} x_1^{(2)} + r_2^{(1)} x_2^{(2)} \geqq \phi(q, r_1^{(1)}, r_2^{(1)})$$

وبالتالى فان :

$$\phi(q, r_1^{(2)}, r_2^{(2)}) \geqq \lambda \phi(q, r_1^0, r_2^0) + (1-\lambda) \phi(q, r_1^{(1)}, r_2^{(1)})$$

وهى تثبت التقعر ولقد اعتبرنا النمط العام لدالة التكلفة فى الجزء ٥ــ٤،١ اما هنـــا فاننا نفترض ان اسعار الدواخل غير قابله للتغير بحيث تصبح التكلفة بدلالة مستوى الناتج زائدا تكلفة الدواخل الثابتة :

$$C = \phi(q) + b \quad (\text{٤ــ٢٩})$$

ويجب دفع قيمة الدواخل الثابتة اى التكلفة الثابتة *fixed cost* بغض النظر عن مقدار كمية المنتج الذى تنتجه المؤسسة ، او حتى اذا كانت المؤسسة تنتج أم لا ٠

وتعطى دالة التكلفة التكلفة الاقل لانتاج لكل منتج ويمكن اشتقاقها باســــتخدام الافتراض بسلامة سلوك وتصرف صاحب المؤسسة ٠ ويمكن الحصول على الخليط بين التكلفة والناتج للمعادلة (٤ــ٢٩) كما يلى :

(١) اختيار نقطة ما على مجرى التوسع ٠

(٢) عوض بالقيم المقابلة لمستويات الداخل فى دالة الانتاج للحصول على مستوى الانتـاج المقابـل ٠

(٣) اضرب مستويات الداخل باسعاره الثابتة للحصول على التكلفة الاجمالية المتغيرة total variable cost لمستوى الناتج هذا ٠٠ وأخيرا ٠

(٤) أضف التكلفة الثابتة fixed cost. ٠

ويمكن اشتقاق عدد من علاقات التكلفة الخاصة ، والتي هي أيضا دوال لمستوى المنتج ، من المعادلة (٤ــ٢٩) ونعرف معدل اجمالي التكلفه Average total (ATC) cost ومعدل التكلفة المتغيرة average variable cost (AVC). ومعدل التكلفه الثابتة average fixed cost (AFC) على انها على التوالي اجمالي التكلفة ، والتكلفة المتغيره والتكلفه الثابتة مقسومة على مستوى الناتج :

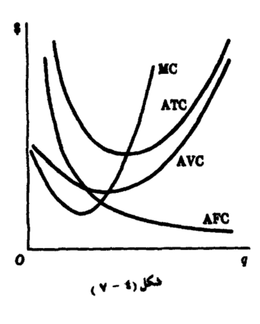
$$ATC = \frac{\phi(q) + b}{q} \qquad AVC = \frac{\phi(q)}{q} \qquad AFC = \frac{b}{q}$$

وتعرفATCبانه مجموعAVC و AFC وتعرف كذلك التكلفة الحدية Marginal (MC) cost بانها اشتقاق اجمالي التكلفة total cost بالنسبه للناتج :

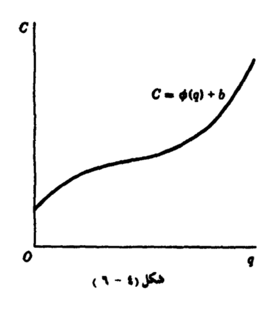
$$MC = \frac{dC}{dq} = \phi'(q)$$

وحيث أن حد التكلفة الثابتة يختفي بعد القيام بعملية التفاضل ، فان اشتقاقات اجمالي التكلفة ، واجمالي التكلفة المتغيرة تكون متساوية ٠

وقد تأخذ بعض دوال التكلفة المحددة اشكالا عديدة مختلفة ٠ واحد هذه الاحتمالات والذى يقدم للاقتصاديون بعض الخواص التي يرغبون في افتراضها ، يوضحاه الشكلين (٤ــ٦) و (٤ــ٧) ٠



شكل (٤ - ٧)



شكل (٤ - ٦)

ان اجمالى التكلفة يكون دالة مكعبة بدلالة الناتج ، واما ATC, AVC, MC فانها منحنيات من الدرجة الثانية والتى تنخفض فى البداية ثم ترتفع كلما توسع الانتاج ويصل MC الى حده الادنى قبل ATC وAVC ويصل AVC الى حده الادنى قبل ATC ويمكن للقارئ التحقق من ان منحنى MC يمر خلال نقط الحد الادنى لمنحنيات AVC وكذلك ATC [1] وان منحنى AFC يكون على شكل قطع زائد قائم rectangular hyperbola بغض النظر عن اشكال منحنيات التكلفة الاخرى وحيث ان التكلفة الثابتة منتشرة على وحدات مساحة اكبر كلما اتسع الانتاج فان AFC سوف ينخفض باطراد والمسافة العمودية بين منحنى AFC ومنحنى AVC تساوى AFC وعليه فانها تنخفض كلما ازداد الانتاج .

مثال : ان دالة الانتاج $q = Ax_1^{\alpha}x_2^{\beta}$ بالقيم تعطينا دالة التكلفة الاجماليه التالية :

$$C = aq^{1/(\alpha+\beta)}$$

بحيث ان :

$$a = (\alpha+\beta)\left(\frac{r_1^{\alpha}r_2^{\beta}}{A\alpha^{\alpha}\beta^{\beta}}\right)^{1/(\alpha+\beta)}$$

ودالة التكلفة هذه تكون محدبة وخطيه او تكون مقعرة كلما كانت $(\alpha+\beta)$ اقل من او تساوى او أكبر من الوحدة على التوالى ، ويكون AC و MC :

$$AC = aq^{(1-\alpha-\beta)/(\alpha+\beta)} \qquad MC = \frac{a}{(\alpha+\beta)}q^{(1-\alpha-\beta)/(\alpha+\beta)} = \frac{1}{(\alpha+\beta)}AC$$

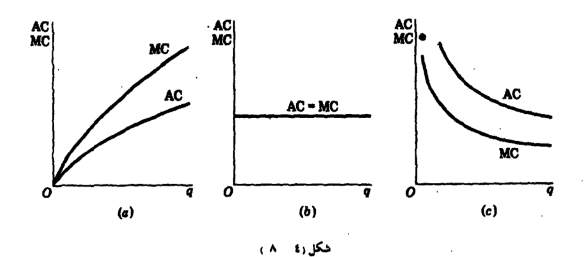
وشكل (٤ــ٨ أ) يعطى AC وMC للحالة $\alpha+\beta<1$ بحيث ان دالة الانتاج تكون مقعرة بانضباط وتكون دالة التكلفة الاجمالية محدبة بانضباط ويكون AC وMC فى تزايد بحيث ان $MC > AC$ فى كل مكان . اما شكل (٤ــ٨ ب) فانه يوضح الحالة $\alpha+\beta=1$.

بحيث ان دالة التكلفة الاجمالية تكون دالة خطية وان AC وMC ثابتان ومتساويان واخيرا فان شكل (٤ــ٨ د) يوضح الحالة $\alpha+\beta>1$ بحيث ان دالة التكلفة الاجمالية تكون مقعرة بانضباط ، وان AC و MC يكونان فى انخفاض منتظم بحيث ان $AC > MC$ فى كل مكان .

يمثل الشكل (٤ــ٨ أ) القول العام الذى ينص على ان اى دالة انتاج مقعرة بانضباط تستطيع ان تولد دالة تكلفة اجمالية محدبة بانضباط . وبتفاضل شروط الدرجة الاولى للحصول على التكلفة الاقل تفاضلا تام والمعطى بالمعادلة (٤ــ١٧) وباعادة ترتيب الحدود نحصل على :

---

(١) ضع اشتقاق ATC و (او AVC) يساوى صفرا ثم ضع المعادلة فى الوضع الذى يوضح المساواة بين ATC (او AVC) وبين (MC) .



شكل (٤ ـ ٨)

$$\lambda f_{11}\, dx_1 + \lambda f_{12}\, dx_2 + f_1\, d\lambda = dr_1$$
$$\lambda f_{21}\, dx_1 + \lambda f_{22}\, dx_2 + f_2\, d\lambda = dr_2$$
$$f_1\, dx_1 + f_2\, dx_2 = dq$$

وباستخدام قاعدة كريمر نتحصل على قيمة :

$$d\lambda = \frac{1}{\mathscr{D}}\left[(f_{21}f_2 - f_{22}f_1)\, dr_1 + (f_{12}f_1 - f_{11}f_2)\, dr_2 + \lambda \mathscr{H}\, dq\right] \quad (٤ـ٣١)$$

$$\mathscr{H} = f_{11}f_{22} - f_{12}^2 \text{ and } \mathscr{D} = 2f_{12}f_1f_2 - f_{11}f_2^2 - f_{22}f_1^2.$$

فاذا وضعنا $dr_1 = dr_2 = 0,$ نحصل على :

$$\frac{\partial\lambda}{\partial q} = \frac{\lambda\mathscr{H}}{\mathscr{D}} > 0$$

وبما ان $\lambda > 0$ هي MC وهي في نفس الوقت الاشتقاق الثاني لدالة التكلفة الاجمالية بحيث أنها موجبه بانتظام بسبب ان افتراض التقعر المنضبط يملي علينا بأن كلا $\mathscr{D}$ و $\mathscr{H}$ يكونان موجبتان .

ان ايراد صاحب المؤسسة الذى يبيع انتاجه بسعر ثابت هو ايضا بدلالة a function of مستوى الانتاج وعلى هذا فان ربحه سوف يكون ايضا بدلالة مستوى الانتاج :

$$\pi = pq - \phi(q) - b$$

وللحصول على الحد الاقصى من الربح ضع اشتقاقات المعادلة السابقة بالنسبه لـ q تساوى صفرا .

$$\frac{d\pi}{dq} = p - \phi'(q) = 0$$

وبتحريك MC الى الجانب الايمن

$$p = \phi'(q) \quad (٤ـ٣٢)$$

فصاحب المؤسسة لابد وان يساوى بين MC وسعر البيع الثابت للناتج ويستطيع صاحب المؤسسة أن يزيد من ربحة بتوسع انتاجه اذا كانت الاضافة الى ايراداته (p) مع بيع وحدة اخرى تربوا على الاضافى الى تكلفتة (MC).

ويتطلب شرط الدرجة الثانية للحصول على الحد الاقصى من الربح على :

$$\frac{d^2\pi}{dq^2} = -\frac{d^2C}{dq^2} < 0$$

وبالضرب فى (١ـ) وعكس اشارة اللامتساوية ، نحصل على :

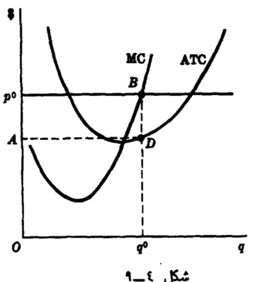
$$\frac{d^2C}{dq^2} > 0$$

ومن هذا نجد ان MC لابد وان يكون فى تزايد عند الناتج المؤدى الى الحصول على الحد الاعلى من الربح • فلو كان MC فى تناقص فان المساواة بين السعر و MC سوف يعطى نقطة الحد الادنى من الربح • وسوف يتحقق شرط الدرجه الثانية اذا كانت دالة التكلفة الاجمالية محدبة بانضباط عند النقطة التى يتحقق عندها شرط الدرجة الاولى وهذا يتطلب ان دالة الانتاج المستخدمة هنا تكون مقعرة بانضباط فاذا كانت دالة التكلفة الاجمالية محدبة بانضباط ضمن مجال ما فان الناتج الذى يتحقق عنده شرط الدرجه الاولى ، يكون ناتجا فريدا مؤديا للحصول على الحد الاعلى من الربح ضمن هذا المجال •

ان مستوى التكلفة الثابتة (b) لصاحب المؤسسة ليس له عموما اى تأثير على قراراتة بالحصول على الحد الامثل خلال فترة زمنية قصيرة ويجب رفعها بغض النظر عن مستوى انتاجة وكل ماهناك فانه سوف يضيف حدا ثابتا الى معادلة ربحة وسوف يختفى حد التكلفة الثابتة بعد التفاضل وسوف يكون MC مستقلا عن مستواه وبما ان شروط الدرجة الاولى والثانية للحصول على الحد الاقصى للربح موضوعة بدلالة MC فان مستوى الانتاج التوازنى equilibrium سوف لايتأثر بمستوى التكلفة الثابتة • وكان من الممكن اجراء التحاليل الرياضية فى هذا الجزء (٤ــ٢) على اساس تغير التكلفة فقط •

ان لمستوى التكلفة الثابتة اهمية فى تحليل الحصول على الحد الاقصى من الربح على المدى القصير فى حالة خاصة واحدة وهى الحالة التى يمتلكها صاحب المؤسسة ولكن لايعترف بها حساب التفاضل والتكامل calculus حيث كان حده الاعلى من الربح من انتاج مستوى ايجابى للناتج ، كمية سالبه (اى انه خسران) بقيمة مطلقة اكبر من كمية التكلفة الثابتة • ولا يحتاج صاحب المؤسسة ابدا أن يخسر أكثر من مقدار التكلفة الثابتة وسوف ينتج بخسارة فى المدى القصير اذا كانت خسارتة اقل من مقدار التكلفة

الثابتة ، بمعنى انه اذا كانت أيراداته تفوق على اجمالى التكلفة المتغيرة ، وباستطاعته تغطية جزء من نفقاته المبدئية على الدواخل الثابتة •



شكل ٤ــ٩

وشكل (٤ــ٩) يشرح هندسيا عملية الحصول على الحد الاقصى من الربح ويعطى تقاطع الخط المستقيم المرسوم من مستوى السعر الجارى(p^0) والجزء الاخذ فى الارتفاع من منحنىMC الناتج الامثل(q^0) وتعطى مساحة المستطيل Op^0Bq^0 ايرادات صاحب المؤسسة وتعطى مساحة المستطيل$OADq^0$ اجمالى التكلفة ، ومساحة المستطيل Ap^0BD تعطى الربح •

مثال : اعتبر الدالة التكعيبية لدالة التكلفة الاجمالية :

$$C = 0.04q^3 - 0.9q^2 + 10q + 5 \quad (٤ــ٣٣)$$

وافترض ان سعر q هو ٤ ريالات للوحدة الواحدة وبمساواة MC مع السعر :

$$0.12q^2 - 1.8q + 10 = 4$$

نحصل على المعادلة التربيعية :

$$q^2 - 15q + 50 = 0$$

وجزريهما هى $q = 10$ $q = 5$ نجد انه يوجد منتجين مختلفين يحققان شرط الدرجه الاولى للحصول على الحد الاعلى من الربح ولابد اذا من حساب معدل التغير فى MC لكلاهما ، مع العلم بان معدل تغير MC هو :

$$\frac{d^2C}{dq^2} = 0.24q - 1.8$$

ويكون سالبا لقيمة $q = 5$ وموجبا لقيمة $q = 10$ ونجد أيضا ان (عشرة وحدات من الناتج تعطى الربح الاعلى وان خمسة وحدات من الناتج تعطى الربح الادنى • ولكن

الربح بانتاج عشرة وحدات يكون سالبا ٠

$$\pi = 4q - (0.04q^3 - 0.9q^2 + 10q + 5)$$
$$= 40 - 55 = -15$$

وعليه فان منحنى ATC لصاحب المؤسسة يقع فوق خط السعر لكل منتج وان ربحه الاعلى هو خسارة مقدارها عشرة ريالات فعلية ان يوقف الانتاج حيث ان تكلفتة الثابتة (وهى تسوى خمسة ريالات) تكون اقل من اصغر خسارة يمكن له تجميلها من الانتاج ٠

دوال التكلفة فى المدى الطويل : Long-Run Cost Functions

دعنا نفترض ان مستويات الدواخل الثابتة لصاحب المؤسسة تكون ممثلة بالمتغير الثابت القيمة k والذى يعطينا حجم المصنع "size of his plant" فكلما كانت قيمة k, كبيرة كلما كان حجم المصنع أكبر ولذلك فان مشاكل صاحب المصنع فى المدى القصير تنحصر فى كيفية الاستفادة من حجم المصنع الافادة المثلى optimal utilization ولكنه فى المدى الطويل حر فى تغير k واختيار مصنع بالحجم الامثل optimum size وتعتمد اشكال دوال التكلفة والانتاج لصاحب المصنع على حجم المصنع ويمكن عثريرها بشكل فريد فى المدى القصير ٠ اما فى المدى الطويل ، فان صاحب المصنع يستطيع ان يختار بين دوال الانتاج والتكلفة باشكالها المختلفة وعدد البدائل امامه يساوى عدد القيم المختلفة التى تاخذها k, وحالما يختار اشكال هذه الدوال ، بمعنى انه يختار قيمة للمتغير k, فانه سوف يواجه بمسائل الحصول على الحد الاعلى التقليدية فى المدى القصير ٠

مثال : اعتبر حالة الرجل الذى يدير باقلال فحجم مكانه هو عدد الاقدام المربعه للمحل الذى يمتلكه فاذا افترضنا ان البدائل المحتملة له هى 5000 ، 10,000 ، 20,000 قدم مربع وانه يمتلك الان فقط 10,000 وهذه نتيجة لقرار عمل فى الماضى على المدى الطويل ٠ فعندما ياتى الوقت لتغيير البقالة سوف يكون صاحب البقالة قادرا على ان يختار الحجم المناسب للبقالة الجديدة ولكن اذا لم تتغير الشروط منذ قراره الماضى فانه سوف يختار ثانية بقالة بحجم 10,000 قدم مربع ٠ ولكن اذا وجد ان البقالة بدأت فى الازدحام ووجد ان توقعاتة على المدى الطويل ان مبيعاته سوف تزداد فانه فى هذه الحاله سوف يقوم ببناء بقالة بحجم 20,000 قدم مربع وقد يقع تحت ظروفه تضطره الى تقليص حجم البقاله الى 5000 قدم مربع ولكنه حالما يبنى المحل الجديد ، فان مشكلته ستكون الاستفاده التامه من حجم المحل ٠

افترض ان k تتغير باستمرار ثم ضعها كمتغير فى دالة الإنتاج ، ومعادلة التكلفه ودالة مجرى التوسع :

$$q = f(x_1, x_2, k)$$
$$C = r_1x_1 + r_2x_2 + \psi(k)$$
$$0 = g(x_1, x_2, k)$$

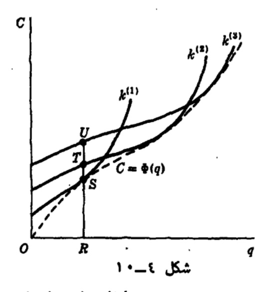
وبهذا تصبح التكلفه الثابته دالة متزايدة بدلالة حجم المصنع $\psi'(k) > 0$ وتعتمد اشكال خطوط تساوى الكميات وتساوى التكلفه وشكل مجرى التوسع على القيمه المعطاه للمتغير k ويمكن الاستفادة، عموما من اثنين من العلاقات السابقه للتخلص من x_1 و x_2 ووضع التكلفه الاجماليه بدلالة مستوى الناتج وحجم المصنع :

$$C = \phi(q, k) + \psi(k) \qquad (٤_٣٤)$$

وتصف هذه المعادلة منحنيات التكلفه الاجماليه والناتجه من اعطاء قيم مختلفه للمتغير k .

وحينما تعيين قيمة محددة لرمز حجم المصنع $k = k^{(0)}$ فان المعادلة (٤ــ٣٤) تكافىء دالة التكلفه الاجمالية والمعطاة بالمعادلة (٤ــ٢٩) وينطبق عليها تحاليل المدى القصير.

وتعطى دالة التكلفه الاجمالية لصاحب المصنع على المدى الطويل التكلفه الادنى لانتاج كل مستوى من الناتج اذا كان حرا فى تغيير حجم المصنع . وهذا لانه لاى مستوى ناتج



شكل ٤ــ١٠

معطى ــ فان صاحب المصنع سوف يقوم بحساب التكلفه الاجماليه لكل حجم مصنع محتمل ثم يختار ذلك الحجم الذى يعطيه التكلفه الاجماليه الادنى . ويحتوى الشكل (٤ــ١٠) على منحنيات التكلفه الاجماليه والمقابلة لثلاثة احجام مختلفه للمصنع فيستطيع صاحب المصنع انتاج الكميه **OR** باى حجم للمصنع وسوف تكون تكلفته الاجماليه هى **RS** لحجم المصنع $k^{(1)}$ وتكون **RT** للحجم $k^{(2)}$ ويعطى الحجم **RU** $k^{(3)}$ تكلفة الانتاج

الادنى للكميه OR وعليه فان النقطه S تقع على منحنى التكلفة الاجماليه للمدى الطويل وتتكرر هذه العمليه لكل مستوى من مستويات الانتاج ، وتعرف منحنى التكلفه الاجماليه للمدى الطويل بانه المحل الهندسي لنقط التكلفه الادنى •

ويمثل منحنى التكلفه للمدى الطويل الغلاف الخارجي envelope لمنحنيات التكلفه للمدى القصير فيمس كل واحد منها ولا يقطع اى واحد منها •
فاذا كتبنا معادلة مجموعة افراد دوال التكلفه للمدى القصير (معادلة ٤ـ٣٤) على النمط الضمنى implicit form فاننا نحصل على :

$$C - \phi(q,k) - \psi(k) = G(C,q,k) = 0 \qquad (٣٥\text{ـ}٤)$$

واذا وضعنا اشتقاقاتها الجزئيه بالنسبه للمتغير k مساويه لصفر ، نحصل على

$$G_k(C,q,k) = 0 \qquad (٣٦\text{ـ}٤)$$

ونحصل على معادلة المنحنى المغلف (منحنى التكلفه على المدى الطويل envelope curve بالتخلص من k فى المعادلة (٤ـ٣٥ و (٤ـ٣٦) ونحل لقيمة C بدلالة q (راجع الجزء A-2) :

$$C = \Phi(q)$$

ان التكلفه الاجماليه للمدى الطويل تمثل دالة عنصرها هو مستوى الناتج ، اذا اعطينا من الشرط بان كل مستوى ناتج قد تم انتاجه فى مصنع له حجم امثل ولا يعتبر منحنى التكلفه للمدى الطويل على انه جزء منفصل من منحنيات التكلفه للمدى القصير ولكنه صمم من النقاط على منحنيات المدى القصير • وبما ان k افترض ان تكون متغيره باستمرار فان لمنحنى التكلفه على المدى الطويل (انظر الشكل ٤ـ١٠) نقطة واحدة فقط مشتركه مع كل واحد من منحنيات التكلفه للمدى القصير •

وبما ان معدل التكلفه AC يساوى اجمالى التكلفه مقسوما على مستوى الناتج فانه يمكن الحصول على معدل التكلفه الادنى لانتاج مستوى معين بنفس حجم المصنع الذى تم فيه انتاج نفس المستوى من المنتج بالتكلفه الاجماليه الاقل • ويمكن اشتقاق منحنى AC للمدى الطويل بقسمة اجمالى التكلفه للمدى الطويل على مستوى الانتاج ، او باقامة المغلف لمنحنيات AC للمدى القصير • وكلا الطريقتين تؤدى الى نفس النتيجة •

ومن الممكن رسم منحنى AC للمدى الطويل برسم اشتقاق التكلفه الاجماليه للمدى الطويل بالنسبه لمستوى الناتج ، او يمكن اشتقاقه من منحنيات MC للمدى القصير وعلى كل حال، فان منحنى MC للمدى الطويل ليس هو مغلف منحنيات MC للمدى القصير• لان MC للمدى القصير يساوى معدل التغير للتكلفه المتغيره للمدى القصير بالنسبه مستوى الناتج ، وان MC للمدى الطويل هو معدل التغير للتكلفه الاجماليه بفرض ان كل التكلفات

قابله للتغيير • وعليه فان اجزاء من MC للمدى القصير قد تقع اسفل من منحنى MC للمدى الطويل • ويمكن تعريف منحنى MC للمدى الطويل بان المحل الهندسي لتلك النقاط على منحنيات MC للمدى القصير والتى تقابل الحجم الامثل للمصنع لكل منتج(١) وتكافوء طريقتى اشتقاق منحنى MC للمدى الطويل تكون واضحه من الشكل (٤ـ١٠) حيث ان منحنى التكلفه الاجماليه للمدى الطويل تكون ملامسا لكل منحنى للمدى القصير عند الناتج الذى من اجله منحنى المدى القصير يمثل حجم المصنع الامثل وبما اننا عرفنا التكلفات الحديه MCs على انها ميل خطوط التماس لهذه المنحنيات فان التكلفات الحديه للمدى الطويل والمدى القصير تكون متساويه عند كل نقطة •

افترض ان صاحب المصنع يرغب فى بناء مصنع لاستخدامه خلال عددا من الفترات ذات المدى القصير وانه يتوقع الحصول على نفس السعر لمنتجاته خلال كل فتره من فترات المدى القصير • وبما ان الظروف سوف تبقى كما هى ، غير قابله للتغيرمن فترة لاخرى فانه سوف ينتج نفس المستوى فى كل فترة • وربحه خلال واحدة من الفترات يكون الفرق بين ايراداته وتكلفته مع تغير حجم المصنع :

$$\pi = pq - \Phi(q)$$

وبوضع اشتقاق π مساويا لصفر :

$$\frac{d\pi}{dq} = p - \Phi'(q) = 0$$

$$p = \Phi'(q)$$

وهكذا نجد انه بمساواة MC على المدى الطويل بالسعر نحصل على الارباح المثلى اذا كان MC للمدى الطويل فى تزايد (شرط الدرجه الثانيه) وحالما نقرر مستوى الانتاج الامثل فانه يمكن ايجاد القيمة المثلى للمتغير k من المعادلتين (٤ـ٣٥) و (٤ـ٣٦)

مثال : اعتبر مجموعة منحنيات التكلفه للمدى القصير والتى تكونت من :

$$C = 0.04q^3 - 0.9q^2 + (11-k)q + 5k^2 \quad (٤ـ٣٧)$$

فاذا كانت قيمة $k = 1$ فان منحنى التكلفه للمدى القصير يكون هو المعطى بالمعادلة (٤ـ٣٣) وبوضع الاشتقاق الجزئى للشكل (النمط) الضمنى للمعادلة (٤ـ٣٧) بالنسبه للمتغير k مساويا لصفر :

$$G_k(C, q, k) = q - 10k = 0$$

وبحلها نحصل على $k = 0.1q$ وبالتعويض فى المعادلة (٤ـ٣٧) نحصل على دالة

---

(١) انه من الخطا رسم منحنى MC للمدى الطويل باختيار النقاط على منحنيات MC للمدى القصير والتى تقابل مستوى الانتاج الامثل (وهى النقطة الادنى لـ AC لكل حجم من احجام المصنع•

التكلفه للمدى الطويل •

$$C = 0.04q^3 - 0.9q^2 + (11 - 0.1q)q + 5(0.1q)^2$$
$$= 0.04q^3 - 0.95q^2 + 11q$$

بحيث ان التكلفه الثابته للمدى الطويل تساوى صفر •

فاذا افترضنا ان سعر الناتج يساوى ٤ ريالات ، وبوضع هذا السعر مساويا للتكلفه الحديه MC للمدى الطويل ، نحصل على :

$$4 = 0.12q^2 - 1.9q + 11$$

والتى تعطينا المعادلة التربيعيه التاليه :

$$0.12q^2 - 1.9q + 7 = 0$$

وجزريهما $q = 10$ و $q \approx 5.83$ ونجد الحد الاعلى من الربح عند مستوى انتاجى يساوى $k = 1$ وحدات وبالاستفاده من العلاقة $k = 0.1q$ نتحصل على حجم المصنع الامثل وهو $k = 1$ •

ونجد ان ربح صاحب المصنع على المدى القصير هو :

$$\pi = pq - (0.04q^3 - 0.95q^2 + 11q) = 40 - 55 = -15$$

وهذا يشبه المثال السابق حيث ان الربح الاقصى للعمل هو خسارة مقدارها 15 ريال وعليه فان صاحب المصنع غير قادر على اكتساب ربح وعليه فسوف لا يبنى مصنع باى حجم ولكن تختلف الحاله اذا زاد السعر ليصبح 6 ريالات فبوضع MC للمدى الطويل مساويا للسعر نحصل على المعادلة التربيعية :

$$0.12q^2 - 1.9q + 5 = 0$$

وجزريهما : $q = 12.5.$ و $q \approx 3.3$ فنجد ان الربح الاقصى يتحقق عند انتاج 12.5 وحدة وهو موجب لهذا الحجم :

$$\pi = 75 - 67.1875 = 7.8125$$

وسوف يبنى صاحب المصنع مصنعا للحجم الامثل وهو $(k = 1.25)$.

٤ - ٥ المنتجات المشتركة : JOINT PRODUCTS

ان بعض عمليات الانتاج سوف تؤدى الى انتاج اكثر من منتج واحد فعملية مثل تربية الغنم تمثل مثالا تقليديا لمثل هذه العمليه • فبالامكان انتاج الصوف ولحم الغنم بنسب مختلفه وبعملية انتاجيه واحده [١] وتميز حالة المنتجات المشتركه على اساس تقنــى فنى

(١) ان عملية انتاج اكثر من منتج واحد لا تتطلب تحاليل متوسعة الا اذا كانت تنتج بنسب مختلفه • فاذا كان هناك منتجان ينتجان بنسبة ثابته $q_1/q_2 = k$ حيث ان k ثابت من الثوابت ، فان التحاليل لمنتج واحد كافيه ويمكن تطبيقها في مثل هذه الحاله عن طريق تعريف وحدة واحدة من منتج مركب على انه k وحدة من Q_1 ووحده واحده من Q_2 بسعر $kp_1 + p_2$ وتعامله على اساس انه منتج واحد فقط •

وليس على اساس تنظيمي وانه يوجد عندما يكون إثنان او اكثر من المنتجات مستقله فنيا • وعلى هذا فان الحالات التي ينتج فيها مصنعا معينا سلعتين او اكثر مستغلتان فنيا يكون مستبعدا على حسب هذا التعريف •

مفاهيم أساسية : Basic Concepts

اعتبر الحالة البسيطة التي يستخدم فيها صاحب المصنع داخلا واحدا هو(X)لانتاج منتجين هما Q_1 و Q_2 فدالة انتاجية الضمنيه تكون :

$$H(q_1, q_2, x) = 0 \quad (٤\text{—}٣٨)$$

حيث ان q_1, q_2، و x يمثلون ، على التوالي الكميات من Q_1, Q_2, X ولنفترض ان المعادلة (٤—٣٨) يمكن حلها بوضوح explicitly لقيم x :

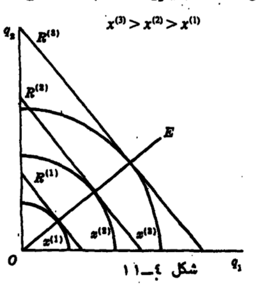
$$x = h(q_1, q_2) \quad (٤\text{—}٣٩)$$

وهذة المعادلة تنص على ان تكلفة الانتاج بالنسبه للداخل X تكون بدلالة كميتـــي المنتجين • ومن المتبع افتراض ان المعادلة(٤—٣٩) تكون دالة تزايديه ذات قيمـــه موجبه ضمن مجال بحيث ان q_1 و q_2 يكونان موجبتان او غير سالبتان : ونفترض ، بالاضافه لما سبق ان (٤—٣٩) تكون شبه — محدبه بانضباط منتظم للحصول على الحد الامثل المقيد ، وان تكون محدبه بانضباط للحصول على الحد الاقصى مـــن الربح وتعرف منحنى تحويل الناتج *product transformation curve* بانها المحل الهندسي لمجموعات النواتج والتي يمكن تأمينها من الدخل المعطى X :

$$x^0 = h(q_1, q_2)$$

ويعطينا الشكل (٤—١١) ثلاثة من افراد هذا المنحنى وكلما بعد المنحنى من نقطة الاصل ، كلما كبر الداخل X الذى يكون مقابلا لهذ المنحنى:

$$x^{(3)} > x^{(2)} > x^{(1)}$$



شكل ٤—١١

ان ميل خط التماس لنقطة ما على منحنى تحويل الناتج هى المعدل التى يجب التضحيه بالكميه ( ) عنده للحصول على كميه اكثر من Q_1 Q_2 بدون تغيير فى الداخل X وتعرف سالب الميل على انه معدل تحويل الناتج rate of product transformation (RPT)

$$RPT = -\frac{dq_2}{dq_1}$$

وباخذ التفاضل الكامل للمعادله (٤ـ٣٩) نحصل على :

$$dx = h_1\, dq_1 + h_2\, dq_2$$

وبما ان $dx = 0$ للتحركات على خط تحويل الانتاج ، فان :

$$RPT = -\frac{dq_2}{dq_1} = \frac{h_1}{h_2} \qquad (٤٠ـ٤)$$

وهذا يعنى ان RPT عند نقطه ما على منحنى تحويل الانتاج يساوى النسبه بين التكلفة الحديه Q_1 بدلالة X والتكلفه الحديه لـ Q_2 بدلالة X عند تلك المنطقه .

ونستطيع ان نعبر ، ايضا كبديل ، عن RPT بدلالة MP ونطبق فى هذه الحالة قاعدة مقلوب الدالة :

$$\frac{\partial q_1}{\partial x} = \frac{1}{h_1} \qquad \frac{\partial q_2}{\partial x} = \frac{1}{h_2} \qquad (٤١ـ٤)$$

وبالتعويض فى (٤ـ٤٠) نحصل على :

$$RPT = -\frac{dq_2}{dq_1} = \frac{\partial q_2/\partial x}{\partial q_1/\partial x} \qquad (٤٢ـ٤)$$

ومن هذه المعادله يتضح ان RPT يساوى النسبه بين MP لـ X فى انتاج Q_2 و MP لـ X فى انتاج Q_1. وافتراض ان المعادله (٤ـ٣٩) تكون تزايديه يضمن ان الانتاجين الحديين يكونا موجبين وهذا ما تتطلبه اى عمليه انتاجيه بنيت على اساس العقل .

وتضمن لنا ايضا تزايدية المعادله (٤ـ٣٩) ان ميل منحنيات تحويل الانتاج تكون سالبه وان RPT يكون موجبا .

وبأخذ الاشتقاق التام للمعادله (٤ـ٤٢) نحصل على معدل تغير RPT على النحو التالى :

$$-\frac{d^2q_2}{dq_1^2} = \frac{1}{h_2^3}(h_{11}h_2^2 - 2h_{12}h_1h_2 + h_{22}h_1^2) \qquad (٤٣ـ٤)$$

ويضمن لنا افتراض ان المعادله (٤ـ٣٩) شبه ـ محدبه بانضباط منتظم ان المعادلة (٤ـ٤٣) تكون موجبه ، بمعنى ان RPT تزداد كلما تحركنا من اليسار الى اليمين على منحنى تحويل الانتاج . وكلما انتجنا كمية اكبر من Q_1 وكمية اقل من Q_2 باستخدام كمية ثابته من الداخل فان كميات اكثر واكثر من Q_2 يجب ان يضحى بها بكل وحدة من Q_1

وبما ان المعادله (٤ـ٤٣) موجبه فان منحنى تحويل الانتاج يعطى q_2 بدلالة q_1

وان الاشتقاق الثانى يكون سالبا ، بمعنى ان q_2 تكون مقعرة بانضباط بدلالة q_1
ونجد ان بعض منحنيات تحويل الانتاج تكون منحنيه بعيدا عن نقطة الاصل كما هو موضح فى الشكل (٤ـ١١) السابق .
ان مجموعة منحنيات تحويل الانتاج الموضحه فى الشكل (٤ـ١١) قد تحصلنا عليها من دالة الانتاج الضمنيه التاليه :

$$q_1^2 + q_2^2 - x = 0$$

وعليه فان منحنيات تحويل الانتاج تمثل دوائر متحدة المركز concentric circles. علـــى النمط التالى :

$$x^0 = q_1^2 + q_2^2$$

بحيث ان $RPT = q_1/q_2$ فاذا كانت $q_1, q_2 > 0$ فان ميل منحنيات تحويل الانتاج تكون سالبه ، ويكون RPT موجبا وفى هذه الحاله يكون معدل تغير RPT والمعطى بالمعادله (٤ـ٤٣) هو

$$(q_1^2 + q_2^2)/q_2^3$$

عملية الحصول على الحدى الأعلى من الإيرادات بقيود :

Constrained Revenue Maximization

اذا قام صاحب المصنع ببيع انتاجه باسعار ثابته فان المعادله الخطيه التاليه تعطى دخله R :

$$R = p_1q_1 + p_2q_2 \qquad (٤ـ٤٤)$$

بحيث ان p_1 و p_2 هما سعرى Q_1 و Q_2 على التوالى . ونعرف خط تساوى الايرادات isorevenue line (وهو نظير خط تساوى الكمبات) بانه المحل الهندسى لمجموعـــات الانتاج التى سوف تكسب صاحبها دخلا محددا .
ونستعرض ثلاثة من هذه الخطوط فى الشكل (٤ـ١١) وهى عبارة عن خطوط متوازيه بميل يساوى سالب النسبه بين اسعار المنتجات $(-p_1/p_2)$.

ولحل مسألة الحصول على الحد الاعلى (تحت قيد) لصاحب المصنع الذى يرغب فى الحصول على الحد الاعلى من الايرادات بالنسبه لداخل معين من X نكون الدالة التاليه

$$W = p_1q_1 + p_2q_2 + \mu[x^0 - h(q_1, q_2)]$$

بحيث ان μ تمثل مضروبا للقرانج غير معين وبوضع الاشتقاقات الجزئيه لهذه الحاله مساويه لصفر نحصل على :

$$\frac{\partial W}{\partial q_1} = p_1 - \mu h_1 = 0$$

$$\frac{\partial W}{\partial q_2} = p_2 - \mu h_2 = 0$$

$$\frac{\partial W}{\partial \mu} = x^0 - h(q_1, q_2) = 0$$

وبتحريك الحدود الثانيه فى المعادلتين الاوليتين الى الجانب الايمن ثم قسمة الاول على الثانيه ، نحصل على :

$$\frac{p_1}{p_2} = \frac{h_1}{h_2} = \text{RPT}$$

او بالتعويض من (٤ـ ٤١) نحصل على :

$$\frac{p_1}{p_2} = \frac{\partial q_2/\partial x}{\partial q_1/\partial x} = \text{RPT} \qquad (٤ـ ٤٥)$$

وعلى هذا فان RPT لابد وان يساوى نسبه الاسعار الثابته وبالمعنى الهندسى ، فان منحنى تحويل الانتاج يجب ان يكون ماسا لخط تساوى الايرادات.

ويمكن النص على شروط الدرجة الاولى على النحو التالى :

$$\mu = \frac{p_1}{h_1} = \frac{p_2}{h_2}$$

او بالتعويض من (٤ـ ٤١) نحصل على :

$$\mu = p_1 \frac{\partial q_1}{\partial x} = p_2 \frac{\partial q_2}{\partial x}$$

وهذه تعنى ان قيمة MP بالنسبه لـ X فى انتاج كل منتج يجب ان تساوى μ والتى هى اشتقاق R (الايرادات بالنسبه لـ x مع ثبات الاسعار [١] . ويتطلب شرط الدرجه الثانيه ان تكون محدد هيسيان موجبه :

$$\begin{vmatrix} -\mu h_{11} & -\mu h_{12} & -h_1 \\ -\mu h_{21} & -\mu h_{22} & -h_2 \\ -h_1 & -h_2 & 0 \end{vmatrix} > 0$$

---

(١) نحصل على التفاضل الكلى للمعادله(٤ـ ٤٤) فى هذه الحاله كما يلى:

$$dR = p_1\,dq_1 + p_2\,dq_2$$

او بتعويض $p_1 = \mu h_1$ و $p_2 = \mu h_2$, $dR = \mu(h_1\,dq_1 + h_2\,dq_2)$ وبقسمة هذه على تفاضل المعادلة (٤ـ ٤٤) فان الاشتقاق التام للايرادات R بالنسبه لـ X مع ثبات الاسعار تكون :

$$\frac{dR}{dx} = \frac{\mu(h_1\,dq_1 + h_2\,dq_2)}{h_1\,dq_1 + h_2\,dq_2} = \mu$$

وتسمى الايراد الحدى للمنتج marginal-revenue product

وبعد فك هذه المحدده نحصل على :

$$\mu(h_{11}h_2^2 - 2h_{12}h_1h_2 + h_{22}h_1^2) > 0$$

وبما ان $\mu > 0$ فان :

$$(h_{11}h_2^2 - 2h_{12}h_1h_2 + h_{22}h_1^2) > 0$$

وبما ان $h_2 > 0$ كما هو مطلوب من شرط الدرجه الاولى ، فانه يتبع من المعادله (٤ــ٤٣) ان شرط الدرجه الثانيه يتطلب ان لمنحنى تحويل الانتاج معدلا متزايدا عند النقطة التى يتحقق عندها شروط الدرجه الاولى . فاذا كانت المعادله (٤ــ٣٩) شبه محدبه بانضباط ضمن مجال ما ، فان اى نقطه يتحقق عندها شروط الدرجه الاولى تكون نقطه حد اعلى فريد من الايرادات (تحت قيد ضمن المجال المعطى) .

وقد يرغب صاحب المصنع فى تخفيض كمية X الضروريه للحصول على ايرادات معينه ففى هذه الحاله ، فانه سوف يقوم بعملية الحصول على الحد الادنى من المعادلـه (٤ــ٣٩) تحت قيد ايراداته وبالمعنى الهندسى، فانه يرغب فى الوصول الى ادنى منحنى من منحنيات تحويل الانتاج والذى له نقطه مشتركه مع خط معين من خطوط تساوى الايرادات . اما فى حاله رغبته الحصول على الحد الاعلى من ايراداته (تحت قيد) فانه يرغب فى الوصول الى اعلى خط من خطوط تساوى الايرادات والذى له نقطة مشتركة مع منحنى معين من منحنيات تحويل الانتاج . فاذا كانت منحنيات تحويل الانتاج مقعرة بانضباط ، فان كل نقطه تماس بين خط تساوى الايرادات ومنحنى تحويل الانتاج تمثل الحل لكلا من مسالة الحصول على الحد الاعلى من الايرادات (تحت قيد) ومسالة الحصول على الحد الادنى للداخل (تحت قيد) ونسمى المحل الهندسى لجميع نقاط التماس هذه (انظر OE فى الشكل ٤ــ١١) مجرى توسع الناتج **output expansion path** مشابها فى التفسير لمجرى توسع الداخل **input expansion path** للمؤسسه ذات منتج واحد **single-product firm** .

الحصول على الحد الأعلى من الربح : Profit Maximization

فاذا عبرنا عن الربح بواسطة q_1 و q_2 فان :

$$\pi = p_1q_1 + p_2q_2 - rh(q_1, q_2)$$

ثم وضعنا اشتقاقاته الجزئيه مساويه للصفر ، نحصل على:

$$\frac{\partial\pi}{\partial q_1} = p_1 - rh_1 = 0$$

$$\frac{\partial\pi}{\partial q_2} = p_2 - rh_2 = 0$$

وبتحريك حدود السعر الى الجانب الايمن ثم القسمه على التكلفات الحديه بالنسبـه

ل X :

$$r = \frac{p_1}{h_1} = \frac{p_2}{h_2}$$

او بالتعويض من المعادله(٤ـ٤١) نحصل على :

$$r = p_1 \frac{\partial q_1}{\partial x} = p_2 \frac{\partial q_2}{\partial x} \qquad (٤ـ٤٦)$$

ولابد من مساواة قيمة MP ل X لانتاج مل واحد من المنتجات مع سعر X (١) ويستطيع صاحب المصنع زيادة ربحه بزيادة استخدامه للداخل X اذا كانت عائداته فى انتاج اى من المنتجات غوق تكلفته •

وتتطلب شروط الدرجه الثانيه بان :

$$-rh_{11} < 0 \qquad \begin{vmatrix} -rh_{11} & -rh_{12} \\ -rh_{21} & -rh_{22} \end{vmatrix} > 0$$

وبفك المحددة الثانيه ، نحصل على :

$$r^2(h_{11}h_{22} - h_{12}^2) > 0$$

وبما ان $r > 0$, فان شروط الدرجه الثانيه يمكن النص عليها كما يلى :

$$h_{11} > 0 \qquad h_{11}h_{22} - h_{12}^2 > 0 \qquad (٤ـ٤٧)$$

وهما معا يتطلبان ان $h_{22} > 0$ وان التكلفه الحديه لكل ناتج بالنسبه للداخل X يجب ان تكون متزايده • وتتطلب شروط المعادله (٤ـ٤٧) ان تكون علاقة الانتاج (٤ـ٣٩) محدبه بانضباط بالجوار حول النقطه التى تتحقق عندها شروط الدرجه الاولى (٤ـ٤٦) فاذا كانت(٤ـ٣٩) محدبه بانضباط فى كل مكان ، فان اى حد اعلى يمكن الحصول عليه سوف يكون حداً اعلى شاملا .global maximum •

اعتبر عملية الحصول على الحد الاعلى من الربح لصاحب مصنع بحيث ان منحنيات تحويل الانتاج تكون معطاة بمجموعة الدوائر المتحده المركز ، وعليه ربحه كالتالى:

$$\pi = p_1q_1 + p_2q_2 - r(q_1^2 + q_2^2)$$

وبوضع الاشتقاقات الجزئيه مساويه للصفر ، نحصل على :

$$\frac{\partial \pi}{\partial q_1} = p_1 - 2rq_1 = 0 \qquad \frac{\partial \pi}{\partial q_2} = p_2 - 2rq_2 = 0$$

---

(١) وباتباع اشتقاقات المعادله (٤ـ٤٥) والملاحظه على صفحه(١٤٢ نجد انه ليس من المستغرب ان عمليه الحد الاعلى من الربح تتطلب ان تكون $r = dR/dx$. وهو المعدل الذى اذا اضفنا عنده وحدة اضافيه من X فان ايرادات صاحب المصنع سوف تزداد وانه يجب ان يكون مساويا للسعر •

ويمكن الحصول على شروط الدرجه الاولى كالتالى :

$$r = \frac{p_1}{2q_1} = \frac{p_2}{2q_2}$$

ونجد ان شروط الدرجه الثانيه (٤ـ٢٤) تتحقق بحيث ان :

$$2 > 0 \qquad 4 - 0 = 4 > 0$$

٤ – ٦ التعميم لـ m من المتغيرات :
GENERALIZATION TO *m* VARIABLES

انه من السهل تعميم النقاش عن المؤسسه (او الوحدة الانتاجيه = firm) لتغطى العمليات الانتاجيه والتى تحتوى على العدد n من الخوارج (الوحدات المنتجـه = outputs) والعدد n من الدواخل (او وحدات المواد الاوليه الضرورية للانتاج = inputs) بحيث انهما مختلفتان عن الصفر للحلول الغير بديهية (nontrivial solutions) ولقد افترضنا ان (٤ـ٤٨) تكون دالة متزايده بالنسبة لـ q's وان تكون متناقصه بالنسبه لـ x's وعلى هذا فان (٤ـ١) فى شكلها الضمنى تكون على الصورة التاليه $q - f(x_1, x_2) = 0$ وتكون (٤ـ٣٩) على الصورة التاليـــــــــــه : $h(q_1, q_2) - x = 0$ واخيرا افترضنا ان (٤ـ٤٨) تكون شبه ـ محدبه بانضباط منتظـم ضمن مجال نسبى .

الحصول على الحد الأعلى من الربح : Profit Maximization

نعرف الربح ، فى حالة n من المتغيرات بانه الفرق بين التكلفه الاجماليه مـــن مبيعات المنتجات والمنصرفات على الدواخل بالشكل التالى :

$$\pi = \sum_{i=1}^{s} p_i q_i - \sum_{j=1}^{n} r_j x_j \qquad (٤ـ٤٩)$$

ويرغب صاحب المؤسسه فى الحصول على الحد الاعلى من الربح تحت قيد القواعد الفنيــه المعـطاة له بدالة الانتاج بحيث ان :

$$J = \sum_{i=1}^{s} p_i q_i - \sum_{j=1}^{n} r_j x_j + \lambda F(q_1, \ldots, x_n)$$

وبوضع كل واحده من الـ $(s+n+1)$ من الاشتـقاقات الجزئيه مساويا لصفر :

$$\frac{\partial J}{\partial q_i} = p_i + \lambda F_i = 0 \qquad i = 1, \ldots, s \qquad (٤ـ٥٠)$$

$$\frac{\partial J}{\partial x_j} = -r_j + \lambda F_{s+j} = 0 \qquad j = 1, \ldots, n$$

$$\frac{\partial J}{\partial \lambda} = F(q_1, \ldots, x_n) = 0$$

بحيث ان $F_i(i = 1, \ldots, s+n = m)$ تكون هى الاشتقاق الجزئى للمعادله(٤ــ٤٨) بالنسبه للمتغير فى المركز ith .

فاذا اخترنا اى اثنين من ال s الاوائل من معادلات (٤ــ٥٠) حركنا الحدود الثانيه الى الجانب الايمن ، وقسمنا كل معادله بالاخرى ، نحصل على[1]:

$$\frac{p_j}{p_k} = \frac{F_j}{F_k} = -\frac{\partial q_k}{\partial q_j} \qquad j, k = 1, \ldots, s \qquad (٤ــ٥١)$$

نجد ان RPT بكل زوج من المنتجات (مع الاحتفاظ بمستويات النواتج الاخرىوالدواخل ثابته) يجبان يساوى النسبه بين اسعارهما . ولهذا فان للناتج فى المركز k والداخل فى المركز j تتطلب المعادله(٤ــ٥٠) بان يكون :

$$\frac{r_j}{p_k} = -\frac{F_{s+j}}{F_k} = \frac{\partial q_k}{\partial x_j} \qquad \text{او} \qquad r_j = p_k \frac{\partial q_k}{\partial x_j} \qquad \begin{matrix} k = 1, \ldots, s \\ j = 1, \ldots, n \end{matrix}$$

وبهذا فان قيمة الانتاج الحدى لكل داخل بالنسبه لكل ناتج تكون مساويه لسعرالداخل واخيرا اعتبر استخدام اثنين من الدواخل فتكون شروط الدرجه الاولى كالتالى :

$$\frac{r_j}{r_k} = -\frac{\partial x_k}{\partial x_j} \qquad j, k = 1, \ldots, n$$

وعلى هذا فان RTS لكل زوج من الدواخل (مع الاحتفاظ بمستويات الانتاج والدواخل ثابته) يجبان يساوى النسبه بين اسعارها . كما تتطلب شروط الدرجه الثانيه للحصول على الحد الاعلى من الربح ان تتعاقب اشارات محدده هيسيان على النحو التالى:

$$\begin{vmatrix} \lambda F_{11} & \lambda F_{12} & F_1 \\ \lambda F_{21} & \lambda F_{22} & F_2 \\ F_1 & F_2 & 0 \end{vmatrix} > 0, \ldots, (-1)^m \begin{vmatrix} \lambda F_{11} & \cdots & \lambda F_{1m} & F_1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \lambda F_{m1} & \cdots & \lambda F_{mm} & F_m \\ F_1 & \cdots & F_m & 0 \end{vmatrix} > 0 \qquad (٤ــ٥٢$$

وبضرب العمودين الاوليين من الصف الاول والـ$1/\lambda$ الاوائل من الاخير بالمقدار وبضرب اخر من كلا الصفين بالمقدار λ

$$\lambda \begin{vmatrix} F_{11} & F_{12} & F_1 \\ F_{21} & F_{22} & F_2 \\ F_1 & F_2 & 0 \end{vmatrix} > 0, \ldots, (-1)^m \lambda^{m-1} \begin{vmatrix} F_{11} & \cdots & F_{1m} & F_1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ F_{m1} & \cdots & F_{mm} & F_m \\ F_1 & \cdots & F_m & 0 \end{vmatrix} > 0$$

وبما ان $\lambda < 0$ من المعادله (٤ــ٥٠) نجد ان شروط الدرجه الثانيه تتطلب ان

$$\begin{vmatrix} F_{11} & F_{12} & F_1 \\ F_{21} & F_{22} & F_2 \\ F_1 & F_2 & 0 \end{vmatrix} < 0, \ldots, \begin{vmatrix} F_{11} & \cdots & F_{1m} & F_1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ F_{m1} & \cdots & F_{mm} & F_m \\ F_1 & \cdots & F_m & 0 \end{vmatrix} < 0$$

---

(١)لقد استفدنا هنا من قاعده الدالة الضمنيه : $F_i/F_j = -\partial q_j/\partial q_i$ (راجع الجزء A-2) .

وتتحقق شروط المعادله(٤ـ٥٣) عن طريق الافتراض فى المعادله(٤ـ٤٨) والذى ينص على انها شبه محدبه بانضباط منتظم ويضم هذا الافتراض كحالتين خاصتين الافتراضان بان المعادله(٤ـ١) تكون محدبه بانضباط وان المعادله(٤ـ٣٩) تكون ايضا محدبه بانضباط .. فاذا اعتبرنا حالة وجود ناتج واحد واثنين داخلين والممثله فى المعادلـه (٤ـ١) بحيث ان دالة الانتاج الضمنيه تكون $q - f(x_1, x_2) = 0$ وان الاشتقاقات الجزئيه هى $F_1 = 1,\ F_2 = -f_1$ وان $F_3 = -f_2$ ففى هذه الحاله تكون شروط المعادلـه (٤ـ٥٣) كالتالى :

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -f_{11} & -f_1 \\ 1 & -f_1 & 0 \end{vmatrix} < 0 \qquad \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -f_{11} & -f_{12} & -f_1 \\ 0 & -f_{21} & -f_{22} & -f_2 \\ 1 & -f_1 & -f_2 & 0 \end{vmatrix} < 0$$

وبفك كل محدده عن طريق العنصر الاخير فى صف المحدودة الاول ، ثم عن طريــق العنصر الاخير فى عمودها الاول ، ثم بضرب العمودين معا للمحدده الثانيه بالمقدار واخيرا ضرب المحدده الثانيه بالمقدار -1 لنحصل على :

$$f_{11} < 0 \qquad \begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{vmatrix} > 0$$

وهذه تتطلب بان تكون المعادله(٤ـ١) مقعرة بانضباط ويمكن تعميم هذه النتيجة على حالة النتائج الواحد باستخدام n من الدواخل • ويمكن ايضا اثبات ان شــروط المعادلة (٤ـ٥٣) للشكل الضمنى لعلاقة انتاج s من المنتجات باستخدام داخلا واحدا فقط تكون مكافئه للتحدب بانضباط للشكل الظاهر لهذه العلاقه •

نتائج التعويض : Substitution Effects

سوف يقوم صاحب المصنع بتغير مستويات الدواخل والخوارج نتيجه للتغيرات فــى اسعارهما وذلك من اجل تحقيق شروط الدرجه الاولى والمعطاه بالمعادله(٤ـ٥) وبتفاضل المعادله(٤ـ٥٠) تفاضلا تاما نحصل على :

$$\begin{aligned} \lambda F_{11}\, dq_1 + \cdots + \lambda F_{1m}\, dx_n + F_1\, d\lambda &= -dp_1 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \\ \lambda F_{m1}\, dq_1 + \cdots + \lambda F_{mm}\, dx_n + F_m\, d\lambda &= dr_n \\ F_1\, dq_1 + \cdots + F_m\, dx_n &= 0 \end{aligned} \qquad (٤ـ٥٤)$$

افترض الان ان تغيرات الاسعار تكون معطاه وان نعامل المعادله(٤ـ٥٤) على اساس

أنها مجموعه مكونه من $(m+1)$ معادله خطيه محتويه على $(m+1)$ من المتغيرات (وهى : $d\lambda$ dq_i $(i=1,\ldots,s)$, dx_j $(j=1,\ldots,n)$) وباستخدام قاعدة كريمر (انظر الجزء ١ــA)
لحل معادلات (٤ــ٥٤) بقيم dq_j وقيم dx_j

$$dq_j = \frac{-\mathcal{D}_{1j}\,dp_1 - \cdots + \mathcal{D}_{mj}\,dr_n}{\mathcal{D}} \qquad j=1,\ldots,s$$
$$dx_j = \frac{-\mathcal{D}_{1,s+j}\,dp_1 - \cdots + \mathcal{D}_{m,s+j}\,dr_n}{\mathcal{D}} \qquad j=1,\ldots,n \qquad (٤ــ٥٥)$$

حيث ان $\mathcal{D}$ هى محدده عوامل المعادله (٤ــ٥٤) وان $\mathcal{D}_{ij}$ هى العامل المرافق للصفر فى الصف i والعمود j وهذه المحدده تكون مثل أعلى درجه محدده من المحددات فى المعادله (٤ــ٥٢) .

ويمكن تحديد معدل التغير فى الكميه بالنسبه للسعر بقسمة طرفى المعادلة (٤ــ٥٥) على مشتق السعر مع مراعاة ان بقيمة المشتقات الاخرى للسعر تكون مساويه للصفر :

$$\frac{\partial q_j}{\partial p_k} = \frac{\partial q_k}{\partial p_j} = -\frac{\mathcal{D}_{kj}}{\mathcal{D}} \qquad j,k=1,\ldots,s$$
$$\frac{\partial x_j}{\partial r_k} = \frac{\partial x_k}{\partial r_j} = \frac{\mathcal{D}_{s+k,s+j}}{\mathcal{D}} \qquad j,k=1,\ldots,n \qquad (٤ــ٥٦)$$
$$\frac{\partial q_j}{\partial r_k} = \frac{\partial x_k}{\partial p_j} = \frac{\mathcal{D}_{s+k,j}}{\mathcal{D}} \qquad j=1,\ldots,s \quad k=1,\ldots,n$$

وبما ان $\mathcal{D}$ تكون محدده متماثلة فان الاشتقاقات الجزئية للمعادله (٤ــ٥٦) تكون ايضا متماثلة ولايوجد نظير لنتيجة الدخل الغير متماثلة للمستهلك فى نظريات الحصول على الحد الاعلى من الربح بالنسبه للمؤسسات وانما توجد النتيجه الاجماليه لها وهى عبارة عن نتيجة التعويض المتماثلة .

وقد تكون معظم الاشتقاقات الجزئية للمعادله (٤ــ٥٦) بأى أشارة (موجبه أو سالبه) أعتمادا على الشكل المحدد لدالة الانتاج الضمنية ويمكن فقط تحديد أشارات النتائج الخاصه بالأسعار . وعليه فأنه ينبع من المعادله (٤ــ٥٢) أن $\mathcal{D}_{jj}$ وأن $\mathcal{D}$ يجب أن يكونان مختلفتين فى الاشارات لقيم $j=1,\ldots,m$ وعليه فأن :

$$\frac{\partial q_j}{\partial p_j} > 0 \qquad j=1,\ldots,s \qquad \frac{\partial x_k}{\partial r_k} < 0 \qquad k=1,\ldots,n$$

وسوف ينتج عن زيادة فى سعر الناتج j مع الاحتفاظ بالاسعار الاخرى ثابته زيادة فى انتاج ذلك المنتج بينما ينتج عن زيادة فى سعر الداخل k أنخفاض فى استخدامه .

ملخص ما سبق : SUMMARY

ان دالة الانتاج للحالة التى يكون فيها منتجا واحدا واثنين متغيرين من الدواخل سوف تعطى مستوى امثل للناتج الذى يمكن تأمينه من كل خليط محتمل من الدواخل • ولقد افترض ان تكون هذه الدالة ذات قيمة موجبه وتزايدية ضمن مجال ما • ولأغراض محدده ، فقد افترض انها شبه ـ مقعرة بانضباط منتظم ، ولحالات اخرى تكون مقعرة بانضباط • ونتحصل على منحنيات الانتاج بمعادلة كمية احد الدواخل المتغيرة على انها ثابته ثم نعبر عن الناتج بدلالة كميات الدواخل الاخرى • وان مرونة ناتج ما من اجل داخل ماتكون هى معدل التغيير النسبى لكل واحد فى المائة تغير فى الداخل • وعرفنا منحنى تساوى الكميات بانه المحل الهندسى لجميع مجاميع الدواخل التى تعطى مستوا معينا من الناتج ، ووجدنا ان اى دالة انتاج شبه ـ مقعرة بانضباط منتظم نستطيع انتاج منحنيات تساوى الكميه بشكل محدب • ووجدنا ان مرونة التعويض تربط التغيرات النسبية لنسب الدواخل مع التغيرات النسبيه لـ RTS على اى منحنى من منحنيات تساوى الكميه •

وقد يرغب صاحب المؤسسة فى الحصول على الحد الاعلى من الانتاج حسب تكلفة معينة معطاه او انه قد يرغب فى الحصول على الحد الادنى من تكلفة انتاج مستوا معينا من الانتاج وتتطلب شروط الدرجه الاولى لكلا المسألتين ان RTSبين الدواخل لابد وان يساوى لنسبة اسعار هذه الدواخل • وبالمعنى الهندسيه ، فان كلا المسألتين تتطلبان التماس بين منحنى تساوى الكميات وخط تساوى التكلفه وتعرف المحل الهندسى لنقط التماس هذه بمجرى التوسع للمؤسسة • وتتطلب شروط الدرجة الثانية ان تكون دالة الانتاج شبه ـ مقعرة بانضباط منتظم فى جوار النقطة التى تتحقق عندها شروط الدرجة الاولى • وقد يسمح صاحب المؤسسة لمستوى الانتاج والتكلفة معا ان يتغيرا ويقوم هو بالحصول على الحد الاعلى من الربح •

وتتطلب شروط الدرجه الاولى بمساواة قيمة الانتاج المادى الحدى marginal physical product لكل داخل باسعار هذه الدواخل •

وتتطلب شروط الدرجة الثانية ان تكون دالة الانتاج محدبه بانضباط فى جوار النقطة التى تتحقق عندها شروط الدرجة الاولى ومعنى هذا ان الانتاج الحدى لكلا الداخلين يجب ان يكونا متناقصين •

ويمكن اشتقاق طلب المنتج للدواخل من الطلب المرتكز عليه للسلعةالتى ينتجها

ويمكن ايضا الحصول على دوال طلب الدواخل بحل شروط الدرجه الاولى لمستويات الدواخل بدلالة أسعار الدواخل والانتاج • ويربط منحنى طلب الدواخل الطلب للدواخل مع اسعارها وهذه المنحنيات تكون دائما مائلة الى اسفل ، ويحقق تطبيق قاعدة شاتيلير ان الانخفاض على المدى الطويل فى الطلب على الدواخل تابعا ارتفاعا فى اسعارها لايمكن ان يكون اقل من الانخفاض على المدى القصير •

اما اذا اعطينا دالة الانتاج ، ومعادلة التكلفة ، ودالة مجرى التوسع لصاحب المؤسسة فان اجمالى التكلفة يمكن التعبير عنه بدلالة مستوى الانتاج ويجب دفع تكلفة دواخله الثابتة فى المدى القصير بغض النظر عن مستوى الانتاج وتتطلب شروط الدرجة الاولى للحصول على الحد الاعلى من الربح ان يساوى صاحب المؤسسة بين التكلفة الحدية وبين سعر البيع لمنتجاته • وتتطلب شروط الدرجه الثانية بان تكون التكلفة الحدية متزايدة وسوف يتحقق التحدب المنضبط لدالة التكلفة اذا كانت دالة الانتاج المشار اليها مقعرة بانضباط ويمكن لصاحب المؤسسة ان يغير من مستويات دواخلة الثابتة فى المدى الطويل وعليه فانه ايضا قادر على ان يختار دالة تكلفة معينة للمدى القصير وتكون دالة التكلفة الاجمالية فى المدى الطويل هى المغلف (الوعاء) الذى يحوى جميع دوال التكلفة الاجمالية البديلة للمدى القصير • ويتطلب الحصول على الحد الاعلى من الربح على المدى الطويل مساويا التكلفه الحدية للمدى الطويل بسعر البيع وان تكون التكلفه الحدية للمدى الطويل متناقصة •

ومن الممكن انتاج اثنين او اكثر من المنتجات مشتركة فى عملية انتاجية واحده •
وفى ابسط الحالات يمكن التعبير عن كميات انتاج اثنين من المنتجات بدلالة كمية داخل واحد فقط • ونعرف منحنى تحويل الانتاج بانه المحل الهندسى لجميع مجاميع المنتجات التى يمكن انتاجها من مستوا معينا للدواخل • وفى الغالب يفترض ان تكون علاقة الانتاج شبه × محدبة بانضباط منتظم وعليه يكون لها منحنيات تحويل انتاج مقعرة •

وقد يرغب صاحب المؤسسة فى الحصول على الحد الاعلى من الايرادات التى يتحصل عليها من مستوا معينا من الدواخل وتتطلب شروط الدرجه الاولى المساواة بين معدل تحويل الانتاج ونسبة اسعار المنتجات ويعنى هذا هندسيا انه سوف يعمل عند النقطة التى يكون عندها خط تساوى الايرادات ملامسا لمنحنى معينا من منحنيات تحويل الانتاج • وتضمن خاسية شبه ــ التحدب بانضباط منتظم لعلاقة الانتاج تحقيق شرط الدرجه الثانية فاذا رغب صاحب المؤسسة فى الحصول على الحد الاعلى من ربحة فلابد من مساواة قيمة الانتاج الحدى للداخل بالنسبه لكل منتج واسعار هذه المنتجات •

وتتطلب شروط الدرجه الثانية أن تكون علاقة الانتاج محدبة بانضباط فى جوار النقطة التى يتحقق عندها شروط الدرجه الاولى ٠

وفى الحالة الهامه والتى يستخدم فيها n من الدواخل لانتاج s من المنتجات تكون دالة الانتاج على الشكل الضمنى لها ٠ ويفترض ان تكون تزايدية بالنسبه لمستويات الانتاج ، وان تكون تناقصية بالنسبه لمستويات الدواخل وان تكون شبه ـ محدبه بانضباط منتظم ضمن المجال النسبى ٠ وتتطلب شروط الدرجه الاولى للحصول على الحد الاعلى من الربح :

(١) ان يكون معدل تحويل الانتاج بين اى زوج من المنتجات مساويا لنسبة اسعارهما ٠
(٢) ان تكون قيمة الانتاج الحدى لكل داخل بالنسبه لكل ناتج مساوية لسعر الداخل ٠
(٣) وان يكون معدل التعويض الفنى RTS بين كل زوج من الدواخل مساويا لنسبة اسعارهما ٠ يمكن حساب نتائج التعويض بالنسبة لتغيرات الاسعار ولكن لايوجد نظير لنتيجة الدخل الغير متماثلة للمستهلك ٠

EXERCISES

4-1 Construct the average and marginal product functions for X_1 which correspond to the production function $q = x_1x_2 - 0.2x_1^2 - 0.8x_2^2$. Let $x_2 = 10$. At what respective values of x_1 will the AP and MP of X_1 equal zero?

4-2 Determine the domain over which the production function $q = 100(x_1 + x_2) + 20x_1x_2 - 12.5(x_1^2 + x_2^2)$ is increasing and strictly concave.

4-3 Derive an input expansion path for the production function $q = A(x_1 + 1)^\alpha(x_2 + 1)^\beta$ where $\alpha, \beta > 0$.

4-4 Assume that an entrepreneur's short-run total cost function is $C = q^3 - 10q^2 + 17q + 66$. Determine the output level at which he maximizes profit if $p = 5$. Compute the output elasticity of cost at this output.

4-5 A family of short-run total cost curves is generated by $C = 0.04q^3 - 0.9q^2 + (10 - \ln k)q + 8k^2$ where $k > 1$ denotes plant size. Determine the firm's long-run total cost curve.

4-6 An entrepreneur uses one input to produce two outputs subject to the production relation $x = A(q_1^\alpha + q_2^\beta)$ where $\alpha, \beta > 1$. He buys the input and sells the outputs at fixed prices. Express his profit-maximizing outputs as functions of the prices. Prove that his production relation is strictly convex for $q_1, q_2 > 0$.

4-7 An entrepreneur produces one output with two inputs using the production function $q = Ax_1^\alpha x_2^{1-\alpha}$. He buys the inputs and sells the outputs at fixed prices. He is subject to a quota which allows him to purchase no more than x_1^0 units of X_1. He would have purchased more in the absence of the quota. Determine the entrepreneur's conditions for profit maximization. What is the optimal relation between the value of the marginal product of each input and its price? What is the optimal relation between the RTS and the input price ratio?

SELECTED REFERENCES

Allen, R. G. D.: *Mathematical Economics* (London: Macmillan, 1956). Chap. 18 contains a mathematical statement of the theory of the firm. The necessary algebra is developed in the text.

Carlson, Sune: *A Study on the Theory of Production* (New York: Kelley & Millman, 1956). An exposition of the theory of the firm in terms of simple mathematics.

Frisch, Ragnar: *Theory of Production* (Chicago: Rand McNally, 1965). Differential and integral calculus are used extensively in this treatise.

Hicks, J. R.: *Value and Capital* (2d ed., Oxford: Clarendon Press, 1946). The theory of the firm is developed in chaps. VI–VII. The mathematical analysis is contained in an appendix.

Menger, K.: "The Laws of Return," in O. Morgenstern (ed.), *Economic Activity Analysis* (New York: Wiley, 1954), pp. 419–482. A mathematical study of alternative formulations of the law of diminishing returns.

Samuelson, Paul A.: *Foundations of Economic Analysis* (Cambridge, Mass.: Harvard University Press, 1948). Chap. 4 contains a mathematical statement of the theory of the firm.

Silverberg, E.: "The Le Chatelier Principle as a Corollary to a Generalized Envelope Theorem," *Journal of Economic Theory*, vol. 3 (June, 1971), pp. 146–155. A general discussion with illustrations using the calculus and matrix algebra.

الفصل الخامس

موضوعات فى نظرية المؤسسة
TOPICS IN THE THEORY OF THE FIRM

ان اساسيات نظرية المؤسسة غالبا ماتكون أكثر من نظرية المستهلك قد توسعت وطبقت على مسائل واسعة النطاق • وبعض هذه التوسعات والتطبيقات سوف تناقش فى هذا الباب • وسوف تكون خواص دوال الانتاج المتجانسة موضوع الجزء (٥ـ١) وخواص مرونة التعويض الثابته • (CES) constant-elasticity-of-substitution

لدوال الانتاج هى موضوع الجزء (٥ـ٢) ولقد وضحنا تحليل شروط كون ـ تكر Kuhn-Tucker لنوعين مختلفين من عدم اتصال الانتاج :
production discontinuities

فى الجزء (٥ـ٣) ثم ناقشنا فى الجزء (٥ـ٤) الازدواجية duality بين دوال الانتاج والتكلفة بالاضافة ألى بديهية شيفارد Shephard'slemma ولقد توسعنا فى نظرية المؤسسة فى الجزء (٥ـ٥) لنغطى حالات عدم التاكد بالنسبه للاسعار والمنتجات uncertain price and output وذلك بأدخال الربح عنصرا من عناصر دالة المنفعة للمستهلك • أما فى الجزء (٥ـ٦) فلقد وضحنا دوال الانتاج الخطيه ، ثم ناقشنا المفاهيم العامه لموضوع البرمجه الخطية Linear production فى الجزء (٥ـ٧)ـ بالاضافة ألى بعض الامثلة المأخوذه من نظرية الانتاج الخطيه • ومع هذا فقد حققنا نوعا اخر مختلفا من الازدواجية لازواج من مجموعات البرمجه الخطيه •

٥ - ١ دوال الإنتاج المتجانسة :
HOMOGENEOUS PRODUCTION FUNCTIONS

نعرف " حجم الغله " returns to scale بأنه أستجابه الناتج للزيادة المتناسبه لجميع الدواخل • فأذا كانت زيادات الناتج بنفس النسبه فأن حجم الغله يكون ثابتا فى مجال مجاميع الدواخل المعتبره (ويطلق على هذه الحاله : حالة ثبات الغلة بالنسبه لحجم العمليه الانتاجية constant returns to scale وحجم الغله سوف يزداد أذا

أزداد الناتج بنسبه أكبر وسوف تقل أذا نقص الناتج بنسبه أقل وقد تظهر دالة واحـدة لجميع أنواع حجم الغله • ويفترض بعض الاقتصاديون أن دوال الانتاج تظهر ظاهـرة تزايد الغله increasing returns لكميات صغيرة من الدواخل ، ثم تمر خلال مرحلة حالة ثبات الغلة constant returns وأخيرا تمر خلال حالة تناقص الغله decreasing returns كلما أصبحت كميات الدواخل أكبر فأكبر •

خواص حجم الغلة : Properties

يمكن تعريف حجم الغله بسهولة لدوال الانتاج المتجانسة فتكون دالة الانتـاج متجانسة من الدرجة k أذا كان :

$$f(tx_1, tx_2) = t^k f(x_1, x_2) \qquad (٥_١)$$

حيث أن k ثابتا من الثوابت ، وأن t تكون أى رقم حقيقى موجب فأذا أزداد كـلا الداخلين بمقدار العامل t فان الناتج سوف يزداد بمقدار العامل t^k ويكون حجم الغله فى حالة تزايد أذا كانت $k > 1$ وثابتا اذا كانت $k = 1$ ومتناقصا أذا كانت $0 < k < 1$ ومـن العادة أفتراض تجانس دوال الانتاج من الدرجة الأولى (١) •

وباتباع اشتقاقات الجزء (٣_٣) فأن الاشتقاقات الجزئية لدالة متجانسة من الدرجه k تكون متجانسه من الدرجه $k - 1$ ونخص هنا التجانس من الدرجه الأولى • فاذا كانت دالة متجانسة من الدرجه الأولى فان الانتاجات الحدية marginal products للداخلين X_1 و X_2 يكونا متجانسين من الدرجه صفر ، بمعنى أنهما سوف يبقيان بدون تغيـر للتغيرات النسبيه لكلا الداخلين وبالتحديد فأن :

$$f_1(x_1, x_2) = f_1\left(\frac{x_1}{x_2}, 1\right)$$

$$f_2(x_1, x_2) = f_2\left(\frac{x_1}{x_2}, 1\right)$$

حيث أن $t = 1/x_2$ وسوف يعتمد الناتجان الحديان على النسبه التى اسـتخدم فيها X_1 و X_2 •

ان منحنيات تساوى الكميه لدالة الانتاج المتجانسة يكون لها نفس خواص منحنيـات السواء لدالة المنفعة المتجانسة كما نوقشت فى الجزء (٣_٣) ويعتمد RTS على النسبه التى أستخدم بها الدواخل وليس الكميات المطلقة لها •

---

(١) أى دالة تكون متجانسة من الدرجه الاولى يقال أنها متجانسة خطيا وهذا لايعـنى بالطبع أن دالة الانتاج تكون داله خطيه •

وسوف يصل الخط المستقيم النابع من نقطة الاصل فى الربع الموجب نقط الدواخل التى يتساوى عندها RTS ونتيجة لهذا فأن مجرى التوسع، وهو المحل الهندسى للنقاط التى عندها RTS يساوى نسبة سعر الداخل الثابتة، يكون خطا مستقيما اذا كانت دالة الانتاج متجانسة من أى درجة وان أى دالة انتاج والتى يمكن التعبير عنها كدالة متزايدة مطرده لدالة متجانسة تسمى دالة متالفه homothetic ويكون لها نفس منحنيات تساوى الكميه للدالة المتجانسة المشار أليها بالرغم من الكميات المقابلة لكل منحنى تكون عادة مختلفة . ودالة الانتاج المعطاه بالمعادلة (٤ـ٥) تكون متالفه وليست متجانسه .

أن احد مشاهير دوال الانتاج المتجانسة الواسعة الاستعمال هى دالة كب ـ دوجلاس Cobb-Douglas function

$$q = Ax_1^{\alpha}x_2^{1-\alpha} \qquad (٥ـ٢)$$

حيث أن $0 < \alpha < 1$ وان زيادة مستويات الدواخل بنسبة المعامل t سوف ينتج عنه الاتى :

$$f(tx_1, tx_2) = A(tx_1)^{\alpha}(tx_2)^{1-\alpha} = tAx_1^{\alpha}x_2^{1-\alpha}$$

وعلى هذا فان دالة كب ـ دوجلاس تكون دالة متجانسة من الدرجه الاولى ، وان MPs لكلا الداخلين يكونان متجانسين من الدرجه صفر على النحو التالى :

$$f_1(x_1, x_2) = \alpha Ax_1^{\alpha-1}x_2^{1-\alpha}$$

$$f_2(x_1, x_2) = (1-\alpha)Ax_1^{\alpha}x_2^{-\alpha}$$

$$f_1(tx_1, tx_2) = \alpha At^{\alpha-1}x_1^{\alpha-1}t^{1-\alpha}x_2^{1-\alpha} = \alpha Ax_1^{\alpha-1}x_2^{1-\alpha}$$

$$f_2(tx_1, tx_2) = (1-\alpha)At^{\alpha}x_1^{\alpha}t^{-\alpha}x_2^{-\alpha} = (1-\alpha)Ax_1^{\alpha}x_2^{-\alpha}$$

ولقد اثبتنا فى الجزء (٤ـ١) أن دالة الانتاج هذه تكون ذات قيمة موجبه ، وانها متزايدة وانها شبه مقعرة بانضباط منتظم ضمن المجال $x_1, x_2 > 0$.

أن مجرى التوسع الذى ولته دالة كب ـ دوجلاس يكون خطيا . وتتطلب شروط الدرجه الاولى للحصول على الحد الامثل المقيد ، مايلى :

$$\frac{r_1}{r_2} = \frac{f_1}{f_2} = \frac{\alpha Ax_1^{\alpha-1}x_2^{1-\alpha}}{(1-\alpha)Ax_1^{\alpha}x_2^{-\alpha}} = \frac{\alpha x_2}{(1-\alpha)x_1}$$

وعلى هذا فان مجرى التوسع يكون معطا بالدالة الضمنية التالية :

$$(1-\alpha)r_1x_1 - \alpha r_2x_2 = 0$$

والتى تصف الخط المستقيم النابع من نقطة الاصل فى مسطح تسوى الكميات isoquant plane.

نظرية أويلر والتوزيع : Euler's Theorem and Distribution

تنص نظرية أويلر على أن الشروط التالية تتحقق بأى دالة متجانسة [1] :

$$x_1 f_1 + x_2 f_2 = kf(x_1, x_2) \quad (٥_٣)$$

وتعطى هذه النظرية عددا من النتائج ذات قيمة للاقتصاد فعلى سبيل المثال أذا قسمنا المعادله (٥ــ٣) على q نحصل على :

$$\omega_1 + \omega_2 = k$$

وهذه تنص على ان مجموعا مرونتى المنتجين للداخلين X_1 و X_2 تساويان درجة التجانس (راجع الجزء ٤ــ٤ لتعريف المرونه) .

افترض ان دالة الانتاج تكون متجانسة من الدرجه الاولى ، وبتعويض $q = f(x_1, x_2)$ نحصل على :

$$x_1 f_1 + x_2 f_2 = q \quad (٥_٤)$$

وهذه تنص على أن أجمالى الناتج q. يساوى MP للداخل X_1 مضروبا فى كمية X_1 زائد MP للداخل X_2 مضروبا فى كمية X_2 فاذا كانت المؤسسة تدفع لموردى suppliers كل داخل من الدواخل ناتجه المادى الحدى فان اجمالى الناتج سوف يستنفذ كاملا .

وسوف تفوق من الدفعات الناتج أذا كانت درجة التجانس أكبر من واحد وسوف تكون اقل من الناتج أذا كانت درجة التجانس أقل من واحد .

تلعب نظرية اويلر دورا هاما فى تطوير نظرية الانتاج الحدية للتوزيع وتتكون المفاهيم الرئيسية لهذه النظريه من :

(١) ان كل داخل سوف يدفع له قيمة أنتاجه الحدى .

(٢) ان اجمالى الناتج سوف يستنفذ كاملا وبما ان هذه الشروط تتحقق بدوال الانتاج من الدرجه الاولى فانه كان من الخطأ الافتراض بأن جميع دوال الانتاج يجب ان تكون من هذا النوع .

لقد استفيد من دالة كب ــ دوجلاس فى المحاوله للتحقق من نظرية الانتاج الحدية

---

(١) بتفاضل المعادلة (٥ــ١) جزئيا بالنسبه للمعامل t مستخدمين قاعدة الدالة المركبه بالنسبه للطرف الايسر لنحصل على :

$$x_1 f_1(tx, tx_2) + x_2 f_2(tx_1, tx_2) = kt^{k-1} f(x_1, x_2)$$

ونحصل على المعادلة (٥ــ٣) بتعويض $t = 1$.

للتوزيع marginal-productivity theory of distribution ويمثل المتغير q اجمالى الناتج aggregate output ، x_1 ، x_2 ويمثلان اجمالى الداخلين وهما العمل labor ورأس المال capital على الترتيب • وتكون نظرية اويلر محققه اذا كان :

$$q = x_1(\alpha A x_1^{\alpha-1} x_2^{1-\alpha}) + x_2[(1-\alpha) A x_1^{\alpha} x_2^{-\alpha}]$$

$$= \alpha A x_1^{\alpha} x_2^{1-\alpha} + (1-\alpha) A x_1^{\alpha} x_2^{1-\alpha}$$

وبالتعويض من المعادله (٥ـ٢) نحصل على :

$$q = \alpha q + (1-\alpha) q$$

فاذا دفعنا لكل عامل انتاجه الحدى فان اجمالى الناتج سوف يوزع بين العمل ورأس المال بالنسب التاليه α و $(1-\alpha)$ على الترتيب • ولقد قدر بور د وجلاس Paul Douglas قيمة α من أجمالى الحقائق العلميه للمتسلسلات الزمنية aggregate time-series data ثم قارن تقديراته مع نصيب (حصة) العمل labor's share من اجمالى الناتج[1] ويكون شرط استنفاذ الانتاج مكافئا لشرط الربح الاقصى فى المدى الطويل والذى يساوى صفرا وبضرب المعادلة (٥ـ٤) بسعر الانتاج نحصل على :

$$x_1(pf_1) + x_2(pf_2) = pq$$

وبتعويض $r_1 = pf_1$ و $r_2 = pf_2$ من شروط الدرجه الاولى لتحقيق الربح الاقصى نحصل على :

$$r_1 x_1 + r_2 x_2 = pq \qquad (٥\text{ـ}٥)$$

وهذه تنص على ان أجمالى النفقات الاولية للمدى الطويل total outlay يساوى اجمالى الايرادات للمدى الطويل • وباتباع أفتراضات نظرية الانتاج الحديه فان المعادله(٥ـ٥) تقود الى نتيجه مذهله بان الربح على المدى الطويل يساوى صفرا بغض النظر عن مستوى سعر الانتاج •

أن تحاليل نظرية الانتاج الحدية للتوزيع تكون مضلله ، وهذا اذا لم تكن مغلطه misleading, if not erroneous وسوف تنهار التحاليل التقليدية والمتعارف عليها للحصول على الحد الاقصى من الربح اذا كان صاحب المؤسسه يبيع انتاجه بسعر ثابت وعنده دالة انتاج متجانسه من الدرجه الاولى • ويستطيع القارئ من التحقق بانه فى هذه الحالة سوف تكون دالة الربح ، ايضا متجانسه من الدرجه الاولى:

$$t\pi = pf(tx_1, tx_2) - r_1 t x_1 - r_2 t x_2$$

وهناك ثلاثة نتائج محتمله فاذا كانت الاسعار بحيث ان بعض مجاميع العوامل تعطى ربحا موجبا فانه يمكن زيادة الربح الى حد باختيار قيمة كبيره كافيه للمعامل t ففى هذه الحاله

---

(١) انظر المراجع المدونه فى نهاية هذا الباب •

لايكون لدالة الربح حدا او اقصى محددا . اما اذا كانت الاسعار بحيث ان كل مجموعة عوامل تعطى ربحا سالبا (خسارة) فان صاحب المؤسسه سوف يتوقف عن العمل .
واما الاحتمال الثالث والذى يحد من تحاليل النظريين فى الانتاج الحدى ، فانه يكون اكثرهم متعه ففى هذه الحاله ، لايوجد اى مجموعة عوامل تؤدى الى ربح موجب ، ولكن المجموعه (x_1^0, x_2^0) تؤدى الى ربح يساوى صفر . ويتبع من تجانس دالة الربح ان مجموعة العوامل (tx_1^0, tx_2^0) سوف تؤدى الى ربح يساوى صفر . وسوف يكون الحد الاقصى للربح فى المدى الطويل مساويا لصفر ولكن حجم المؤسسة سيكون غير محددا indeterminate فاذا كان صاحب المصنع يتحصل على ربح يساوى صفر لمجموعة معينه من العوامل ، فان ربحه سوف يبقى بدون تغيير اذا ضاعف او نصف حجم عملياته الانتاجيه . فاذا حجم انتاجى معين فرض على صاحب المؤسسه ، فان نظريه اويلر تتحقق ، وان انتاجه سوف يستنفذ كاملا .

انه ليس من الضرورى افتراض ان دالة الانتاج تكون متجانسه لتحقيق معطيات نظرية الانتاج الحديه وسوف تتحقق المعطيات اذا كانت :

(١) دالة الانتاج غير متجانسه .
(٢) تحققت شروط الدرجه الاولى والثانيه للحصول على الحد الاقصى من الربح .
(٣) وان الربح الاقصى لصاحب المؤسسه يكون مساويا للصفر .

ولقد افترضنا الشرطين الاول والثانى خلال مناقشات وتطوير نظرية المؤسسة فى الجزئين (٤ـ١) و (٤ـ٢) وسوف تظهر فى الباب السادس ان الدخول الحر free entry والخروج exit للمؤسسات المتنافسه سوف ينتج عنه تحقيق الشرط الثالث السابق . وهذا الشرط يتطلب ان :

$$\pi = pq - r_1x_1 - r_2x_2 = 0$$

وبتعويض $r_1 = pf_1$ و $r_2 = pf_2$ (وهما شرطى الدرجة الاولى) وبالحل لقيمة q نحصل على :

$$q = x_1f_1 + x_2f_2$$

وهنا نجد ان نتيجة المعادلة(٤ـ٥) قد توصلنا اليها بدون استخدام نظرية اويلر . وبما ان دالة الانتاج غير متجانسه ،فان مجموعة العوامل المثلى لصاحب المؤسسة تكون ، عامة محدده determinate.
ويمكن النظر فى مسألة التوسط indeterminacy problem بالنسبه لعدم مقدرة صاحب المؤسسة من تحقيق شروط الدرجه الثانيه للحصول على الحد الاقصى من الربح وبتفاضل المعادله (٤ـ٥) تفاضلا تاما نحصل على :

$$(f_1 + x_1f_{11} + x_2f_{21})\, dx_1 + (f_2 + x_1f_{12} + x_2f_{22})\, dx_2 = dq$$

وكبديل لهذا نفترض ان $dx_2 = 0$ ثم نقسم على dx_1 وند ع $dx_1 = 0$ ثـم نقسم على dx_2 :

$$f_1 + x_1 f_{11} + x_2 f_{21} = \frac{\partial q}{\partial x_1} = f_1$$

$$f_2 + x_1 f_{12} + x_2 f_{22} = \frac{\partial q}{\partial x_2} = f_2$$

فاذا طرحنا f_1 من طرفى المعادله الاولى واوجدنا الحل لقيمة f_{11} ثم طرحنا f_2 من طرفى المعادله الثانيه واوجدنا الحل لقيمة f_{22} نحصل على:

$$f_{11} = -\frac{x_2}{x_1} f_{21} \qquad f_{22} = -\frac{x_1}{x_2} f_{12} \qquad (٥\text{ـ}٦)$$

وعليه فان $f_{12} = f_{21}$ تكون موجبه اذا كانت f_{11} و f_{22} موجبتين كما افترضنا •
وبتقييم محـــددة هيسيان لدالة الانتاج مستخدمين المعادلة(٥ــ٦) نحصل على :

$$f_{11} f_{22} - f_{12}^2 = \left(-\frac{x_2}{x_1} f_{12}\right)\left(-\frac{x_1}{x_2} f_{12}\right) - f_{12}^2 = 0$$

وعليه فان اى دالة انتاج متجانسه من الدرجه الاولى تكون مقعرة ، ولكن لها بعـــــض المناطق الخطيه التى لا يتكون فيها مقعرة بانضباط •

ولقد استخدمت دوال الانتاج المتجانسه بكثرة وعن فهم فى علم الاقتصاد بالرغـــــم من مسائل التوسط للمؤسسه الواحدة ولذا فقد وضعت بعض الافتراضات للتعامل مع هــــذه المسائل منها الافتراضين :

(١) ان حجم المؤسسه واعداد المؤسسه يقرر اليا خاضعا لشرط ان الانتاج الصناعـــى يحقق الطلب الصناعى •

(٢) ان يكون للصناعه industry دالة انتاج متجانسه من الدرجه الاولى حتى ولـــو لم يكن للمؤسسه الواحده (المكونه منها الصناعه) داخل الصناعه مثل هـــذه الدوال الانتاجية وسوف نظهر فى البابين السابع والثامن ان حجم المؤسسه(او الوحدة الصناعيه فى هذا الباب) قد يمكن تقريره هذا اذا كانت الوحدات الصناعيه تعمل تحت شروط المنافسه الغير كامله imperfect competition .

دوال التكلفة للمدى الطويل : Long-Run Cost Functions

انه من الممكن اقامة دوال التكلفه للمدى الطويل بالدواخل المتغيره لدوال الانتـــــاج المتجانسه والتى لها منحنيات سوا' محدبه • افترض ان (x_1^0, x_2^0) هى المجموعة المثلى للدواخل لانتاج وحدة واحدة من Q فتكون تكلفة الانتاج المقابله لها هـــــــــــــى $a = r_1 x_1^0 + r_2 x_2^0$ وبما ان مجرى التوسع لدالة الانتاج المتجانسه يكون خطيا ، فانكل المجاميع المثلى للدواخل يمكن كتابتها على النحوالتالى : (tx_1^0, tx_2^0) وعلى هذا فـــأن دالة الانتاج ومعادلة التكلفه يمكن كتابتها كالتالى :

$$q = f(tx_1^0, tx_2^0) = t^k$$
$$C = (r_1x_1^0 + r_2x_2^0)t = at$$

وبحل المعادلة الاولى لقيمة t ثم التعويض بهذه القيمه فى المعادله الثانيه لنحصل على دالة التكلفه الاجماليه :

$$C = aq^{1/k}$$

بحيث ان :

$$\frac{dC}{dq} = \frac{a}{k} q^{(1-k)/k} \qquad \frac{d^2C}{dq^2} = \frac{a(1-k)}{k^2} q^{(1-2k)/k}$$

ان الدوال المتجانسه من الدرجه الاولى يكون لها MC و ATC ثابتان ويكون لها ايضا دالة تكلفة اجماليه خطيه للمدى الطويل وان MC يكون تزايديا فى كل مكان اذا كانت $k < 1$ وتناقصيه فى كل مكان اذا كانت $k > 1$ ويمكن تحقيق شرط الدرجه الثانيه ان MC لابد وان يكون تزايديا اذا كانت درجة التجانس اقل من واحد ٠

مثال : ان دالة الانتاج $q = Ax_1^\alpha x_2^\beta$ حيث ان $\alpha, \beta > 0$ تكون متجانسه من الدرجه :

$$q = A(tx_1)^\alpha(tx_2)^\beta = t^{\alpha+\beta}Ax_1^\alpha x_2^\beta$$

وتعطينا معادلة (٤ــ٣٠) دوال التكلفه للمدى الطويل لدوال الانتاج لمثل هذا النوع وتكون دالة التكلفه لدالة كب ــ دوجلاس للانتاج ، بحيث ان $\alpha + \beta = 1$ على النحو التالى :

$$C = aq$$

حيث ان :

$$a = \frac{r_1^\alpha r_2^{1-\alpha}}{A\alpha^\alpha(1-\alpha)^{1-\alpha}}$$

٥ ٢ دوال الانتاج ذات مرونة التعويض الثابتة :

CES PRODUCTION FUNCTIONS

ان دالة الانتاج التى تنتمى الى النوع CES من هذه الدوال يكون لها الميزتان التاليتان :

(١) تكون متجانسه من الدرجه الاولى ٠

(٢) تكون لها مرونة تعويض ثابته CES

(انظر الجزء ٤ــ١) ٠ ان دالة من دوال الانتاج والتى لاتملك واحدة او اثنين من الخواص السابقه لاتنتمى الى هذا النوع من الدوال ٠ ولقد اثبتنا فى الجزء (٤ــ١) ان دوال الانتاج $q = Ax_1^\alpha x_2^\beta$ يكون لها مرونات تعويض ذات وحده ثابته وعلى هذا فان جميع دوال الانتاج من هذا النوع سوف تحقق الميزه الثانيه السابقه ٠ ولكن الميزة (١)

تتحقق فقط اذا كانت $\alpha+\beta=1$ بمعنى انها تتحقق لدالة كب دوجلاس.

مثال : ان دالة الانتاج $q=Ax_1^{\alpha}x_2^{1-\alpha}+x_1$ تكون متجانسه من الدرجه الاولى ، ولكن ليس لها مرونه تعويض ثابته ولا تنتمى الى الفصل CES .

خواصها : **Properties**

لقد اثبت باستخدام طرق متقدمه فى الاثبات ان الفصل CES من دوال الانتاج يمكن وضعها على النمط التالى : (١)

$$q=A[\alpha x_1^{-\rho}+(1-\alpha)x_2^{-\rho}]^{-1/\rho} \quad (٥_٧)$$

بحيث ان $A>0$ و $0<\alpha<1$ وانه من السهل تحقيق ان المعادله (٥_٧) تكون متجانسه من الدرجة الاولى :

$$A[\alpha(tx_1)^{-\rho}+(1-\alpha)(tx_2)^{-\rho}]^{-1/\rho}=tA[\alpha x_1^{-\rho}+(1-\alpha)x_2^{-\rho}]^{-1/\rho}$$

وبهذا تكون الانتاجات الحديه للداخل على النحو التالى :

$$\frac{\partial q}{\partial x_1}=\frac{\alpha}{A^{\rho}}\left(\frac{q}{x_1}\right)^{\rho+1} \qquad \frac{\partial q}{\partial x_2}=\frac{1-\alpha}{A^{\rho}}\left(\frac{q}{x_2}\right)^{\rho+1}$$

والتى تكون موجبه للمجال $x_1,x_2>0$ ويكون معدل التعويض الفنى هو :

$$\text{RTS}=\frac{\alpha}{1-\alpha}\left(\frac{x_2}{x_1}\right)^{\rho+1} \quad (٥_٨)$$

ان RTS يكون تزايديا وتكون منحنيات تساوى الكميات محدبه اذا كانت $\rho>-1$ وهذه ايضا توضح ان اى دالة انتاج من الفصل CES تكون شبه مقعرة . بانضباط منتظم فى المجال $x_1,x_2>0$.

ويمكن الحصول على تعبير لمرونة التعويض لدوال الانتاج المتجانسه من الدرجه الاولى بتعويض (٥_٦) فى (٤_١١) .

$$\sigma=\frac{f_1f_2(x_1f_1+x_2f_2)}{f_{12}(x_1f_1+x_2f_2)^2}$$

ثم الاستعانه بنظرية اويلر فى المعادله (٥_٣) :

$$\sigma=\frac{f_1f_2}{f_{12}q} \quad (٥_٩)$$

بحيث ان (من ٥_٧)

$$f_{12}=\frac{(1+\rho)\alpha(1-\alpha)q^{1+2\rho}}{A^{2\rho}(x_1x_2)^{1+\rho}}$$

وبتقييم (٥_٩) لـ (٥_٧) :

---

(١) راجع مقالة : K. Arrow, H. B. Chenery, B. Minhas, and R. M. Solow
تحت عنوان "Capital-Labor Substitution and Economic Efficiency,
المنشوره فى الدوريه " *Review of Economics and Statistics*, vol. 43
لشهر اغسطس من العام ١٩٦١م على الصفحات ٢٢٨_٢٣٢ .

$$\rho = \frac{1-\sigma}{\sigma} \qquad \sigma = \frac{1}{1+\rho} \qquad (١٠_٥)$$

وعلى هذا فان ρ تكون لها علاقة وثيقة بمرونة التعويض الثابته بحيث ان اللامتساويـــــة $\rho > -1$ تكون متكافئه لـ $\sigma > 0$

منحنيات تساوى الكمية : Isoquants

ان الشكل الخاص بمنحنيات تساوى الكميه المحد به والتى تولدت عن دالة CES تعتمد على قيمة σ ويوجد خمسة حالات ، منها اثنان داخلان ضمن اطار النهايات limits والثلاثه الباقيات حالات عاديه وكل هذه الحالات تصف الاشكال المحتمله لمنحنيات تساوى الكميه •

الحالة الاولى : اذا كانت $\sigma \rightarrow 0$ فان $\rho \rightarrow +\infty$ ويقترب RTS والمعطـــــى بالمعادله(٥ــ٨) من الصفر اذا كانت $x_1 > x_2$ (او) ان RTS يقتـــرب من $+\infty$ اذا كانت $x_1 < x_2$ وفى حالة النهاية فان التعويض يكون مستحيلا • وعلى هـــذا فسوف يكون شكل المنحنى مقتربا من الزاويه القائمه •

الحالة الثانية : اذا كانت $0 < \sigma < 1$ فان $\rho > 0$ ، ويمكن كتابة منحنيات المعادلة (٥ــ٧) على النحو التالى :

$$\alpha x_1^{-\rho} + (1-\alpha) x_2^{-\rho} = \left(\frac{q}{A}\right)^{-\rho} = K \qquad (١١_٥)$$

حيث ان K ثابت موجب لاى قيمة مختارة من q لانه لا يمكن لاى حد من الحـــدود الموجودة فى الطرف من ان تكون سالبه او على هذا فلا يمكن لاى حد ان يفوق قيمـــة K وكلما $x_1 \rightarrow 0$ فان $ax_1^{-\rho} \rightarrow +\infty$ وبما انه يوجد حد اعلى K لقيمة $ax_1^{-\rho}$ فـــان x_1 لايمكن ان تساوى صفر • وبنفس الاسباب ، لا يمكن ان تساوى صفر • وعلى هذا فان المنحنى سوف لا يقطع ولا يقطع ولا يقترب من المحاور ولكنه سوف يكون فى اقتراب متواصل بالنسبه للخط $x_1 = (K/\alpha)^{-1/\rho}$ وكذلك بالنسبه للخـــط $x_2 = [K/(1-\alpha)]^{-1/\rho}$ •

الحالة الثالثة : واذا كانت $\sigma = 1$ فان $\rho = 0$ ولقد لوحظ انه فى حالة $\sigma = 1$ فان دالة الانتاج CES تصبح دالة كب ــ دوجلاس • ولا يمكن شرح هذه الحالــــه من المعادله(٥ــ٧)لان هذه الحاله غير واضحه من هذه المعادله • فعندما تكون $\rho = 0$ فان المعادله(٥ــ١١) تصبح معادلة متطابقه identity ولا تساعد فى التوصـــل الى مميزات لهذه الحاله • ويمكن فحص بعض هذه المميزات عن طريق استخدام قاعدة لوبيتال L'Hôpital's rule •

والتى تنص على[١] انه اذا كان :

$$\lim_{z\to b} g(z) = 0 \quad \text{وان} \quad \lim_{z\to b} h(z) = 0$$

وانه اذا كان كذلك :

$$\lim_{z\to b} \frac{h'(z)}{g'(z)} = \alpha$$

فانه اذا :

$$\lim_{z\to b} \frac{h(z)}{g(z)} = \alpha$$

فاذا كتبنا اللوغاريتم الطبيعى للمعادله(٥ــ٧) كخارج قسمة دالتين لـ ρ نحصــل على :

$$\ln q - \ln A = \frac{-\ln[\alpha x_1^{-\rho} + (1-\alpha)x_2^{-\rho}]}{\rho} = \frac{h(\rho)}{g(\rho)}$$

بحيث ان $h(\rho)\to 0$ وان $g(\rho)\to 0$ كلما $\rho\to 0$. وباخذ اشتقاق المقام :

$$h'(\rho) = \frac{\alpha x_1^{-\rho}\ln x_1 + (1-\alpha)x_2^{-\rho}\ln x_2}{\alpha x_1^{-\rho} + (1-\alpha)x_2^{-\rho}}$$

وهذا الاشتقاق سوف يقترب من converges to $\alpha \ln x_1 + (1-\alpha)\ln x_2$ كلما $\rho\to 0$
واخيرا ، فان $g'(\rho) = 1$. وباستخدام قاعدة لوبيتال تصبح هذه الحاله على النحــــو التالى :

$$\ln q - \ln A = \alpha \ln x_1 + (1-\alpha)\ln x_2$$

وبهذا تكون $q = Ax_1^{\alpha}x_2^{1-\alpha}$ هى دالة كب ــ دوجلاس.

الحاله الرابعة : اذا كانت $\sigma > 1$ فان $0 > \rho > -1$ فان قوى حدود الطرف الايســـر للمعادلة (٥ــ١١) تكون موجبه وسوف تتقابل المنحنيات مع المحورين . فاذا كانـــت $x_1 = 0$ فان $x_2 = [K/(1-\alpha)]^{-\rho}$ واذا كانت $x_2 = 0$ فان $x_1 = (K/\alpha)^{-\rho}$.

الحالة الخامسة : اذا كانت $\sigma\to+\infty$ فان $\rho\to-1$ ويأخذ النهايــه limit للمعادله(٥ــ١١) نجد ان الحدود على الجانب الايسر منها تؤول الى واحد ، وان المنحنيات تكون خطوط مستقيمه وتكون الدواخل inputs بدائل متكاملـــــه perfect substitutes فى هذه الحالة .

شروط التــوازن : The Equilibrium Condition

ان دالة الانتاج CES والمعطاه بالمعادله(٥ــ٧) تكون مربكه وصعبه المعالجه ولكن RTS الخاص بها يكون سهلا للغايه ، وهذا واحد من اسباب شهرته واستخدماته الواسعة . وبالتعويض لـ σ من المعادله(٥ــ١٠) ووضع RTS فى المعادله(٥ــ٨)

---

(١) راجع كتاب T. M. Apostol. تحت عنوان *Calculus* المجلد الاول على صفحات ٢٩٢ ــ ٢٩٥ .

يساوى نسبة اسعار الدواخل ، نحصل على :

$$\frac{\alpha}{1-\alpha}\left(\frac{x_2}{x_1}\right)^{1/\sigma}=\frac{r_1}{r_2} \quad (١٢_٥)$$

وكذلك نحصل على :

$$\frac{x_2}{x_1}=a\left(\frac{r_1}{r_2}\right)^{\sigma}$$

بحيث ان

$a=[(1-\alpha)/\alpha]^{\sigma}$. ويمكن للقارئ من ان يتحقق من المعادله(٥_١٢) ان مرونـــة التعويض الثابته تكون ايضا المرونه الثابته لنسبة استخدام الداخل والمعطاه بالمعادله (x_2/x_1) بالنسبه لنسبة اسعار الداخل .

وتنص معادلة(٥_١٢) على نسبة استخدام الداخل تكون دالة اسيه بسيط لنسبـــه اسعار الداخل وبما ان هذه الدالة خطيه بالنسبه للوغاريتمات المتغيرات فانالمتغيران (ذو القيمه الثابته) a و σ قابلان لعملية التقدير estimation عن طريـــــق استخدام تحاليل التطور العكسى الخطى linear regression analysis منالمعلومات العلميه data المعطاه للمتسلسلات الزمنيه time-series . فاذا كانت x_1 و x_2 تمثلان العمل labor وراس المال capital على الترتيب فان المعادله(٥_١٢) تبين كيف تتغير نسبة راس المال للعمل capital-labor ratio لسلعة محـــدده مع التغيرات فى نسبة ايجار الاجر العمالى الى راس المال wage-capital rental .

دالة الإنتاج (CES) على وجه العموم : A Generalized CES Production Function

لقد عرفنا دالة الانتاج CES على انها دالة متجانسه من الدرجه الاولى وهنا سوف نعممها لتغطى اى درجة من التجانس . اعتبر دالة الانتاج التاليه :

$$q=B[\alpha x_1^{-\rho}+(1-\alpha)x_2^{-\rho}]^{-k/\rho} \quad (١٣_٥)$$

ضمن نطاق المجال $x_1, x_2>0$ بحيث ان $k\ ,\alpha, B$ يكونوا جميعا موجبين، وهذه الدالة تكون متجانسه من الدرجة k بحيث ان :

$$B[\alpha(tx_1)^{-\rho}+(1-\alpha)(tx_2)^{-\rho}]^{-k/\rho}=t^kB[\alpha x_1^{-\rho}+(1-\alpha)x_2^{-\rho}]^{-k/\rho}$$

وان انتجاتها الحديه MPs تكون :

$$\frac{\partial q}{\partial x_1}=\frac{k\alpha q^{(k+\rho)/k}}{B^{\rho/k}x_1^{(\rho+1)}} \qquad \frac{\partial q}{\partial x_1}=\frac{k(1-\alpha)q^{(k+\rho)/k}}{B^{\rho/k}x_2^{(\rho+1)}}$$

ويمكن التعبير عن الدالة فى المعادله(٥_١٣) على انها تحويله مطرده موجبـــــــه للمعادلة(٥_٧) وان منحنيات تساوى الكميه سوف لاتتغير اشكالها بمثل هــــــــذه التحويلات. ونتيجة لهذا فان RTS للمعادلة (٥_١٣) يكون معطاه بالمعادلـــــه

(٥ــ٨) وتكون مرونة التعويض معطاه بالمعادلة(٥ــ١٠) ويكون شرط الدرجة الاولى للحصول على الحد الادنى من التكلفه (تحت شروط وقيود) معطاه بالمعادله(٥ــ١٣) فاذا كانت $k < 1$ فان المعادله(٥ــ١٣) تكون مقعرة بانضباط وان شروط الدرجه الاولى للحصول على الحد الاعلى من الربح والمعطاه بالمعادله(٤ــ١٩) يكون لهـا معنى ٠

٥ - ٣ شروط شكون - تكر : THE KUHN-TUCKER CONDITIONS

ان شروط كون ــ تكر تكون مفيده ومجدية للتحاليل فى مواضيع عديده فـى نظريـة الوحدة الانتاجية .theory of the firm فالشروط الركنيه Corner conditions، مثل تلك الشروط الموضحه فى الجزء ٢ــ٢، قد تحدث للوحدة الانتاجيه مثلما تحـدث للمستهلك ٠ ونعطى هنا مثالين لاقتراح حالات اخرى قـد تغطى بشروط كون ــ تكر ٠

ففى المثال الاول ، يكون لصاحب الوحدة الانتاجيه الحق فى اختيار بين انتـاج او شراء الدواخل اللازمه له ٠ اما فى المثال الثانى ، فانه يجب عليه ان يقرر كمية العمل الاضافى(اذا كان هناك اى عمل اضافى overtime labor التى لابد من شرائها ٠

حرية اختيار الداخل : An Input Option

افترض ان صاحب الوحدة الانتاجيه يمتلك دالة انتاج ذات داخلين، بمعـنى انها تستخدم داخلين فى عملية الانتاج ، على النحو التالى :

$$q = f(x_{11} + x_{12}, x_2)$$

بحيث ان x_{11} تمثل كمية X_1 والتى ينتجها صاحب الوحده الانتاجيه ، وان x_{12} تمثل الكمية التى يشتريها من السوق بسعر ثابت للوحده يساوى r_1 من الريالات اما x_2 فانها تمثل الداخل الثانى والذى اشتريت كامل كميته بسعر ثابت للوحدة يساوى r_2 من الريالات ٠ وعلى هذا فان دالة الانتاج لصاحب الوحده الانتاجيه للداخـل تكون :

$$x_{11} = g(x_3)$$

حيث ان x_3 تمثل كمية الداخل الثالث المستخدم فى انتاج X_1 ويكون سعره الثابت هو r_3 ويفترض هنا انه اذا كان $x_{11} = 0$ فان هذا يتطلب ان تكون $x_3 = 0$.
ان دالة لاقرانج المناسبه للحصول على الحد الاعلى من الربح هى :

$$Z = pf(x_{11} + x_{12}, x_2) - r_1x_{12} - r_2x_2 - r_3x_3 + \lambda[g(x_3) - x_{11}]$$

وبافتراض ان كلا الدالتين الانتاجيتين تكونا محدبتين ، فان شروط كون ــ تكر للحصول على الحد الاعلى من الربح تكون كالتالى :

$$\frac{\partial Z}{\partial x_{11}} = pf_1 - \lambda \leqq 0 \qquad x_{11}\frac{\partial Z}{\partial x_{11}} = 0$$

$$\frac{\partial Z}{\partial x_{12}} = pf_1 - r_1 \leqq 0 \qquad x_{12}\frac{\partial Z}{\partial x_{12}} = 0$$

$$\frac{\partial Z}{\partial x_2} = pf_2 - r_2 \leqq 0 \qquad x_2\frac{\partial Z}{\partial x_2} = 0$$

$$\frac{\partial Z}{\partial x_3} = \lambda g' - r_3 \leqq 0 \qquad x_3\frac{\partial Z}{\partial x_3} = 0$$

$$\frac{\partial Z}{\partial \lambda} = g(x_3) - x_{11} \geqq 0 \qquad \lambda\frac{\partial Z}{\partial \lambda} = 0$$

ومن المتطلبات ، ايضا ان تكون المتغيرات الخمسه غير سالبه •
ثلاثة نتائج عامه تكون محتمله الحدوث :

(١) يشترى الداخل ولا ينتج •

(٢) ينتج الداخل ولا يشترى •

(٣) يشترى الداخل وينتج معا •

والحاله السائده هنا بمقارنة تكلفة الانتاج الحديه marginal production cost للداخل X_1 بقيمة انتاجها الحدى ومن اللامتساويان الاولى والرابعة من المعادلـــه (٥ـ١٤) نحصل على :

$$MC_{x_1} = \frac{r_3}{g'(x_3)} \geqq \lambda \gtreqless pf_1$$

وسوف ينتج الداخل مادام $MC_{x_1} \leqq r_1$ اما اذا اشترى الداخل ولم ينتج فان $x_{11} = 0$ وكذلك $x_{12} > 0$ وتعطينا علاقات التوازن فى المعادلة (٥ـ١٤) العلاقة التاليه : $pf_1 = \lambda \leqq$ • اما فى حالة انتاج وعدم شراء الداخل فان $x_{11} > 0$ وكذلك $x_{12} = 0$ ونحصل على $pf_1 = r_1 \leqq \lambda$. •

واخيرا اذا كان الداخل ينتج ويشترى معا فان تكلفة الانتاج الحديه فى حالـــة التوازن تساوى سعر السوق لهذا الداخل •

A Discontinuous Labor Contract

لقد افترضنا وحتى هذه النقطه ان صاحب الوحدة الانتاجية يستطيع ان يشترى أى كميه من الداخل هو يرغبها بسعر ثابت ولكن الانسان لايحتاج الى النظر بعيـــــدا لايجاد حالات تتضارب مع هذا الافتراض • افترض الان ان صاحب الوحدة الانتاجيه قد وقع عقد عمل a labor contract بمقتضاه يشترى صاحب الوحدة وحدات من العمـــل لاتزيد عن $\bar{L}$ حسب معدل الاجر السارى w_1 ولكن يجب عليه ان يدفع مبلغا اضافيـــا

لخارج وقت العمل لتأمين وحدات اضافية من العمل . فاذا افترضنا بالتحديد انه بامكان صاحب الوحدة ان يتحصل على وحدات اضافيه من العمل بمقدار $0.2\bar{L}$ باجر قدرة $1.5w$ ونسمى هذه وقت نصف عمل ويتحصل على مقدار $0.2\bar{L}$ وحده باجر قدرة $2w$ ونسمى هذه ضعف وقت عمل فاذا افترضنا ان L_1، L_2 و L_3 يمكن شراؤها باجر عادى وباجر ونصف وباجرين عمل ، بالترتيب فان استخدام العماله سوف يكون عرضة للانضباطات اللامتساوية الاتية :

$$\bar{L} \geqq L_1 \qquad 0.2\bar{L} \geqq L_2 \qquad 0.2\bar{L} \geqq L_3 \qquad (٥\text{–}١٥)$$

ويكون رأس المال الداخل الثانى الوحيد وتتحكم دالة الانتاج المقعرة $q = f(L_1 + L_2 + L_3, K)$ فى الانتاج .

وتكون دالة لاقرانج فى هذه الحاله هى :

$$V = pf(L_1 + L_2 + L_3, K) - wL_1 - 1.5wL_2 - 2wL_3 - rK + \mu_1(\bar{L} - L_1)$$
$$+ \mu_2(0.2\bar{L} - L_2) + \mu_3(0.2\bar{L} - L_3) \qquad (٥\text{–}١٦)$$

بحيث أن p و r يمثلان على التوالى ناتج ثابت واسعار راس المال وتكون شروط كون – تكر على النحو التالى :

$$\frac{\partial V}{\partial L_1} = pf_L - w - \mu_1 \leqq 0 \qquad L_1 \frac{\partial V}{\partial L_1} = 0$$

$$\frac{\partial V}{\partial L_2} = pf_L - 1.5w - \mu_2 \leqq 0 \qquad L_2 \frac{\partial V}{\partial L_2} = 0$$

$$\frac{\partial V}{\partial L_3} = pf_L - 2w - \mu_3 \leqq 0 \qquad L_3 \frac{\partial V}{\partial L_3} = 0$$

$$\frac{\partial V}{\partial K} = pf_K - r \leqq 0 \qquad K \frac{\partial V}{\partial K} = 0$$

$$\frac{\partial V}{\partial \mu_1} = \bar{L} - L_1 \geqq 0 \qquad \mu_1 \frac{\partial V}{\partial \mu_1} = 0$$

$$\frac{\partial V}{\partial \mu_2} = 0.2\bar{L} - L_2 \geqq 0 \qquad \mu_2 \frac{\partial V}{\partial \mu_2} = 0$$

$$\frac{\partial V}{\partial \mu_3} = 0.2\bar{L} - L_3 \geqq 0 \qquad \mu_3 \frac{\partial V}{\partial \mu_3} = 0$$

وبالطبع لابد وان يكون كل واحد من المتغيرات السبعه غير سالب .

وباستذكار ان $\mu_i = \partial V^*/\partial L_i^*$ بحيث ان * ترمز ألى القيم المثلى ، فان هذه المتغيرات قد تفسر على انها ارباح بديلة shadow profits لكل واحده من الحالات الثلاثه للعمل اى أن الكميه التى تفوق عندها قيمة الانتاج الحدى للعمل على دفعة الاجر لكل واحد منهم.

والحالات العامه السبعة التالية من المحتمل وقوعها معتمده على قيم المتغيرات :
الحالة :

1. $L_1 = 0$	$L_2 = 0$	$L_3 = 0$	$pf_L \leqq w$
2. $0 < L_1 < \bar{L}$	$L_2 = 0$	$L_3 = 0$	$pf_L = w$
3. $L_1 = \bar{L}$	$L_2 = 0$	$L_3 = 0$	$w \leqq pf_L \leqq 1.5w$
4. $L_1 = \bar{L}$	$0 < L_2 < 0.2\bar{L}$	$L_3 = 0$	$pf_L = 1.5w$
5. $L_1 = \bar{L}$	$L_2 = 0.2\bar{L}$	$L_3 = 0$	$1.5w \leqq pf_L \leqq 2w$
6. $L_1 = \bar{L}$	$L_2 = 0.2\bar{L}$	$0 < L_3 < 0.2\bar{L}$	$pf_L = 2w$
7. $L_1 = \bar{L}$	$L_2 = 0.2\bar{L}$	$L_3 = 0.2\bar{L}$	$pf_L \geqq 2w$

وسوف يساوى صاحب الوحدة الانتاجيه قيمة الانتاج الحدى للعمل بمعدل الاجر المناسب بقدر مايستطيع ففى حالة لاتوجد الرغبه فى الانتاج وسوف يسود واحدا من المعدلات الثلاثة للاجر فى الحالات ٢ ، ٤ ، ٦ اما فى الحالتين ٣ ، ٥ فان القيمة المثلى للانتاج الحدى MP للعمل سوف تقع بين معدلى الاجر ، وفى الحالة ٧ حيث ان جميع العمل المتوفر قد أستخدم فانه قد يفوق ضعف الاجر .

DUALITY IN PRODUCTION

يمكن هنا تطبيق التحاليل الخاصه بالازدواجيه والمعطاه فى الجزء (٣ـ٤) مع بعض التعديلات لتغطى الحصول على الحد الاعلى من الانتاج تحت قيد التكلفه بالنسبه للوحدة الانتاجية firm. ولكن على كل حال فان مسالة الحصول على الحد الادنى للتكلفه تحت شرط الانتاج تكون مسالة أكثر منفعة بالنسبه لدراسة الوحدة الانتاجية ، ولقد اركز على ازدواجية الوحدة الانتاجية لمثل هذه المسالة . واهم ازدواجية هى تلك التى توجد بين دوال الانتاج والتكلفه ولقد غطينا اشتقاق دالة الانتاج فى الجزء (٤ـ٤) ونبحث هنا عن كيفية اشتقاق دالة الانتاج مع دالة التكلفه .

اعتبر منحنى تساوى الكميه بالنسبه للوحدة الانتاجية والمعطى بالمعادله $q^0 = f(x_1, x_2)$. واعتبر ان شرط الدرجه الاولى للحصول على الحد الادنى من التكلفه لهذا الناتج هو $-dx_2/dx_1 = r_1/r_2$.
وبحل هذه المعادلات لدوال الداخل input functions نحصل على :

$$x_1 = \psi_1(r_1/r_2, q^0) \qquad (١٧\text{ـ}٥)$$
$$x_2 = \psi_2(r_1/r_2, q^0)$$

بحيث أن x_1 و x_2 تكونان قيمتى الحد الادنى للتكلفة بدلالة نسبة أسعار الداخل وبدلالة مستوى الناتج الموصى به [١] .

والآن نفاضل معادلة التكلفه $C = r_1x_1 + r_2x_2$ وناخذ المعادلة (٥ــ١٧) كمعطى وكذلك شروط الدرجه الاولى $r_i = \lambda f_i$ لنحصل على :

$$\frac{\partial C}{\partial r_i} = x_i + \lambda\left(f_1 \frac{\partial \psi_1}{\partial r_i} + f_2 \frac{\partial \psi_2}{\partial r_i}\right) = x_i > 0 \qquad i = 1,2 \qquad (٥ــ١٨)$$

بحيث أن λ هى مضروب لاقترانج فى مسالة الحصول على الحد الادنى للتكلفة المشروطة بحيث ان الحد داخل الاقواس يساوى $\partial q^0/\partial r_i = 0$ على منحنى تساوى الكميات .

وتعرف معادلة (٥ــ١٨) ببديهية شيفارد Shephard's lemma ونجد أن الاشتقاقات الجزئية لدالة التكلفة (٤ــ٢٨) بالنسبه لاسعار الداخل تساوى قيم الحد الادنى للتكلفه للدواخل .

$$\frac{\partial C(q, r_1, r_2)}{\partial r_1} = x_1 \qquad \frac{\partial C(q, r_1, r_2)}{\partial r_2} = x_2 \qquad (٥ــ١٩)$$

وبما ان دالة التكلفة المتغيرة تكون متجانسة من الدرجه الاولى فى اسعار الدواخل فان اشتقاقاتها الجزئية [٢] تكون متجانسة من الدرجه صفر فى اسعار الداخل وتعتمد على نسبة سعر الداخل بدلا من اسعار الداخل المطلقة . وتحت شروط معينة، فانه من الممكن حل المعادلتين (٥ــ١٩) لقيم المتغيرين q و r_2/r_1 .

بحيث ان الحل لقيم q يمدنا بدالة الانتاج المطلوبه . ولكن (٥ــ١٩) قد يكون من الصعب جدا حلها بالطريقة العمليه .

ونذكر هنا بعض النظريات النموذجية للازدواجية :

(١) ان اى دالة انتاج مقعرة سوف تعطى دالة تكلفة متجانسة من الدرجه الاولى فى اسعار الناتج اذا اعطينا شروط انتظامية معينه specified regularity conditions,

(٢) ان اى دالة تكلفه متجانسة من الدرجه الاولى اسعار الداخل تعطى دالة انتاج مقعرة اذا اعطينا شروط انتظامية معينه .

(٣) ان دالة التكلفة التى اشتقت من دالة انتاج معينة سوف تعطى هى بدورها دالة

---

(١) هذه ليست هى نفس دوال طلب الداخل المعطاه بالمعادلة (٤ــ٢٢) والتى اشتقت من عمليه الحصول على الحد الاعلى من الربح .

(٢) تذكر ان الاشتقاقات الجزئية لدوال التكلفه الاجمالية والمتغيرة تكون هى نفسها .

الانتاج نفسها •

مثال : اعتبر دالة التكلفة فى المعادلة (٤ــ٣٠)

$$C = \gamma(r_1^{\alpha} r_2^{\beta})^{1/(\alpha+\beta)}$$

حيث أن $\gamma = (\alpha + \beta)(A\alpha^{\alpha}\beta^{\beta})^{-1/(\alpha+\beta)}$ والتى اشتقت لدالة الانتاج $q = Ax_1^{\alpha}x_2^{\beta}$ وبهذا تصبح معادلات (٥ــ١٩) على النحو التالى :

$$\left(\frac{\alpha}{\alpha+\beta}\right)\gamma q^{1/(\alpha+\beta)}(r_2/r_1)^{\beta/(\alpha+\beta)} = x_1$$

$$\left(\frac{\beta}{\alpha+\beta}\right)\gamma q^{1/(\alpha+\beta)}(r_2/r_1)^{-\alpha/(\alpha+\beta)} = x_2$$

ومن السهل جدا حل هاتين المعادلتين لقيمتى q برفع جانبى المعادلة الاولى الى القوة α وجانبى المعادلة الثانية الى القوة β ثم بضربهما •وهذه العمليه تؤدى الى دالة الانتاج التالية :

$$q = Ax_1^{\alpha}x_2^{\beta}.$$

PRODUCTION UNDER UNCERTAINTY

انه من الممكن تطبيق التحاليل التى اجرت على المنفعة المتوقعة فى الجزئين (٣ــ٨) و (٣ــ٩) على الوحدة الانتاجية عندما تتعرض لظروف عدم التاكد وذلك بافتراض ان المنتج يكون له دالة منفعة ويكون الربح احد عناصرها ، وان المنتج ايضا يخضع لبديهيات فون نيومان ومور جنستيرن • ونقدم مثالين على هذا فى المثال الاول يكون الناتج بصفة مؤكدة certain ويكون السعر معرضا لعدم التاكد uncertainty اما المثال الثانى فالعكس حيث ان السعر يكون مؤكدا والناتج يكون غير مؤكد •

افترض ان سعر الناتج يمكن ان يكون احد القيم المتباينة التاليه والتى يكون عددها n $(p_1, \ldots, p_n)$ بالاحتمال الاتى :

$(v_1, \ldots, v_n)$ بحيث ان $\sum_{i=1}^{n} v_i = 1$ فيكون الربح المتوقع للوحدة الانتاجيه هو :

$$E[\pi] = \sum_{i=1}^{n} v_i[p_i q - C(q)]$$

وبوضع اشتقاق الناتج مساويا لصفر نحصل على :

$$\frac{dE[\pi]}{dq} = \sum_{i=1}^{n} v_i[p_i - C'(q)] = \bar{p} - C'(q) = 0 \qquad (٥ــ٢٠)$$

بحيث ان $\bar{p}$ تكون القيمة المتوقعة للسعر • وللحصول على الحد الاعلى من الربح المتوقع

فان صاحب الوحدة الانتاجية سوف يقوم بمساواة السعر المتوقع بالتكلفة الحديه ، وسوف تتغير التحاليل بصفه بسيطه نظرا لوجود حالة عدم التاكد .

والان لنفترض حاله بحيث ان صاحب الوحدة يرغب فى الحصول على الحد الاعلى من المنفعه المتوقعة للربح :

$$E[U(\pi)] = \sum_{i=1}^{n} v_i U(\pi_i)$$

حيث أن

$\pi_i = p_i q - C(q)$ وللمره الثانية يكون مستوى الناتج هو المتغير الذى يدور حوله أتخاذ القرار .

$$\frac{dE[U(\pi)]}{dq} = \sum_{i=1}^{n} v_i U'(\pi_i)[p_i - C'(q)] = 0 \qquad (٥_٢١)$$

فاذا كانت $d^2U/d\pi^2 = 0$ فان صاحب الوحدة سوف يكون محايدا بالنسبه للمخاطره وتكون $U'(\pi_i)$ ثابتة ، او تكون التكلفه الحديه مساويه للسعر المتوقع كما هو الحال فى المعادله (٥_٢٠).

وبالطبع فان النتيجه سوف تختلف اذا أفترض ان صاحب الوحدة الانتاجيه متغاديا للمخاطره . ففى هذه الحاله تكون $d^2U/d\pi^2 < 0$ وتكون :

$$\sum_{i=1}^{n} v_i U'(\pi_i)[p_i - C'(q^*)] < 0 \qquad (٥_٢٢)$$

بحيث أن q^* هى مستوى الناتج الذى يعطى حل للمعادلة (٥_٢٠) افترض ان النتائج سوف ترقم بحيث ان p_i و π_i سوف تزداد كلما زادت i وعليه فان الحدود داخل القوس الكبير سوف تزداد من سالب للغايه الى موجب للغايه from most negative to most positive. وان $U'(\pi_i)$ سوف تنخفض مع i. وكنتيجه لهذا فان المعادله (٥_٢٢) تكون لها قيمة اصغر من المعادله (٥_٢٠) .

وبما ان MC يكون متزايدا فان q^* (وهى قيمة التوازن بالنسبه للناتج) يجب ان تكون اقل من $\hat{q}$ وعليه فان $\bar{p} > C'(\hat{q})$ وسوف يكون MC فى حالة التوازن اقل من السعر المتوقع وسوف يقود تغادى المخاطره الى مستويات اقل من الناتج عنها فى غيابه وسوف تكون هناك نتيجه عكس ماسبق اذا كان صاحب الوحده الانتاجية محبا للمخاطرة ، ولكن هذا الافتراض نادرا مايحدث

مثال : افترض ان متجه السعر المحتمل possible price vector هو (6, 7, 8, 9, 10) مع أحتمال حدوث كل واحد 0.2 فاذا وضعنا $U(\pi) = \ln \pi$ و $C = 0.05q^2$. فان القيمه المتوقعة للسعر هى $\bar{p} = 8$ وان حل المعادله (٥_٢٠) يعطى $q^* = 80$ وبالتعويض تصبح معادلة (٥_٢١) على النحو التالى :

$$\frac{dE[U(\pi)]}{dq} = \sum_{i=1}^{5}\left(0.2\frac{p_i - 0.1q}{p_i q - 0.05q^2}\right) = 0$$

ويمكن للقارئ التحقق من $\bar{q} \approx 74.88$ تعطى حلا تقريبيا •

والان اعتبر حالة الفلاح الذى يكون عنده سعر مضمون p ومستوى ناتج يهدف اليه $\bar{q}$ وقد ·اف الناتج الحقيقى عن الناتج المنشود كنتيجه للطقس وعلى هذا نفترض وجود n من هذه المستويات المحتمله للناتج وهى $(\delta_1\bar{q}, \ldots, \delta_n\bar{q})$ وباحتمال حدوث كالتـــــالى $(v_1, \ldots, v_n)$ بحيث ان $v_i\delta_i$ وكذلك v_i يكونا كميتين غير سالبتين ويكـــون مجموعهما يساوى واحدا وسوف يحدد مستوى الناتج الذى يهدف اليه الفلاح (وكميـــة المستوى المنشود) تكاليفه ويكون هو المتغير الذى على اساسه ياخذ الفلاح قراراته •

وسوف تكون المنفعة المتوقعة لربح الفلاح كالتالى :

$$E[U(\pi)] = \sum_{i=1}^{N} v_i U[p\delta_i\bar{q} - C(\bar{q})]$$

وبوضع اشتقاقها الجزئى مساويا لصفر ، نحصل على :

$$\frac{dE[U(\pi)]}{d\bar{q}} = \sum_{i=1}^{n} v_i U'(\pi_i)[\delta_i p - C'(\bar{q})] = 0 \qquad (٥_٢٣)$$

ويمكن معاملة المعادلة (٥_٢٣) على انها حاله خاصه من المعادلة (٥_ ٢١) بحيث ان $p_i = \delta_i p$ ان وجود عدم التاكد بالنسبه للناتج يقود الى النتيجه العامـــه المشابهة لنتيجةعدم التاكد بالنسبه للاسعار وهنا سوف يكون MC المتوقع اقل من السعر.

مثال : افترض ان δ_i هى $(0.6, 0.8, 1.0, 1.2, 1.4)$ وافترض ان v_i هى : $(0.1, 0.2, 0.4, 0.2, 0.1)$

د ع الان $p = 5$ و $C = 0.04\bar{q}^2 + \bar{q}$ و $U(\pi) = -e^{-0.01\pi}$ والتى لهو نغاديا للمخاطر بقيمة مطلقه ثابته (راجع الجزء ٣_٩) فاذا ساوينا بين MC المتوقعـــه والسعر فان $\bar{q} = 50$ وتكون المنفعه المتوقعة كالتالى :

$$E[U(\pi)] = -\sum_{i=1}^{5} v_i e^{-0.01(p\delta_i\bar{q} - 0.04\bar{q}^2 - \bar{q})}$$

ويكون شروط الدرجه الاولى كالتالى :

$$\frac{dE[U(\pi)]}{d\bar{q}} = 0.01\sum_{i=1}^{5} v_i(p\delta_i - 0.08\bar{q} - 1)e^{-0.01(p\delta_i\bar{q} - 0.04\bar{q}^2 - \bar{q})} = 0$$

ويمكن للقارئ التحقق من ان $\bar{q} \approx 43.59$ تعطى حلا تقريبيا •

٥ - ٦ دوال الإنتاج الخطية : LINEAR PRODUCTION FUNCTIONS

تعرف حركة الانتاج الخطيه A linear production activity بانها العمليه الـــتى يتم من خلالها أنتاج واحدا او اكثر من المنتجات بنسب ثابته باستخدام واحد أو اكثـــر

من الد واخل بنسب ثابته . وحيث انها متجانسه من الدرجه الاولى فانها تعطى حجما للغله ثابتا (constant returns to scale) اى انه اذا ازدنا جميع الد واخل (او خفضناها) نسبيا ، فان جميع المنتجات سوف تزداد (او تنخفض) بنفس النسبه . وتتكون دالة الانتاج الخطيه من مجموعة من الحركات الانتاجيه الخطيه التى يمكن الاستفادة منها فى ان واحد .

حالة الناتج الواحد : The One-Output Case

اعتبر الحركه الانتاجيه الخطيه التى يتم خلالها انتاج ناتج واحد فقط من استخدام m من الد واخل . ونصف هذه الحركه تماما من خلال مجموعه من العوامل a_i $(i = 1, \ldots, m)$ التى تعطى كميات الد واخل الضروريه لانتاج وحده واحدة فقط من الناتج. ونستطيع تقرير بطريقة فريده مستويات الداخل الضروريه لاى مستوى معين من الانتاج :

$$x_i = a_i q \qquad i = 1, \ldots, m \qquad (٥_٢٤)$$

ونستطيع ايضا ان نقرر الحد الاعلى من الناتج الذى يمكن تامينه من مجموعة كميات محدده من الد واخل :

$$q = \min_i \left(\frac{x_i}{a_i}\right) \qquad a_i > 0 \qquad (٥_٢٥)$$

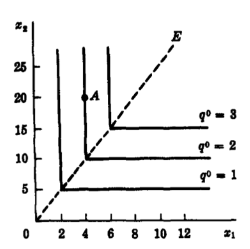
ويستطيع كل داخل ان يصبح العامل الذى يحدد الناتج ويتبع من المعادله (٥_٢٤) ان الكميه x_i سوف تساند كمية من الناتج قدرها x_i/a_i من الوحدات ولكن جميع الد واخل الاخرى يجب ان تكون متوفره بالكميات المناسبه لتحقيق هذا المستوى من الانتاج. وعلى هذا فان اصغر الكميات x_i/a_i سوف تقرر الحد الاعلى الممكن انتاجه من المنتجات . وقد تبقى اجزاء من كميات بعض الد واخل غير مستخدمه بسبب قلة موارد هذه الد واخل المحدده .

مثال : دع عوامل الحركه المستخدم فيها داخلين تكون $a_1 = 2$ و $a_2 = 5$ وعليه فان وحدة واحده من الناتج تتطلب $x_1 = 2$ و $x_2 = 5$ وان وحدتين من الناتج تتطلب $x_1 = 4$ و $x_2 = 10$ وهكذا فاذا كان صاحب هذه الوحده الانتاجيه يمتلك ٤ وحدات من الداخل الاول و ٢٠ وحده من الثانى ، فانه يستطيع انتاج وحدتين من الناتج .

$$q = \min\left(\tfrac{4}{2}, \tfrac{20}{5}\right) = 2$$

فالداخل الاول يكون محددا ويجبر صاحب الوحده على ترك ١٠ وحدات من العشرين وحده للداخل الثانى غير مستخدمه وشكل (٥_١) يتضمن اشكال منحنيات تساوى الكميه لمثل هذه الحركه الانتاجيه بحيث ان OE هو مجرى التوسع الذى عرفناه بانه المحل

الهندسى للنقط x_1 و x_2 بالنسبه 2:5 وكل منحنى يعمل زاويه قائمه على مجرى التوسع • فاذا بدانا من نقطة ما على مجرى التوسع، فان اى زياده فى احد الدواخل بدون زياده متناسبه لاخر سوف تسمح بزيادة فى الناتج وتقطع نقطة A ومحاورهـــا $x_1 = 4$ و $x_2 = 20$ ، على المنحنى $q^0 = 2$ •



افترض الان ان صاحب الوحده الانتاجيه يمتلك n وحده حركيه انتاجيه خطيه معينـــه بحيث انه يستطيع الاستفاده من كل واحده منها على حده او كلها مجتمعه لانتـــاج ما تحتاجه من المنتجات • افترض ان a_{ij} $(i = 1, \ldots, m: j = 1, \ldots, n)$ يمثل كميـــة الداخـــل i الضرورى لانتاج وحده واحده من المنتج باستخدام الحركه الانتاجيه j وتكون نتائجها قابله للجمع .additive بحيث ان اجمالى الانتاج هو :

$$q = \sum_{j=1}^{n} q_j$$

بحيث ان q_j هى الكميه المنتجه باستخدام الحركه الانتاجيه j وان اجمالى الداخل المطلوب هو :

$$x_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} q_j \qquad i = 1, \ldots, m \qquad (٥_٢٦)$$

ان متطلبات الداخل المركب Composite input لكل وحده انتاج α_i $(i = 1, \ldots, m)$ تكون معدلات ذات ثقل weighted averages لعوامل الحركات الانتاجيه الفرديه :

$$\alpha_i = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j a_{ij} \qquad i = 1, \ldots, m \qquad (٥_٢٧)$$

بحيث ان $0 \leqq \lambda_j \leqq 1$ وان $\sum_{j=1}^{n} \lambda_j = 1$ وان $\lambda_j = q_j/q$ تمثل النسبه من الانتاج الاجمالى المنتج بالحركه الانتاجيه j وتسمح الحركات الانتاجيه المركبه بالتعويض بين

الدواخل التى تغير، جزريا النمط فى المعادله(٥ـ٢٥) ويكون الحد الاعلى للناتج الذى يمكن تامينه من مجموعة محدده من كميات الداخل على النحو التالى :

$$q = \min\left(\frac{x_i}{\alpha_i}\right) \qquad \alpha_i > 0 \qquad (٥\text{ـ}٢٨)$$

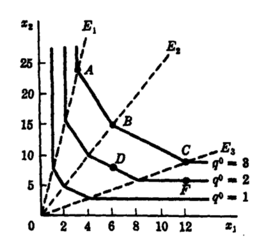
وتكون النسبه الادنى x_i/α_i محددة ولكن تم اختبار λ_j للحصول على الحد الاعلى من النسبه الادنى x_i/α_i .

<u>مثال</u> : افترض ان صاحب وحدة انتاجيه يستطيع انتاج منتج ما باستخدام داخلين وثلاثة حركات انتاجيه بحيث ان:

$$a_{11} = 1 \qquad a_{12} = 2 \qquad a_{13} = 4$$
$$a_{21} = 8 \qquad a_{22} = 5 \qquad a_{23} = 3$$

ويمثل الشكل(٥ـ٢) شكلا رسميا لمنحنيات تساوى الكميه لمثل هذه الدالة الانتاجيه الخطيه ، وتمثل OE_1, OE_2, OE_3 مجرى التوسع للحركات الانتاجيه رقم ١ ٢ ٣ على الترتيب.فاذا اعتبرنا المنحنى $q^0 = 3$ فان النقط A, B, C تعطى متطلبات الداخل اذا استخدمنا احدى الحركات الانتاجيه وتعطينا قطعة الخط AB متطلبات الداخل لجميع الحركات الانتاجيه المركبه والتى تكونت من الحركات الانتاجيه ١ ، ٢ لانتاج ٣ وحدات وهذه تكون حالة خاصه للمعادلة (٥ـ٢٧) بحيث ان :

$$x_1 = 3\alpha_1 = 3[\lambda + 2(1-\lambda)]$$
$$x_2 = 3\alpha_2 = 3[8\lambda + 5(1-\lambda)]$$



وهذه حسب تغيرات λ من صفر (نقطه B) الى واحد (نقطة A) وبالمثل فان قطعة الخط BC تعطى متطلبات الداخل للحركات الانتاجيه المركبه من ٢، ٣ والتى لايمكن تعويض داخل مكان داخل اخر (تحت هذه الحركات) وخصوصا الى يساره OE_1 اى للمقدار $x_2/x_1 > 8$ بحيث ان الحركه الانتاجيه 1 فقط هى التى سوف تستخدم ، وان بعضا من X_2 سوف يظل بدون استخدام ٠ اما على يمين OE_3 اى للمقدار $x_2/x_1 < \frac{3}{4}$ فان الحركه الانتاجيه ٣ فقط هى التى سوف تستخدم وان بعضا من X_1 سوف يبقى بدون استخدام٠

وتعطى منحنيات تساوى الكميه التى اشتقت فى الباب الرابع الكميه x_2 كدوال محدبه بانضباط بالنسبه للكميه x_1 ويكون لها RTS متصله ومتناقصه ٠

والمنحنيات فى شكل (٥ــ٢) تعطى x_2 كدوال محدبه(ولكن ليس بانضباط) بالنسبه للمقدار x_1 ولها RTS غير متصله وغير متزايده ٠ وسوف تولد دوال الانتاج الخطيه دائما منحنيات بهذا الشكل العام المعروض فى الشكل (٥ــ٢) وهذه المنحنيات تمدنا بحل شكل (اى حل بالرسم) للمعادله(٥ــ٢٨) بمعنى ، انها تعطى الحد الاعلى لمستويات الانتاج التى يمكن تامينها من كل مجموعة دواخل وبهذا نتخلص من اى حركه انتاجيه تكون اقل كفاءة ، وتعرف اى حركه مبسطه او حركه مركبه بانها اقل كفاءه inefficient اذا كان هناك حركه اخرى مبسطه او مركبه وتتطلب اكثر من اى داخل تتطلبه الحركه الاقل كفاءة ولكن اقل منها على الاقل بواحد من الدواخل ٠وواضح من الشكل (٥ــ٢) ان مجموعة الحركتين ١، ٣ تكون اقل كفاءة ونتحصل على متطلبات الداخل للمنحنى $q^0 = 3$ عن طريق قطعة الخط الواصله بين A و C والتى تقع فوق قطعتى الخط AB و BC .

حالات مضاعفات الإنتاج : Multiple-Output Cases

انه من السهل ترجمة مفهوم دالة الانتاج الخطيه لتضم اكثر من ناتج واحد ٠ افترض ان كل واحد من s من الناتج يتم انتاجه بحركه انتاجيه خطيه باستخدام m من الدواخل مع العلم بانه لا تزال توجد امكانيه انتاج منتج معين باكثر من حركه انتاجيه واحدة افترض ان a_{ij} تمثل كمية الداخل i المطلوبه لانتاج وحده واحده من الناتج j فتكون متطلبات الداخل لانتاج مجموعة معينه من المستويات لناتج ما على نفس نمط المعادله (٥ــ٢٦):

$$x_i = \sum_{j=1}^{s} a_{ij} q_j \qquad i = 1, \ldots, m \qquad (٢٩\text{ــ}٥)$$

حيث ان q_j هى الكميه المحدده للناتج j ويكون التعويض بين المنتجات والداخل محتمل مثل هذه الحالة ٠

وقد تعطى الحركات الانتاجيه الخطيه اكثر من ناتج واحد في اغلب الحالات العامه. افترض ان كل من n حركة خطيه تعطى s من المنتجات وتستخدم m من الدواخل، وافترض ايضا ان z_j $(j = 1, \ldots, n)$ ترمز الى مستوى الحركه الانتاجيه j وسوف يكون اختباره وحدة مستوى للحركه اعتباطا arbitrary مادام الدواخل والمنتجات المخصصه . فاذا وضعنا a_{ij} لتمثل كميه الناتج j و b_{ij} لتمثيل كمية الداخل i المطلوب لوحدة المستوى للحركه j وبهذا تكون المنتجات والدواخل التى تولدت عن طريق المجموعة المعينه من الحركات الانتاجيه هى :

$$q_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} z_j \qquad i = 1, \ldots, s$$

$$x_i = \sum_{j=1}^{n} b_{ij} z_j \qquad i = 1, \ldots, m \qquad (٥_٣٠)$$

وتعرف هنا ايضا الحركات الانتاجيه المركبه بانها المعدلات ذات الثقل للحركات الانتاجيه المبسطه .

٥ ٧ البرمجة الخطية : LINEAR PROGRAMMING

تغطى البرمجه الخطيه لمسائل المحتويه على عملية الحصول على الحد الاعلى لدالة خطية او محتويه على عملية الحصول على الحد الادنى تحت شرط مجموعة من اللامتساويات الخطيه والمشتمله على المتطلب الذى ينص على ان تكون جميع قيم المتغيرات غير سالبه . وبما ان الدوال الخطيه تكون محدبه ، فان البرمجه الخطيه سوف تمدنا بحالة خاصة قد نستخدم فيها تحاليل كون ـ تكر(انظر التمرين ٨ـ٣) وعلى كل حال ، فان المميزات الخاصه بالمجموعات الخطيه تسمح باستخدام طرق مختلفه ولكنها متكافئة لمعالجة مثل هذه المجموعات .

ان النمط (الشكل) العام للبرمجه الخطيه هو ايجاد قيم للمتغيرات $q_j (j = 1, \ldots, n)$ والتى تعطى الحد الاعلى للمعادله الاتيه :

$$y = p_1 q_1 + p_2 q_2 + \cdots + p_n q_n \qquad (٦_٣١)$$

تحت شرط :

$$a_{i1} q_1 + a_{i2} q_2 + \cdots + a_{in} q_n \leqq x_i^0 \qquad i = 1, \ldots, n \qquad (٥_٣٢)$$

$$q_j \geqq 0 \qquad j = 1, \ldots, n \qquad (٥_٣٢)$$

ان الرموز المالوفه للقارئ x^0 ، q ، p تكون مربحه لمناقشة البرامج المكونه من حركات الانتاج الخطيه . ولكن الاطار العام للبرمجه يغطى مدى اوسع من المسائل وعلى

العموم فان المتغيرات x_i , a_{im}, p_j قد تكون موجبه سالبه او صفر بترجمة معتمده على المسالة تحت الفحص والمناقشه •

فالاطار الموضح فى المعادلتين(٥ـ٣١) و (٥ـ٣٣) يكون عاما بعض الشئ لتلك العمليه هى للحصول على الحد الادنى لدالة خطيه ، فان المساله قد تكتب على النمط العام المتفق عليه للحصول على الحد الاعلى لسالب المساله • اما اذا كان الشرط على النمط $\geqq$ فان هذه اللامتساويه تتغير الى النمط المعطى بالمعادلة (٥ـ٣٢) بضرب طرفيها فى (١ـ) اما اذا كان الشرط متساويه ، فيمكن تمثيلة بلامتساويتين ضعيفتين $\leqq$ او $\geqq$ ويمكن قلب اللامتساويه الثانيه بضربها بالكميه(١ـ)•

ان نظام البرمجه الخطيه المعتبر هنا هو النظام الذى يختار من خلاله صاحب الوحده الانتاجيه عدد n من مستويات الناتج (وهى الـ q's) ليحصل من خلالها الحد الاعلى من ايراداته المعطاه بالمعادله(٥ـ٣١) باسعار ثابته للناتج (وهى الـ p's) ويمتلك صاحب الوحده كميات ثابته (وهى الـ x_i^0's) للدواخل m (١)
وسوف توصف فنيه الانتاج بعوامل الدواخل والمنتجات input-output coefficients (وهى الـ a_{ij},) والتى تعطى المتطلب الثابت للداخل i الضرورى لانتاج وحده واحده من الناتج (j وتنص اللامتساويات فى(٥ـ٣٢) على ان صاحب الوحده الانتاجيه محدود بما لديه من دواخل حيث انه يمكن ان يستخدم كميات اقل مما لديه من الدواخل ولكنه لا يستطيع ان يستخدم كميات اكثر مما عنده بالطبع • واخيرا تنص المعادله(٥ـ٣٣) على ان مستويات الناتج لايمكن ان تكون سالبه •

مجموعة نقط التحقق : The Feasible Point Set

ان اى مجموعة اعداد حقيقيه تحقق المعادلتين(٥ـ٣٢) و (٥ـ٣٣) تكون حلا يمكن تحقيقه feasible solution لنظام البرمجه الخطيه • وتكون مجموعة نقاط امكانيه التحقق feasible points فى الفراغ المكون من n ـ بعدا (R^n) n-dimensional space ما يسمى بمجموعة نقط التحقق *feasible point set* لهذا النظام•
انه من المفيد مراجعة بعض الخواص العامه لمجموعات النقط فى الفراغ point sets in R^n قبل الشروع فى اشتقاق الخواص الخاصه لمجموعات نقط التحقق • وتعرف هنا المجموعة المحدبه " *A convex set* بانه له خاصية ان كل نقطه على قطعة الخط المستقيم الواصل بين نقطتين فى المجموعه تكون ايضا ضمن المجموعة • وتعرف" نقطة الحدود" *boundary point* بان لها نقاط ملاصقة داخله ضمن المجموعة وان لها نقاط اخرى

(١) لاتوجد دواخل مشتراه فى هذا المثال، ولكن يمكن اضافتها بدون صعوبه جمه •

ملاصقه ليست داخله ضمن المجموعة • وان جميع النقاط الملاصقة لنقطة داخليـــــــــه **interior point** تكون ضمن المجموعة • ويقال للمجموعه بانها " مغلقه " **closed** اذا كانت تحتوى جميع نقط الحدود ، ويقال ان المجموعة " مفتوحه " **open** اذا كانـــت لا تحتوى على اى ان المجموعة الخاليه **null set** بدون نقاط والمجموعة بنقطه واحده يكونا معا ، معرفين انهما محدبين ومغلقين •

وتكون مجموعة جميع النقط فى الفراغ R^n مغلقه ، وانه ليس لها نقاط حدود وانهـــا تحتويهم جميعا • وتعرف المعادله الخطيه مثل المتساويه للشرط i فى المعادلة (٥ــ٣٢) ، المسطح المفرط فى R^n **hyperplane** ويمثل هذا المسطح المفرط خطا فى R^2 وسطحا مستويا فى R^3 وسطحا بابعاد $(n-1)$ فى R^n اذا كانت $a_{ij}=0$. ، فان السطح المفرط يكون موازيا لمحور q_j واما اذا كانت $x_i^0=0$, فانه ســـوف يتضمن نقطة اصل R^n وسوف يفصل السطح المفرط والمعرف بالشرط i R^n. الى فضـــاءات نصفيه مغلقه **closed half-space** :

$$a_{i1}q_1+a_{i2}q_2+\cdots+a_{in}q_n \leqq x_i^0$$

ونقط هذه الفضاءات تحقق الشرط i ويفصل ، ايضا (R^n) الى فضاءات نصفيهمفتوحه **open-half space.**

$$a_{i1}q_1+a_{i2}q_2+\cdots+a_{in}q_n > x_i^0$$

ونقط هذه الفضاءات تنقض الشرط i وتكون هذه الفضاءات النصفيه مجموعات محدبه وتكون الفضاءات النصفيه المغلقه مجموعات محدبه مغلقه •

ان اى مجموعة نقط point set تحقق الشرط الغير سالب j فى المعادلـــــة (٥ــ٣٣) تكون فضاء نصفيا مغلقا وعليه فانها تكون مغلقه ومحدبه •

وسوف تكون النقاط التى تحقق جميع الشروط المنصوص عليها فى المعادلتين (٥ــ٣٢)، (٥ــ٣٣) بطريقة فرديه ، مجموعة محدبه مغلقه • ولابد من اى حل محقق لنظام البرمجه ان يحـقق جميع الـ$(m+n)$ من الشروط وتحتوى مجموعة نقاط التحقق على نقاط محتويه فى كل من الـ$(m+n)$ مجموعة والتى كونت عن طريق الشروط ، اى انها تكون تقاطع الـ$(m+n)$ جموعة • وتنص احد نظريات مجموعـــة النقط point-set theory على ان التقاطع لاى عـــدد معـين للمجموعات المحدبه المغلقه يكون هو نفسه مجموعة محدبه مغلقه • وتضع الشـروط الغير سالبه للمعادله (٥ــ٣٣) حد ادنى lower bound لقيم المتغيرات ويتبع مـن هذا ان مجموعة نقط التحقق لنظام البرمجه الخطيه تكون ، دائما مغلقه ومحدبهومحدده

من الاسفل bounded from below. [١] وهذه النقطه مهمه جدا لان خواص مثل هذه المجموعات تكون معروفه جدا .

مثال : افترض ان صاحب وحدة انتاجيه يمكنه انتاج منتجين مستخدما ثلاثة دواخل كمياتها كالتالي : $x_1^0 = 18$, $x_2^0 = 8$, $x_3^0 = 14$ وتصف الشروط التاليه فرص الانتاج المتاحه لصاحب الوحده الانتاجيه :

$$\begin{aligned} q_1 + 3q_2 &\leqq 18 \\ q_1 + q_2 &\leqq 8 \\ 2q_1 + q_2 &\leqq 14 \\ q_1, q_2 &\geqq 0 \end{aligned} \qquad (٥_٣٤)$$

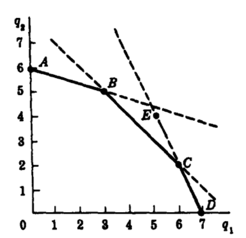
وتحدد كل واحده من هذه الشروط حلول المساله ضمن فضاءات نصفيه مغلقه . وتحدد الشروط $q_1, q_2 \geqq 0$ حلول المساله فى الربع التغير سالب من الفضاء اليوكليدى وسوف تكون مريحه للقارئ حصر بقية الشروط فى هذا الربع الغير سالب .

ويمثل الشكل (٥_٣) بعض السطوح المفرطه hyperplanes. وهى خطوط فى R^2 ويحدد الشرط الاول من مجموعات المعادلات (٥_٣٤) الحلول فى نقط تقع على او اسفل الخط الذى يضم نقطتى A و B اما الشرط الثانى ، فيحدد الحلول فى نقط تقع على او اسفل من الخط الذى يضم نقطتى B و C اما الشرط الثالث فيحدد الحلول فى النقاط التى تقع على او اسفل من الخط الذى يضم نقطة C D .

وتعرف مجموعة نقط التحقق بحدود الخطوط الغير مقطعه $OABCD$, وهى مغلقه ومحدبه، ومحدده من اعلى ومحدده من اسفل . وتحقق كل نقطه فى المجموعه جميع الشروط المعطاه بالمعادلات (٥_٣٤) وان كل نقطه ليست ضمن المجموعه تخالق واحد او اكثر من الشروط السابقه . فمثلا نقطه $E\ (q_1 = 5, q_2 = 4)$ تحقق الشرط الاول ، والثانى وشرط $q_1, q_2 \geqq 0$ ، ولكنها لاتدخل ضمن مجموعة نقط التحقق لانها تخالف الشرط الثانى من (٥_٣٤).

---

(١) وهذا لا يكفى لاثبات ان نظام البرمجه له حل امثل محدد . ويجب ايضا اثبات ان مجموعة نقط التحقق ليست خاليه not null وعليه فان شرط كفايه لتحديد يقالحل الامثل finiteness ينص على ان مجموعة نقط التحقق لابد وان تكون محدده من الاعلى bounded from above بمعنى ان المتجه vector التالى $(u_1, \ldots, u_n)$ موجود بحيث ان $u_i \geqq q_i$ لجميع قيم $(q_1, \ldots, q_n)$ فى مجموعة نقط التحقق .



الحلول المثلى : **Optimal Solutions**

ومتى ما عرفنا مجموعة نقط التحقق ، فان العمل التالى هو ايجاد نقطه من نقـــط المجموعه بحيث انها تمكننا من الحصول على القيمه العظمى للدالة المطلوبه(٥ــ٣١) وسوف تعرف مفهومين اضافيين فى نظرية مجموعة ــ النقط **point-set theory** لانهما سوف يكونا مفيدين لهذا الغرض • فتعرف نقطه الطرف ***extreme point*** لمجموعة محدبه مغلقه على انها نقطه الحدود التى تقع على اى خط يوصل بين اى زوج من النقاط فى المجموعة • فمثلا النقط ***O, A, B, C, D*** فى الشكل (٥ــ٣) تكون نقــط اطراف • • • • ونعرف ايضا السطح المفرط الذى يحتوى على نقطه حدود تابعه لمجموعة محدبه مغلقه بانه سطح مفرط مساعد ***supporting hyperplane*** للمجموعه اذا كانت كل مجموعة موجوده داخل ضمن واحده من الفضاءات النصفيه المغلقه المعرفه به •

افترض الان ، انه يوجد حل امثل لنظام البرمجه المعطى بالمعادلتين (٥ــ٣١) و(٥ــ٣٣) وافترض ان $(q_1^0, q_2^0, \ldots, q_n^0)$ تمثل اى نقطه فى مجموعة نقط التحقق ضع هذه القيم فى المعادله(٥ــ٣١) للحصول على القيمة المقابله للداله المطلوبه y^0 :

$$y^0 = p_1q_1^0 + p_2q_2^0 + \cdots + p_nq_n^0$$

عرف فضاء نصفى مغلق يحتوى على جميع النقاط بقيم الداله المطلوبه بحيث انها لا تزيـد عن y^0 :

$$p_1q_1 + p_2q_2 + \cdots + p_nq_n \leqq y^0 \qquad (٥ـ٣٥)$$

وعرف ايضا فضاء نصفى مفتوح يحتوى على جميـع النقاط بقيم اكبر من y^0 :

$$p_1q_1 + p_2q_2 + \cdots + p_nq_n > y^0 \qquad (٥ـ٣٦)$$

وبذلك تكون النقطه المختاره هي النقطه المثلى اذا كانت(٥ــ٣٥) تمثل سطح مفرط مساعد لمجموعة نقط التحقق ، وان المجموعة المعرفه بالمعادله(٥ــ٣٦) تكون مجموعة خاليه فاذا كانت(٥ــ٣٥) ليست سطح مقرط مساعد ٠ فان النقطة المختاره لا تكون نقطه مثلى ٠ ففي هذه الحاله تكون المجموعه المعرفه بالمعادله (٥ــ٣٦) محتويه على الاقل على نقطه تحقق واحدة بقيمة لـ y اكبر من y^0 وبما ان السطح المقرط المساعد لايحتوى على نقط داخليه لمجموعة نقط التحقق ، فانه ينبع من ذلك ان النقط المثلى تكون دائما على الحدود مجموعة نقط التحقق ٠ وسوف تذكر هنا نظرية ذات اهميه كبرى بالنسبه للبرمجه الخطيه وتنص هذه النظريه على ان : اى مجموعة محدبه مغلقه تكون محدده من الاسفل (اى لها حد ادنى) تمتلك نقطه واحدة او اكثر من نقاط الاطراف فى كل سطح مقرط مساعد (١) وهذه النظريه تعنى انه اذا كان لنظام البرمجه حل امثل ، فانه سوف يوجد ، على الاقل ، نقطه طرف واحده مثلى ٠ وسوف يكون البحث عن الحل الامثل محدودا على عدد معين من النقاط حيث ان عدد نقاط الاطراف يكون محدودا ٠ وهذا يعنى انه على الغالب يوجد m من عدد n من q's التى تحتاج ان يكون لها قيم موجبة فى حل امثل ٠

<u>مثال :</u> افترض ان صاحب الوحده الانتاجيه والذى يمتلك فرصه انتاجيه موضحه بالمعادلة (٥ــ٣٤) ومرسومة على الشكل (٥ــ٣) يرغب فى بيع ما ينتجه بالسعريين الثابتين p_1 و p_2 وانه يرغب فى الحصول على الحد الاعلى من ايراداته ففى الحاله التى تكون فيها السعر بين $p_1 = 1$ و $p_2 = 2$ ، وان :

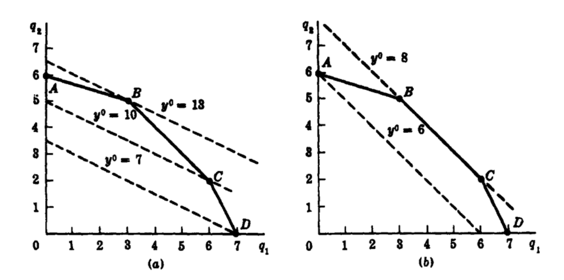
$$y = q_1 + 2q_2$$

مرسومه على الشكل (٥ــ١) ويكون السطح المفرط والمعرف بـ $y^0 = 7$ اوطى الخطوط المقطعه ، ويحتوى على نقطه الطرف $D\ (q_1 = 7, q_2 = 0)$. ويحتوى الفضاء النصفى المفتوح والمقابل لهذه النقطه (وهو المعرف بالمعادله (٥ــ٣٦) :

على نقط التحقيق A, B, و C على سبيل المثال ٠ وعليه فان النقطه D ليست نقطه مثلى ٠ وتقع النقطه الطرفيه $C\ (q_1 = 6, q_2 = 2)$ فى السطح المفرط المعرف بالمعادله $y^0 = 10$ ويحتوى الفضاء النصفى المفتوح المقابل لهذه النقطه على نقطه التحقق ، وعليه فان النقطه C, ليست نقطه مثلى وتكون النقطه $B\ (q_1 = 3, q_2 = 5)$ نقطه مثلى لانها داخله ضمن محتويات السطح المفرط المساعد المعرف بالمعادله $y^0 = 13$ ولا يحتوى الفضاء النصفى المفتوح المقابل لهذه النقطه على اى نقطه من نقاط التحقق ويقع الحل الامثل عند نقطه طرف ويكون حلا فريدا unique. ٠

---

(١) راجع اثبات هذه النظريه فى كتاب G. Hadley تحت عنوان :
Linear Programming



ويوضح الشكل (٥ـ٤ب) عن طريق الرسم ، مجموعة نقط التحقق نفسها باسعار مختلفه للمنتجات وبدالة مطلوبه مختلفه وهما : $p_1 = p_2 = 1$ وكذلك $y = q_1 + q_2$ وتقع نقطه الطرف $A\ (q_1 = 0, q_2 = 6)$ على السطح المفرط والمعرف بالمعادله $y^0 = 6$ ولكنها ليست نقطه مثلى • وتقع نقطتى الطرف B و C، وجميع النقط التى تقع على الاطراف المتداخله لمجموعة التحقق على السطح المفرط المساعد الامثل المعروف بالمعادله $y^0 = 8$ ولايوجد حل امثل فريد فى هذه الحاله ، ولكنه يوجد نقاط حدود مثلى ولكنها ليست نقاط اطراف • وبالرغم من هذا ، فانه توجد نقاط اطراف مثلى •

وتمثل حدود مجموعة نقاط التحقق الموضحه فى الشكل (٥ـ٤) والخاصه بالبرمجه الخطيه ، النظير لمنحنى تحويل الانتاج والمعرف للحاله المتصله والمشروحه فى الجزء (٤ـ٥) ففى مثل هذه الحاله (الحاله المتصله) يعطى منحنى تحويل الانتاج x_2 بدلالة x_1 (حيث ان الداله تكون مقعرة بانضباط) بمعدل تحويل انتاج (RPT) متصل ومتزايد • اما فى حالة النظير للبرمجه الخطيه ، فان x_2 تكون بدلاله x_1 (بحيث ان الدالة تكون مقعرة وليست بانضباط) بمعدل تحويل انتاج غير متصل وغير متزايد وتعتمد النقطه المثلى للحد الاعلى من الايرادات على نسبه اسعار المنتجات فى كلا الحالتين •

الازدواجية : Duality

افترض نظام البرمجه الخطى التالى ، ثم اوجد قيم r_i $(i = 1, \ldots, m)$ والتى تمكننا من الحصول على الحد الاعلى للنظام التالى :

$$C = r_1x_1 + r_2x_2 + \cdots + r_mx_m \quad (٥\text{—}٣٧)$$

تحت الشروط التاليه :

$$\begin{aligned} a_{11}r_1 + a_{21}r_2 + \cdots + a_{m1}r_m &\geqq p_1 \\ a_{12}r_1 + a_{22}r_2 + \cdots + a_{m2}r_m &\geqq p_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{1n}r_1 + a_{2n}r_2 + \cdots + a_{mn}r_m &\geqq p_n \end{aligned} \quad (٥\text{—}٣٨)$$

$$r_i \geqq 0 \qquad i = 1, \ldots, m \quad (٥\text{—}٣٩)$$

ويظهر لنا مما سبق ، ان انظمه البرمجه الخطيه تكون دائما مزدوجه • فالنظام فى المعادلات من (٥—٣٧) الى (٥—٣٩) تكون لثنائى *dual* للنظام فى المعادلات من (٥—٣١ الى (٥—٣٣) فالنظام الاولى يحتوى على m من الشروط و n من المتغيرات ، بينما النظام الثنائى له يتكون من n من الشروط و m من المتغيرات وتكون الغرض من الدالة الاولى هو الحصول على الحدالاعلى بينما الغرض من الدالهالثانيه هو الحصول على الحد الادنى ويمكن تبادل عوامل الداله وكذلك ثوابت الشروط فى كلا النظامين وتكون اللامتساويات معكوسه ومثال ذلك ان العامل a_{ij} يكون فى الصف i والعمود j فى المعادلات (٥—٣٢) بينما هو فى المعادلات (٥—٣٨) يكون فى الصف j والعمود i وبهذا تكون الازدواجيه عمليه تماثلية •

وقد يرغب القارىء فى التحقق من ان النظام الاولى يكون الثنائى لثنائية هو نفسه[1] dual of its dual ويرتبط اى نظام بثنائية its dual من عدة جهات وسوف تذكر هنا بعض نظريات الازدواجيه الهامه فمثلا : اذا وجد حل امثل محدود لاى واحد من الانظمة فانه يوجد بالتالى حل امثل محدود للانظمة الاخرى • وكذلك اذا وجد حلول محققه لكلا النظامين (النظام الاول وثنائيه) فانه بالتالى توجد حلول مثلى محدده لكليهما •

افترض انه توجد حلول مثلى (وقد تم الحصول عليها بالفعل) لكلا النظامين وافترض كذلك ان هذه الحلول المثلى يمثلها الكميات التاليه $q_1^*, \ldots, q_n^*$ و $r_1^*, \ldots, r_m^*$

---

(١) اضرب (٥—٣٧) و (٥—٣٩) فى (١—) لتضع هذا النظام فى النمط التقليدى ثم طبق القواعد المعطاه سابقا لايجاد ثنائى هذا النظام ، ومن ثم اضرب ثنائيه (دالة وشروط) بالعدد (١—) وتكون النتيجه هو نفس النظام المعطى بالمعادلتين (٥—٣١) و (٥—٣٢) •

ففى هذه الحالة نجد أن احد نظريات الازدواجيه تنص على ان القيمة المثلى لمتغير ما فى احد الانظمة يساوى صفرا اذا كان الشرط المقابل فى النظام الاخر تحقق على اساس انه لامتساويه بحته • (اى أو بدون علامة التساوى) وتكون غير سالبه أذا كـــان الشرط المقابل تحقق على اساس انه لامتساويه :

$$a_{i1}q_1^* + \cdots + a_{in}q_n^* < x_i^0 \quad \text{implies} \quad r_i^* = 0$$

(٥ـ٤٠)

$$a_{i1}q_1^* + \cdots + a_{in}q_n^* = x_i^0 \quad \text{implies} \quad r_i^* \geqq 0$$

$$i = 1, \ldots, m$$

وأنه كذلك :

$$a_{1j}r_1^* + \cdots + a_{mj}r_m^* > p_j \quad \text{implies} \quad q_j^* = 0$$

(٥ـ٤١)

$$a_{1j}w_1^* + \cdots + a_{mj}r_m^* = p_j \quad \text{implies} \quad q_j^* \geqq 0$$

$$j = 1, \ldots, n$$

وتنص نظريه اخرى مقاربه للنظريه السابقه على انه اذا كانت القيمة المثلى لمتغير ما فى احد الانظمه موجبه ، فأن القيم المثلى للمتغيرات فى النظام الاخر سوف تحقق الشـــرط المقابل كمساويه وليس كاللامتساويه :

(٥ـ٤٢)

$$r_i^0 > 0 \quad \text{implies} \quad a_{i1}q_1^* + \cdots + a_{in}q_n^* = x_i^0$$

$$i = 1, \ldots, m$$

(٥ـ٤٣)

$$q_j^* > 0 \quad \text{implies} \quad a_{1j}r_1^* + \cdots + a_{mj}r_m^* = p_j$$

$$j = 1, \ldots, n$$

فاذا وضعنا القيمه المثلى لـ q_j^* فى المعادلتين (٥ـ٣١) و (٥ـ٣٢) ثم ضربنـــا الشرط i بالكميه $r_i^*\ (i = 1, \ldots, m)$ ثم جمعنا الشروط الناتجه نحصل على :

(٥ـ٤٤)

$$\sum_{i=1}^{m} r_i^* \sum_{j=1}^{n} a_{ij}q_j^* = \sum_{i=1}^{m} r_i^* x_i^0$$

وهذه المتساويه ناتجه من المعادله (٥ـ٤٢)[١] فاذا وضعنا قيمة r_i^* المثلى فى المعادله (٥ـ٣٧) والمعادله (٥ـ٣٨) ثم ضربنا الشرط j بالكميه $q_j^*\ (j = 1, \ldots, n)$ ثم جمعنا n الشروط الناتجه ، نحصل على :

(٥ـ٤٥)

$$\sum_{j=1}^{n} q_j^* \sum_{i=1}^{m} a_{ij}r_i^* = \sum_{j=1}^{n} q_j^* p_j$$

وهذه المتساوية تتبع من المعادلة (٥ـ٤٣) ونلاحظ ان الطرف الايسر من المعادلة

---

(١) اذا كانت $r_i^* > 0$ فان الشرط المقابل سوف يكون متساويه ويظل كذلك حتى بعد عمليـة الضرب • ولكن أذا كانت $r_i^* = 0$ فان الشرط المقابل سوف يتحول الى المتســاويـة البديهية ($0 = 0$) بعد عملية الضرب • وعلى هذا فان المعادلة (٥ـ٤٤) تكـون عباره عن مجموع متساويات •

(٥ـ٤٤) هو نفسه الطرف الايسر للمعادله (٥ـ٤٥) وبالتعويض من المعادله(٥ـ٣٧) فى المعادلة (٥ـ٤٤) وبالتعويض ايضا من المعادله (٥ـ٣١) فى المعادلـــة (٥ـ٤٥) نحصل على :

$$R = \sum_{j=1}^{n} p_j q_j^* = \sum_{i=1}^{m} x_i^0 r_i^* = C \qquad (٥ـ٤٦)$$

ومن هذا نجد ان : القيم المثلى للدوال المطلوبه لنظامى البرمجه يكونا متساويين وتعطى القيمه المثلى للمتغير الثنائى r_i^* المعدل الذى سوف يجعل القيمه المثــلى للمعادله (٥ـ٣١) تتزايد مع كل وحده زيادة فى x_i^0 مع المحافظه على المعطيات من الدواخل ثابته غير متغيرة • وتفسيرها هو نفس تفسير المضروب فى تحاليل كون ـ تــكر (انظر تمرين ٥ـ٨) وتفسير المتغيرات الثنائية على انها أسعار دواخل منســـــوبه imputed input prices للنظام المناقش هنا ، وقد تفسر هذه الاسعار فى نظم اخرى على انها اسعار السوق التنافسيه competitive market prices ويعطى الجانـــــب الايسر من الشرط فى المعادلة (٥ـ٣٨) تكلفة الانتاج للوحدة الواحدة من المنتج j بدلالة الاسعار المنسوبه imputed prices وتنص الشروط الثنائية على ان تكلفة الوحـــده تساوى او تفوق السعر (وحدة الايرادات) لكل ناتج • ويتبع من المعادلة (٥ ـ٤٣) ان تكلفة الوحدة تساوى سعر الناتج الذى تم انتاجه وسوف تؤدى اسعار الدواخـــل المنسوبه ألى الكفاءة efficiency بحيث انه لا يمكن لصاحب الوحدة الانتاجية من زيادة ربحه بتغييره لمستويات الانتاج •

وتعطى الدالة المطلوبه الثنائية مخزون stocks صاحب الوحدة من الدواخل بسعر الداخل المنسوب • ونجد من المعادلة (٥ـ٤٠) ان القيمة المثلى لمخزون صاحـــب الوحدة من الدواخل يساوى ايراداته المثلى • فاذا دفع لاصحاب الدواخل المخزنـــه الاسعار المنسوبه ، فان اجمالى التكلفه سوف ينفذ وسوف يصبح اجمالى الربح صفرا •

اما اذا حقق الناتج الامثل شرط الداخل i على اساس انه لا متساويه فقط (بمعنى انه لا توجد اشارة = مع اللامتساويه) ، فان صاحب الوحدة الانتاجيه سوف يتبقى لديه كميه من الداخل i غير مستخدمة وسوف تنص المعادلة (٥ـ٤٦)على ان الســـــعر المنسوب سوف يكون صفرا •

وسوف يكون فقط الداخل النادر (بمعنى الداخل المستغاد منه تماما) اســـعار موجبه •

مثال : ثنائى النظام dual system للحاله المعطاه فى الشكل (٥ـ٤ أ) هو كالتالى : للحصول على الحد الادنى من :

$$C = 18r_1 + 8r_2 + 14r_3$$

تحت الشروط :

$$r_1 + r_2 + 2r_3 \geqq 1$$
$$3r_1 + r_2 + r_3 \geqq 2$$
$$r_1, r_2, r_3 \geqq 0$$

فيكون الحل الامثل للنظام البدائى initial system هو : $q_1^* = 3$ ، $q_2^* = 5$ ، $y^* = 13$. وسوف تتحقق المساواة للشرطين الأول والثانى من شروط الدواخل فى النظام البدائى ، وسوف تتحقق اللامتساويه فقط < او > بدون = للشرط الثالث وسوف يتبع الحل الامثل للنظام الثنائى dual system من المعادلتين (٥ـ٤٠) و (٥ـ٤١) فمن المعادله (٥ـ٤٠) نجد ان $r_3^* = 0$ ومن المعادله (دـ٤١) نجد ان :

$$r_1^* + r_2^* = 1$$
$$3r_1^* + r_2^* = 2$$

ومن هاتين المعادلتين نجد ان $r_1^* = 0.5$ وان $r_2^* = 0.5.$ وبتقييم الدالـه الثنائيه المطلوبه يتحقق لنا ان $C^* = 13$ كما نصت عليه المعادله (٥ـ٤٦) ٠

ملخص ما سبق : SUMMARY

لقد قمنا بالتوسع فى النظريه الاساسيه للوحده الانتاجيه (او المؤسسه) firm وتحصلنا على بعض خواص دوال التكلفه والانتاج وتوصلنا كذلك الى بعض النتائج المفيدة اذا كانت دالة الانتاج متجانسه من الدرجة الأولى اى ان اى تغيير نسبى فى مستويات الدواخل سوف ينتج عنه تغير نسبى فى مستوى الناتج بدون تغيير فى الانتاج الحدى للدواخل وسوف يكون مجموع مرونات الناتج بالنسبه للداخل مساويا للوحده ٠ ولقد استفدنا من نظرية اويلر لتوضيح ان مجمل الناتج سوف ينفذ اذا دفع لكل داخل ماقيمة الانتاج المادى الحدى ٠ ولكن افتراضات الحصول على الحد الاعلى من الربح فى حالة المنافسه تفشل اذا كانت دالة الانتاج للمدى الطويل متجانسه من الدرجه الاولى ٠

وعرفنا دالة الانتاج CES بانها دالة متجانسة من الدرجة الاولى وان لها مرونـة تعويض ثابته فى كل مكان ٠ وسوف تاخذ اشكال منحنيات دوال CES اشكالا مختلفـه من خطوط مستقيمة الى خطوط بزوايا قائمة كلما كانت مرونه التعويض تتارجح بين القيمتيـن للنهاية : $+\infty$ وصفر ٠

وتمتلك دالة الانتاج الخاصة بكب ــ دوجلاس مرونه تعويض ثابته وبمقدار يســـاوى واحدا وهى عضو فى مجموعة دوال CES وتنص شروط الدرجه الاولى لدالة CES على ان نســبة الداخل المستخدم تعامل كدالة خطيه بالنسبه للوغاريتمات لنسبة سعر الداخل.

ولقد وجدنا ان تحاليل كون ــ تكر مفيده لمسائل فى مجالات مختلفه لنظريـــات الوحدة الانتاجيه • ولقد اعتبرنا مسالتين هامتين تضمان عدم اتصـــال رئيســى major discontinuities وسمحت لنا الازدواجيه بين دوال الانتاج والتكلفه باشتقاق دوال الانتاج من دوال التكلفه وبالعكس • وتنص بديهية شيفارد على ان اشتقاق دالــة التكلفه بالنسبه لسعر الداخل تساوى مستوى استخدام الداخل المستخدم للحصول على التكلفه الادنى •

لقد ادخلنا عدم التاكد Uncertainty فى نظريات الوحده الانتاجيه بافتــراض ان المنفعة صاحب المؤسسة (او الوحده الانتاجيه) تكون بدلالة الربح الذى يتحصل عليه من عطيه الانتاج • فاذا كان صاحب الوحده متفاديا للمخاطره فانه تحت الظـــروف العاديه ، سوف يختار الناتج بحيث ان السعر المتوقع سوف يفوق التكلفه الحديــه MC المتوقعه وسوف ينتج صاحب الوحده الانتاجيه المحايد بالنسبه للمخاطره اكثر يســاوى بين الاثنين ، وسوف ينتج محب المخاطره اكثر واكثر لمساواة الاثنين •

وتتميز الحركة الانتاجيه الخطيه بالمستويات الثابته للداخل والناتج وتتكـون دوال الانتاج الخطيه من عدد من الحركات الانتاجية الخطيه والتى قد تستخدم فى ان واحد•

وسوف يكون التعويض بين الدواخل محتملا اذا توفرت اثنين او اكثر من الحركــات الخطيه لمنتج ما وتغطى البرمجه الخطيه عملية الحصول على الحد الاعلى لداله خطيــة مكونه من n متغير غير سالب تحت m من الشروط الخطيه بشكل لامتساويات ، وســوف تكون النقاط الغير سالبه فى الغضاء المكون من n من الابعاد n-dimensional space والتى تحقق شروط نظام البرمجه الخطيه ، مجموعة نقاط التحقق feasible point set وتكون هذه المجموعة مغلقه ومحدبه ومحدده من الأسفل • فاذا وجدت قيمة مثــلى محدده للداله المطلوبه ، فان هذه القيمة سوف تقع عند واحده او اكثر من نقط الاطراف extreme points لمجموعة نقط التحقق • وسوف يكون لاى نظام برمجه خطى محتوى على n متغير و m شرط نظام ثنائى dual system محتوى على m متغير و n شـــرط. وسوف تعطى متغيرات احد النظامين ، القيم الحديه marginal values لشروط النظام الاخر ، وسوف تكون القيم المثلى لكلا الدالتين فى النظامين متساويه •

EXERCISES

5-1 Each of the following production functions is homogeneous of degree one. In each case, derive the marginal products for X_1 and X_2 and demonstrate that they are homogeneous of degree zero:

$$(a)\quad q = (ax_1x_2 - bx_1^2 - cx_2^2)/(\alpha x_1 + \beta x_2)$$

$$(b)\quad q = Ax_1^{\alpha}x_2^{1-\alpha} + bx_1 + cx_2$$

5-2 An entrepreneur uses two distinct production processes to produce two distinct goods, Q_1 and Q_2. The production function for each good is CES, and the entrepreneur obeys the equilibrium condition for each. Assume that Q_1 has a higher elasticity of substitution and a lower value for the parameter a than Q_2 [see (5-12)]. Determine the input price ratio at which the input use ratio would be the same for both goods. Which good would have the higher input use ratio if the input price ratio were lower? Which would have the higher use ratio if the price ratio were higher?

5-3 An entrepreneur has the production function $q = Ax_1^{\alpha}x_2^{1-\alpha}$. She buys inputs and sells the output at fixed prices, but is subject to a quota which allows her to purchase no more than x_1^0 units of X_1. She would have purchased more in the absence of the quota. Use the Kuhn-Tucker analysis to determine the entrepreneur's conditions for profit maximization. What is the optimal relation between the value of the marginal product of each input and its price? What is the optimal relation between the RTS and the input price ratio?

5-4 Use Shephard's lemma to find the production function that corresponds to the cost function $C = (r_1 + 2\sqrt{r_1r_2} + r_2)q$, and demonstrate that it is CES.

5-5 A farmer, who sells at a fixed price of 5 dollars per unit and has the cost function $C = 3.5 + 0.5q^2$, plants to maximize profit under certainty. After planting she discovers that she can have a fertilizer applied that will increase her yield 40 percent with a probability of 0.25, 60 percent with a probability of 0.5, and 88 percent with a probability of 0.25. Her utility function is $U = \sqrt{\pi}$. Determine the maximum amount that she is willing to pay for the fertilizer application. Contrast this amount with the expected value of the increase in her profit as a result of fertilizer application.

5-6 A linear production function contains four activities for the production of one output using two inputs. The input requirements per unit output are

$$a_{11} = 1 \qquad a_{12} = 2 \qquad a_{13} = 3 \qquad a_{14} = 5$$

$$a_{21} = 6 \qquad a_{22} = 5 \qquad a_{23} = 3 \qquad a_{24} = 2$$

Are any of the activities inefficient in the sense that there is no input price ratio at which they would be used?

5-7 Each of n linear activities yields s outputs and uses m inputs as described by (5-30). An entrepreneur possesses fixed quantities of each of the inputs. She desires to maximize her total revenue from the sale of the outputs at constant market prices. Formulate her optimization problem as a linear-programming system, and derive its dual programming system.

5-8 Consider the basic linear-programming problem given in (5-31) to (5-33). Use the Kuhn-Tucker conditions to establish that the dual system constraints (5-39) and the equilibrium conditions (5-40) to (5-43) are satisfied.

SELECTED REFERENCES

Arrow, K., H. B. Chenery, B. Minhas, and R. M. Solow: "Capital-Labor Substitution and Economic Efficiency," *Review of Economics and Statistics*, vol. 43 (August, 1961), pp. 228–232. The original statement of the properties of the CES production function.

Baumol, W. J.: *Economic Theory and Operations Analysis* (4th ed., Englewood Cliffs, N.J.: Prentice-Hall, 1977). Chaps. 8 and 12 cover Kuhn-Tucker analysis and linear programming respectively. The mathematics is fairly elementary.

Dorfman, R., P. A. Samuelson, and R. Solow: *Linear Programming and Economic Analysis* (New York: McGraw-Hill, 1958). An elementary presentation of linear programming and the input-output model.

Gale, David: *The Theory of Linear Economic Models* (New York: McGraw-Hill, 1960). An original approach to linear programming, games, and input-output. The necessary advanced mathematics is summarized in chap. 2.

Hadley, G.: *Linear Programming* (Reading, Mass.: Addison-Wesley, 1962). A text with economic applications. Matrix algebra and point-set theory are used.

Jorgenson, D. W., and L. J. Lau: "The Duality of Technology and Economic Behavior," *Review of Economic Studies*, vol. 41 (April, 1974), pp. 181–200. An advanced discussion of duality for the firm.

McCall, J. J.: "Probabilistic Microeconomics," *Bell Journal of Economics and Management Science*, vol. 2 (Autumn, 1971), pp. 403–433. A summary of analysis of the firm under uncertainty. Some knowledge of continuous probability theory is required.

McFadden, Daniel: "Constant Elasticity of Substitution Production Functions," *Review of Economic Studies*, vol. 30 (June, 1963), pp. 73–83. Fairly advanced mathematics is employed.

Shephard, R. W.: *Theory of Cost and Production Functions* (Princeton, N.J.: Princeton University Press, 1970). Fundamental discussions of duality in production. Advanced mathematics is used.

Varian, H. R.: *Microeconomic Analysis* (New York: W. W. Norton, 1978). Chap. 1 contains an advanced modern mathematical statement of the theory of the firm.

الفصل السادس

توازن السوق
MARKET EQUILIBRIUM

لقد تم تحليل سلوك المستهلك وصاحب الوحده الانتاجيه بافتراض انهما غير قادرين على التأثير على اسعار الاشياء التى يبيعونها والتى يشترونها فهذا المستهلك المعزول تماما يواجه باسعار معطاه له لايستطيع تغييرها ثم يقوم بشراء المجموعه من السلع التى تعطى له الحد الاعلى من المنفعه • اما صاحب الوحده الانتاجيه فانه سوف يواجه منتجا معطى له وكذلك يواجه اسعار للداخل لايستطيع تغييرها ثم يقوم بعد ذلك بأنتاج مستوا معينا يعطيه الحد الاعلى من الربح • وعلى هذا فان كل واحد منهما يجب عليه ان يحل مسألته اما لايجاد الحد الاعلى من المنفعه او الحد الاعلى من الربح •

وتعين حركات المستهلك وصاحب الوحده الانتاجيه معا الاسعار التى كانت تعتبر غير قابله للتغير عندما اعتبرنا كل واحد منهما على حدة • لان الاسعار تتعيين فى السوق حيث يتلاقى المستهلك وصاحب الوحدة الانتاجيه ثم تتم بينهما عملية تبادل السلع فيصبح المستهلك هو المشترى وصاحب الوحدة الانتاجيه هو البائع فى سوق السلع النهائيه final good اى السلع التى لاتحتاج الى اى عمليه انتاجيه اخرى لاستكمال استهلاكها • وينعكس دورهما فى السوق الذى يباع فيه المواد الاوليه مثل العمالة labor فبعض هذه المواد الاوليه قد تكون منتجات وحدات اخرى فمثلا الحبوب تمثل مواد اوليه لمطاحن الحبوب ولكنها ناتج من المنتجات الزراعيه • وبهذا يصبح كلا منهما صاحب وحده انتاجيه فى سوق مثل سوق السلع الوسيطه intermediate goods وهى التى لم تستكمل شكلها النهائى فيمكن استخدامها كمواد اوليه •

وتبحث تحاليل توازن السوق فى تقرير اسعار السوق والكميات المباعة والمشتراه • ففى هذا الباب سوف نركز على السلوك فى الاسواق الانفرادية ولقد قمنا بتلخيص الافتراضات الأساسيه وخواص السوق التنافسيه الكامله فى الجزء (٦ ـ ١) ثم اشتقينا دوال الطلب فى الجزء (٦ ـ ٢) وفى الجزء (٦ ـ ٣) تحصلنا على دوال العرض للسوق على المدى القصير

والمدى الطويل ، بالاضافه الى مناقشة الوفورات الخارجيه external economies وزيادة نفقات الانتاج الخارجيه external dis economies ولقد أستخدمت دوال العــــرض والطلب لتقرير توازنات سوق السلع commodity-market equilibria فى الجزء (٦ــ٤) ثم طبقنا هذه التحاليل على مسألة الضرائب فى الجزء (٦ــ٥) • ثم وسعنا تحليل تـوازن السوق ليغطى اسواق العناصر factor markets فى الجزء (٦ــ٦) ثم نوقش وجود existence وانفرادية uniqueness توازن السوق فى الجزء (٦ــ٧) وناقشنا الاستقرار stability فى الجزء (٦ــ٨) موضوع الجزء (٦ــ٩) هو خواص التوازن فى اســـواق يتخلف فيها ردود الفعل بالنسبه للعرض lagged supply reactions ثم نوقش ســـــوق المستقبل على اساس بسيط فى الجزء (٦ــ١٠) •

٦ - ١ افتراضات المنافسة المتكاملة :

THE ASSUMPTIONS OF PERFECT COMPETITION

ان اى سوق للسلع يجب ان يحقق الشروط التاليه اذا كان سوقا تنافسيا متكاملا :

(١) تنتج الوحدات الانتاجيه سلعه متجانسة ويكون المستهلكون متساوون من وجهة نظــر البائع بحيث ان لا يحظى احدا منهم بميزة او خلافها بالبيع لمستهلك معين •

(٢) الوحدات الانتاجيه والمستهلكون عديدون وتكون المبيعات والمشتروات قليله بالنسبه لحجم الصفقات •

(٣) يمتلك كلا من الوحدات الانتاجيه والمستهلكون معلومات متكامله عن الاسعار الراهنه والمناقصات الجارية ، current bids ويغتنموا اى فرصة سانحه لزيادة الاربـــــاح والمنفعة كل حسب حاجته •

(٤) يكون الدخول entry والخروج exit الى ومن السوق مفتوح للوحدات الانتاجيــــه والمستهلكون فى المدى الطويل •

ويضمن الشرط (١) اخفاء هوية anonymity الوحدات والمستهلك • اما بالنســـبه للوحدات الانتاجيه ، فان هذا يعنى ان منتجات الوحده غير ملحوظة عن منتجـــــات الوحدات الاخرى مثل : الماركه ، نوعية الاختراع ، النوعية الخاصة ، والمظهر الخارجى الخ ، وان هذه لاتكون موجودة بحيث أن لا يكون للمستهلك سبب فى تفضيل انتاج وحدة على وحدة اخرى ، وسوف يضمن توحيد المستهلكين بيع السلعه لمن يقدم اعلى عرض وسوف لا يسمح للعادات والتقاليد المتبعة (مثل قاعدة اول واحد اتى يكون اول واحد تقدم لـه الخدمه) بالعمل فى توزيع المنتجات بين المستهلكون •

وضمن شرط (٢) ان كثيرا من الباعة سوف يواجهون كثيرا من المشترين • فاذا كانـــت

الوحدات الانتاجيه كثيره ، فان قرار صاحب واحد من هذه الوحدات بزيادة أو تخفيض أنتاجه سوف لا يترك اثرا ملحوظا على السوق بحيث تتأثر الاسعار وكذلك الحال بالنسبه للمستهلك بحيث أن زيادة أو نقصان طلبه سوف لا يوثر على السعر فى السوق وبهذ يتصرف البائع والمشترى كما لو لم يكن له أى تأثير على السعر وعليه أن يتكيف مع حالات السوق • وعليه فأن المشترى سوف يكون "متقبلا للسعر "price takers" بحيث انه يعدل فى الكميات التى يشتريها حتى يجعلها الكميات المثلى بالنسبه له وحسب الأسعار التى تقبلها فى السوق بدون اى اعتبار على ان هذه المشتروات سوف توثر على الاسعار • أما البائع فانه يلاحظ السعر فى السوق ويعدل فى الكميات المباعه بحيث ان هذه الكميات تكون هى الكميات المثلى له ولا يكون لها اى تأثير على الاسعار •

وضمن الشرط (٣) المعلومات الكامله للطرفين فى السوق • فالبائع والمشترى يتحصلان على معلومات كامله عن وجودة وطبيعة النتائج وكذلك عن السعر الراهن •

وبما أنه لا يوجد مشترون غير موحدين ، فان البائع لا يستطيع أن يبيع بسعر غير السعر الموجود فى السوق وسوف لا يستطيع المستهلكون شراء السلع من بائعين وباقل سعرا بنفس الاسباب السابقة • وبما أن السلعه المنتجه متجانسة وان كلا الطرفين فى السوق يحصلان على معلومات كامله ، فانه يجب أن يعم سعر واحد فى السوق التنافسيه الكامله • ويمكن أثبات هذا بافتراض حدوث العكس بحيث ان السلعه تباع بسعرين مختلفين • ولكن بالافتراض ، فأن المستهلك يعى الحقائق التاليه :

(١) انه يمكن شراء السلعه بسعرين مختلفين •

(٢) وان الواحده من هذه السلعه هى نفسها فى السلعه الاخرى • وبما ان المستهلك يحرص دائما على الحصول على أعلى منفعه من اى سلعه يشتريها فانه سوف لا يشترى السلعه ذات السعر العالى وبذلك سوف يسود السوق سعر واحد وهو السعر الذى يشترى به المستهلك وهو السعر الاقل •

وسوف يضمن الشرط الاخير عدم انسياب عناصر الانتاج بين الوظائف البديلة على المدى الطويل • ويفترض هذا الشرط أن عناصر الانتاج مرنه وقابله للتنقل بين الوظائف المختلفه بحيث انها تحقق اكبر منفعه ممكنه •

فالوحدات الانتاجيه تبقى فى الاماكن التى تحقق فيها ارباحا وتترك الاماكن التى لا تحقق فيها ارباحا • ويميل عنصر العمالة الى التواجد فى الاماكن الصناعية التى يكون الطلب على منتجاتها فى ازدياد وبهذا نتخلص من الوحدات الانتاجيه القليله الكفائه وأبدالها بوحدات أكثر كفائه •

وسوف تعم وتنتشر المنافسه الكامله بين البائعين اذا كان للبائع نفسه تأثير طفيف على السعر فى السوق وعلى حركات الاخرين ، ولكن كل بائع يجب أن يتصرف كما لو لم يكن له اى تأثير ويجب ان تسود شروط مشابهة بين المشترين ، وتكون السوق تنافسيه كامله اذا كانت المنافسه الكامله منتشره (او سائدة) بين طرفى السوق من مشترين وبائعين وسعر السوق الذى اعتبر فى الماضى كمتغير بقيمة ثابته يعتبر الان متغيرا فقط ومقداره سوف يتقرر بما يتخذه البائع او المشترى معا من قرارات .

٦ - ٢ دوال الطلب : DEMAND FUNCTIONS

نتحصل على دالة الطلب لسوق بالنسبه لسلعه ما بجمع دوال الطلب للمستهلكين على حده . وحيث أن المنتج الواحد بسبب صغر حجمه بالنسبه للسوق لا يستطيع أن يواجه دالة الطلب للسوق ككل . وبهذا فان دالة طلبه سوف تعكس افتراضه بانه يستطيع بيع كل مايرغب فى بيعه بسعر السوق .

الطلب فى السوق : Market Demand

وبأتباع الاشتقاقات فى الجزء (٢-٣) ثم التعميم فى الجزء (٢-٦) نجد ان طلب المستهلك i للسلعه Q_j يعتمد على سعر Q_j واسعار السلع الاخرى وكذلك يعتمد على دخل المستهلك .

$$D_{ij} = D_{ij}(p_1, p_2, \ldots, p_m, y_i)$$

ونتحصل على دوال الطلب للمستهلك من شروط الدرجه الأولى للحصول على الحد الاعلى من المنفعه بافتراض أن شروط الدرجه الثانيه قد تحققت وسوف يكون رد فعله للتغيرات فى الاسعار والدخل يتغير طلباته للسلع بحيث انه يحافظ على المساواه بين RCS ونسبه السعر لكل زوج من السلع ، وفى نفس الوقت يحقق شروط ميزانيته .

وقد يتغير طلب المستهلك للسلعه Q_j كنتيجة للتغير فى p_k $(k \neq j)$, وبالرغم من ان p_j تظل بدون تغير او نتيجه لرد الفعل للتغيرات فى دخله مع المحافظة على جميع الاسعار ثابته بدون تغيير ويفترض ان تكون جميع الاسعار ودخل المستهلك ثابته من اجل عزل السلوك فى السوق j وسوف يكون طلب المستهلك للسلعه Q_j بدلالة p_j فقط .

$$D_{ij} = D_{ij}(p_j) \qquad (٦-١)$$

ولا تزال الكميه المطلوبه معتمده على أسعار السلع الاخرى وعلى دخل المستهلك ولكن هذه المتغيرات نعاملها على اساس أنها ذات قيمة ثابته . ولكى يحقق شروط الدرجه

الأولى ، فان المستهلك سوف يغير طلباته للسلع غير Q_i كلما تغيرت p_j وهذه التغيرات تهمل عادة فى التحاليل المركزه على سوق السلعه Q_i، فاذا الغينا تصنيف السلعه (والذى رمزنا له بالحرف j) فى المعادله (٦ــ١) نحصل على :

$$D_i = D_i(p) \qquad i = 1, 2, \ldots, n$$

وعلى هذا يكون الطلب الاجمالى للسلعه Q عند اى سعر ، هو مجموع الكميات المطلوبه من المستهلكين وعددهم n بالسعر السائد فى السوق .

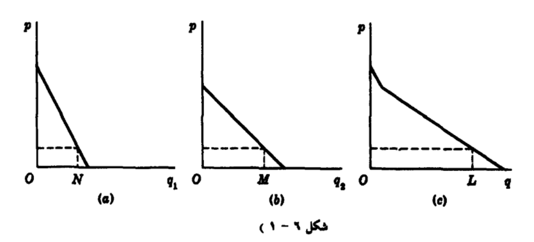
$$D = \sum_{i=1}^{n} D_i(p) = D(p) \qquad (٦ـ٢)$$

حيث ان D هى الطلب الاجمالى والنمط الموجود فى المعادله (٦ــ٢) مبنى على الافتراض بان جميع الاسعار الاخرى والدخول لجميع الـ n من المستهلكين تكون ثابته وفى العادة نفترض ان طلبات المستهلكين الفرديه تكون دوال متناقصه بأضطراد بدلالة السعر ولكن أحتمال وجود دالة السعر ، ولكن احتمال وجود دالة متزايده بدلالة السعر موجود فى حالة سلعة جيفون Giffen good (راجع الجزء ٢ــ٥) ومن الواضح أنه آذا كانت دوال طلب الفرد متناقصه باضطراد ، فان دالة الطلب الاجماليه تكون ايضا متناقصية باضطراد فاذا كان هناك بعض دوال طلب فرديه متناقصه والبعض الاخر متزايده فان التأثير الصافى على دالة الطلب الاجمالى تكون عامه غامضه ونتحصل على منحنى الطلب الاجمالى لسلعه ما عن طريق رسم المعادلة (٦ــ٢) وقد يتغير شكل ومكان المنحنى كلما تغيرت عناصر المعادله (٦ــ٢) اى أنه كلما تغيرت اسعار السلع الاخرى وكذلك كلما تغير دخل المستهلك وفى الحقيقه فأن المنحنى قد ينتقل من مكانه الى مكان اخر حسب التغيرات التى تحدث فى توزيع الدخل بدون اى تغيير فى الدخل الاجمالى ــ فاذا انقص من دخل احد المستهلكين وزيد فى اخر بنفس نسبة النقص ، فان منحنيات الطلب الفرديه المقابله لهذا سوف تنتقل (أو تتزحزح) من مكانها على القالب وسوف يتأثر منحنى الطلب الاجمالى أذا عوض الانتقال بعضه البعض .

وحسب العرف التقليدى العام للأشكال والرسومات فأن منحنى الطلب الاجمالى يكون المجموع الافقى لمنحنيات الطلب الفرديه . وتمثل أجزاء (a) واجزاء (b) من الشكل (٦ــ١) منحنيات الطلب لمستهلكين فقط فى السوق التنافسيه المفترضه[١] ويمثل الجزء (c) منحنى الطلب الاجمالى لهم جميعا والذى رسم بجعل المسافه OL تساوى مجموع المسافتين ON و OM .

---

(١) لا يمثل مستهلكين العدد الكبير الضرورى فى حالة المنافسه الكامله ولكنهما أستخدما لشرح سلوك عدد كبير منهم .



شكل (٦ - ١)

طلبات صاحب الإنتاج (المنتج) Producer Demand

سوف يواجه دالة طلب السوق أو دالة الطلب الاجمالي جميع البائعين ويعتبر صاحب الانتاج أنه غير قادر بمفرده أن يأثر على السعر الموجود في السوق وسوف ينتج عن تغييره في أنتاجه حركة طفيفه عبر منحنى طلب السوق ، ويعتقد هو انه يستطيع أن يبيع اى كميه وانه ايضا قادر على الانتاج بالسعر الموجود في السوق وسوف يظهر منحنى الطلب للانتاج الذى قام به صاحب الوحده الانتاجيه على أنه خط مستقيم معطى بالمعادله التاليه :

$$p = \text{ثابته}$$

ولكن منحنى طلب السوق ليس هو المجموع الافقى لمنحنيات الطلب التى تواجهها الوحدات الانتاجيه المنفرده .

ويكون أجمالى ايرادات الوحده الانتاجيه هى :

$$R = pq$$

وتعرف الايرادات الحديه Marginal revenue بأنها المعدل التى يزداد عنده مجموع الايرادات كنتيجه للتغير البسيط فى المبيعات وباللغه الرياضيه :

$$\frac{dR}{dq} = p$$

حيث أن p ثابته وسوف يكون منحنى الايرادات الحديه والذى تواجهه الوحده الانتاجيه المنفرده مطابقا لمنحنى الطلب لهذه الوحده .

٦ - ٣ دوال العرض : SUPPLY FUNCTIONS

يمكن تعريف دوال العرض للوحدات الانتاجيه المنفرده للحالات التاليه :

(١) فترة زمنيه قصيرة جدا لايمكن خلالها تغيير مستوى الانتاج .

(٢) فترة على المدى القصير والتى يمكن خلالها تغيير مستوى الانتاج ولكن لايمكن تغيير

حجم الوحدة الانتاجيه ٠

(٣) والفترة طويلة المدى التى يكون خلالها جميع الدواخل متغيرات ٠

الحالة الأولى : الفترة القصيرة جدا : The Very Short Period

افترض ان صاحب الوحدة الانتاجيه يقرر كل صباح كمية الانتاج التى سوف ينتجها ذلك اليوم ثم يقوم بتطبيق هذا القرار فى الحال ويقضى بقية النهار فى محاولة بيع ما أنتج للمستهلك الذى يدفع السعر الاعلى ٠ وليس بأستطاعته زيادة أنتاجه خلال اليوم ويبيع مقدار معين من السلعه فى نفس الوقت[1] وبما انه قد تم انتاج q^0 فأن التكلفه الحديه لاى أنتاج أقل من q^0 سوف تكون صفرا ٠ ولا يمكن زيادة الناتج بأكثر تكلفه غير محدوده ٠ ويمثل الخط العمودى عند هذه النقطه منحنى التكلفه الحديه ٠

وتحصل الوحده الانتاجيه على الحد الاعلى من الربح ببيع كمية بحيث ان $MC = p$ وبما ان MC لاى ناتج اقل من q^0 يساوى صفرا ، وأن MC لاى ناتج أكبر من q^0 يكون غير محدودا فان المعادله $MC = p$ لا يمكن أن تتحقق وأن الوحده الانتاجيه سوف توسع مبيعاتها للنقطه التى يتوقف عنها السرعه من تفوقه على MC وعلى هذا فأن الوحده سوف تبيع أنتاجها (أى مجموع المخزون لديها من السلع) بالسعر الموجود فى السوق[2] وهذا سوف يجعل الوحده تتحصل على الحد الاعلى من الربح لان السعر الموجود فى السوق هو اعلى الاسعار التى يمكن بيع المنتجات عندهسوف لا تتأثر الكميه المباعه لتغيرات الاسعار وتنص دالة العرض الاجمالى عموما على أن الكميه المعروضه من المنتجين تكون دائما بدلالة السعر ٠ وبما ان ناتج كل وحده من وحدات الانتاج تكون محددا (ثابتا) فان العرض الاجمالى للسلعه يكون ايضا معطى ولا يعتمد على السعر ، وعليه فان منحنى العرض يكون خطا عموديا ، وتكون مسافته من محدد السعر تساوى مجموع أنتاج الوحدات الانتاجيه على انفراد ٠

---

(١) لقد قمنا بتبسيط الشرح الحالى بافتراض أن الإنتاج وجميع التعديلات الاخرى تحدث حالا٠ وقد يكون أقرب للواقع أن نفترض أن الأنتاج على فترات متواصله ثابته ٠ فأذا كانت العمليه الانتاجيه عمليه مستهلكه للوقت فان أى تغيير فى مستوى الانتاج لا يمكن تحقيقه فى الحال ٠ وعلى هذا فان الفترة الزمنيه القصيرة جدا تكون الوقت الزمنى الاقل من الفترة الزمنيه التى مضت بين التغير فى مستوى الدواخل والتغير المقابل فى مستوى الانتاج ٠

(٢) ربما أن التحاليل الراهنه ساكنه (غير ديناميكيه) static فانه ليس من المحتمل أن تبقى السلعه لبيعها فى وقت متأخر (لاحق) ٠

الحالة الثانية : المدى القصير : The Short Run

تنص دالة العرض لوحدة انتاجيه تنافسيه كاملة على ان الكميه التى سوف تنتج بدلالة سعر السوق يمكن اشتقاقها من شرط الدرجه الأولى لعملية الحصول على الحد الاعلى من الربح وان الاحداثيات المستقيمة لاى نقطه على الجزء الآخذ فى الارتفاع من منحنى MC والمقابله لاى سعر معطى تقيس الكميه التى سوف تقدمها الوحده الانتاجيه للعرض بذلك السعر وسوف يكون منحنى العرض للمدى القصير للوحده الانتاجيه مطابقا لذلك الجزء من منحناه التابع للتكلفه الحديه MC على المدى القصير والتى تقع أعلى منحنى AVC الخاص بها ولا تعرف دالة عرضها لمنتجات أقل من الاحداثيات السينيه لتقاطع منحنى MC وAVC وسوف تكون الكميات المعروضه مساويه لصفر عند جميع الاسعار التى تكون أقل من الاحداثيات الصادية لهذه النقطة (نقطة تقاطع MC مع AVC) ويتكون منحنى العرض للوحده الانتاجيه من القطعتين OA و BC فى الشكل (٦ــ٢) ان التكلفه الحديه MC على المدى القصير للوحده الانتاجيه i تكون بدلالة انتاجها :

$$MC_i = \Phi_i'(q_i) \qquad (٦\text{ــ}٣)$$

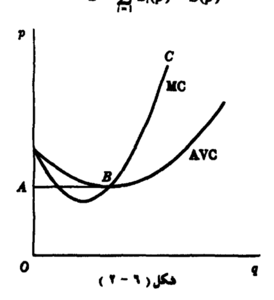
ونحصل على دالة العرض للوحده الانتاجيه i من شرط الدرجه الاولى لها لعمليه الحصول على الحد الاعلى من الربح بوضع $p = MC$ ، ثم حل المعادله (٦ــ٣) لقيم $q_i = S_i$:

$$S_i = S_i(p) \quad \text{من اجل} \quad p \geqq \min AVC$$

$$S_i = 0 \quad \text{من اجل} \quad p < \min AVC$$

ونحصل على دالة العرض الاجمالى للسلعه Q بجميع الـ n دوال العرض المنفرده فيكون العرض الاجمالى هو :

$$S = \sum_{i=1}^{n} S_i(p) = S(p)$$



شكل (٦ - ٢)

ويكون منحنى العرض الاجمالى هو المجموع الافقى لمنحنيات العرض الفرديه .

ويتطلب شرط الدرجه الثانيه لعمليه الحصول على الحد الاعلى من الربح بان يكون منحنى MC فى تصاعد . وعلى هذا تكون دالة العرض للوحده الانتاجيه متزايده باضطراد بالنسبه للاسعار الواقعه عند او على من ادنى AVC وبما ان المجموع الافقى للدوال المتزايده باضطراد هو نفسه متزايد باضطراد فانه يكون لدالة العرض الاجمالى للمدى القصير ميلا موجبا (١).

<u>مثال :</u> افترض ان منحنى التكلفه الاجمالى يكون :

$$C_i = 0.1q_i^3 - 2q_i^2 + 15q_i + 10$$

فمن هذا نحصل على :

$$MC_i = 0.3q_i^2 - 4q_i + 15$$

وبوضع $MC_i = p$ بالحل لقيم q_i نحصل على :

$$q_i = S_i = \frac{4 + \sqrt{1.2p - 2}}{0.6} \qquad (٦_٤)$$

وتكون دالة العرض الفرديه مهمه بالنسبه لجميع الاسعار التى تكون اكبر من او تساوى ادنى AVC وتكون دالة AVC :

$$AVC_i = 0.1q_i^2 - 2q_i + 15$$

ويمكن تحديد مكان النقطه الادنى لدالة AVC بوضع الاشتقاق بالنسبه للمقدار q_i تساوى صفر ثم نحل لقيم q_i (٢):

$$\frac{d(AVC_i)}{dq_i} = 0.2q_i - 2 = 0 \qquad q_i = 10$$

وبتعويض $q_i = 10$ فى دالة AVC نحصل على القيمه 5 فعندما يكون السعر اقل من خمسة ريالات فان الوحده الانتاجيه سوف انه من الربح جدا بالنسبه لها عدم الانتاج وتكون دالة العرض للوحده هى :

---

(١) وسوف ينطبق منحنى العرض الاجمالى مع محور السعر لاسعار اقل من ادنى AVC لجميع الوحدات . وعلى هذه القطعه يكون العرض غير تناقصيا بالنسبه للسعر اى انه لايمكن الانتاج مع زيادة فى السعر وقد يكون محتملا ان لمنحنيات MC للوحدات المنفرده قطعا بميل سالب فى المدى MC > AVC وسوف يكون هذا المنحنى للوحده المنفرده غير متصل وقد يكون منحنى العرض الاجمالى غير متصل ولكن هذا لا يحدث الا فى الحالات الغير عاديه .

(١) يصف الحل الرياضى للمعادلة ٦_٤ . منحنا بطرفين مقابلين لاشارة (+) والاشارة (_) امام الجزر التربيعى . ويمكن القاء النظر عن الطرق المقابل لاشارة الجزر السالبه لأن ميله سالب ولان شرط الدرجه الثانيه يتطلب ان يكون MC تصاعديا . ويمكن للقارئ اثبات ان شرط الدرجه الثانيه للحد الادنى قد تحقق .

$$S_i = \frac{4+\sqrt{1.2p-2}}{0.6} \quad \text{اذا كانت} \quad p \geqq 5$$
$$S_i = 0 \quad \text{اذا كانت} \quad p < 5$$

وسوف يكون العرض الاجمالى مساويا لـ الف وخمسمائه وحده اذا كان السعر مساويـــا 22.50 ريالا ٠

الحالة الثالثة : المدى الطويل : The Long Run

يتقرر الانتاج الامثل على المدى الطويل بالنسبه لاى وحده انتاجيه من المساواة بين السعر التكلفه الحديه MC للمدى الطويل ٠ ويكون الانتاج صفرا عندما تكون الاسعـــار اقل من AC وتكون دالة العرض للمدى الطويل للوحده الانتاجيه مكونه من ذلك الجزء من دالة MC للمدى الطويل بحيث ان MC تفوق AC عدنه ويشبه اشتقاق دالةالعرض الاجمالى للمدى الطويل للاشتقاق من دالة العرض للمدى القصير ٠ فتكون دالـــة MC للوحده الانتاجيه i هى :

$$MC_i = \Phi_i'(q_i) \qquad i = 1, \ldots, n$$

وبوضع $p = MC_i$ والحل لقيم $q_i = S_i$ نحصل على :

$$S_i = S_i(p) \qquad i = 1, \ldots, n$$

ويمكن الحصول عندئذا علـــى دالة العرض الاجمالى باضافه دوال العرض الفرديـــــه (وعددها n) فى المعادله (٦ــ٥) وفى حالة غياب اى تاثيرات خارجيـــه فان دالة العرض للمـــدى الطويل تكون موجبه الميـــل لنفس اسباب دالة العرض للمدى القصير

الوفورات الخارجية وزيادة فى نفقات الإنتاج الخارجية :

External Economies and Diseconomies

لقد افترض ان التكلفـــه الاجماليه للـــوحده الانتاجيه المنفرده تكون بدلالـــة مستوى الانتاج الذى تنتجه هـــذه الوحده فقط ٠ ولكن على كل حال ، قد تعتمـــد التكلفه الاجمالية ، فى بعض الاحيان ، على مستوى الانتاج لمجموع الوحـــدات (ونسمـــى مجموع وحدات الانتاج الوحـــده الصناعيه) وندرك وجود الوفورات الخارجيـــــه External economies فى اقتصاد ما اذا احدث التوسع فى ناتج الوحده الصناعيـــه انخفاض فى منحنى التكلفه الاجمالـــى لكل وحده من وحدات الصناعه ٠ وندرك كذلـــك وجود الزياده فى نفقات الانتاج الخارجيه External diseconomies فى اقتصاد مـــا اذا حدث التوسع فى ناتج الوحده الصناعيـــه ارتفاع لمنحنى التكلفـــه ، الاجماليه لكل وحده

من وحدات الصناعه[١].

وهذه الوفورات والزياده فى النفقات قد يسببها عوامل عدة . فقد يؤدى التوسع فى الانتاج الى قوة عامله اكثر تمرينا واكثر كفاءة من السابق مما يؤدى بدوره الى انخفاض فى التكلفه للوحدات بدون اى تضاؤل فى انتاجها ، وقد يؤدى انخفاض الانتاج للوحده الصناعيه الى قوة عامله اقل تدريبا من السابق وتتسبب فى ازدياد التكلفه للوحدات وقد تحدث الزياده فى النفقات الخارجيه اذا سبب التوسع فى الانتاج للوحدة الصناعية ارتفاعا فى اسعار المواد الاوليه وهذا بدوره يؤدى الى ارتفاع التكلفه الاجماليه للوحدات.

افترض عموما ان التكلفه للمدى الطويل للوحده i تعتمد على مستوى الانتاج للوحده الصناعيه بالاضافه الى انتاج الوحده i نفسها[٢]

$$C_i = \Phi_i(q_i, q) \qquad i = 1, 2, \ldots, n$$

حيث ان q_i هو انتاج الوحده i بينما $q = \Sigma_{i=1}^{n} q_i$. ان كل صاحب وحده انتاجيه سوف يضيف ، بانتاجه الى انتاج الوحده الصناعية (ولو ان الجزء المضاف صفر) ويحاول الحصول على الحد الاعلى من الربح بالنسبه لانتاجه هو بافتراض ان مستوى انتاجه سوف لا يؤثر على انتاج الوحده الصناعيه من حيث المستوى وتكون دوال الربح كالتالى:

$$\pi_i = R_i - C_i \qquad i = 1, 2, \ldots, n$$

حيث ان $R_i = pq_i$. وبتفاضل π_1 بالنسبه لـ q_1 (بافتراض ثبوت q) وكذلك بتفاضل π_2 بالنسبه لـ q_2، وهكذا ، ثم نضع الاشتقاقات الجزئيه الناتجه تساوى صفرا :

$$\frac{\partial \pi_i}{\partial q_i} = p - \frac{\partial \Phi_i(q_i, q)}{\partial q_i} = 0 \qquad i = 1, 2, \ldots, n \qquad (٦\text{ـ}٦)$$

وتتطلب شروط الدرجه الثانيه ان $\partial^2\Phi_i(q_i, q)/\partial q_i^2 > 0$ لجميع $i = 1, 2, \ldots, n$ وبتعويض $q = \Sigma_{i=1}^{n} q_i$، وبحل مجموعة المعادلات المعطاه (وعددها n) بالمعادله (٦ــ٦) لقيم q_i ثم كتابة $S_i = q_i$، :

$$S_1 = S_1(p)$$
$$S_2 = S_2(p) \qquad (٦\text{ـ}٧)$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$S_n = S_n(p)$$

فكل صاحب وحده انتاجيه يبنى سلوكه على دالة MC الخاصه به . وفى نفس الوقت

---

(١) لايحتاج فى اغلب الوقت ، لجعل نتائج الوفورات والزيادات فى النفقة اكثر غموضا بتخصيصها لاقتصاديات وعدم اقتصاديات لانه من الممكن ان زيادة انتاج الوحده الصناعيه قد يؤدى الى ارتفاع فى منحنيات التكلفه الاجماليه لبعض الوحدات وانخفاضها للبعض الاخر.

(٢) وباختيار نمط اكثر عموميه من السابق ، نجد ان دالة التكلفه تكون بدلالة المستويات المختلفه لكل وحده من الوحدات الانتاجيه بشكل واضح : $C_i = \Phi_i(q_1, q_2, \ldots, q_n)$.

يلاحظ (اويتوقع) ناتج الوحده الصناعيه ثم يختار ناتجه ليساوى بين السعر والتكلفه الحديه MC فاذا كان جميع اصحاب الوحدات يتوقعون نفس ناتج الوحده الصناعية واذا كان انتاج الوحده الصناعيه يتفق مع توقعاتهم ، فانه ليس من الضرورى القيام بعملية التعديل والا فان بعض او جميع منحنيات MC سوف تتزحزح من مكانها التوقعيه وسوف يضطر صاحب كل وحده انتاجيه من تعديل مستويات انتاجه حسب المواقع التوقعيه • وسوف يواصل كل صاحب وحده هذه العمليه التعديليه حتى لا يكون هناك حاجه الى اى عمليه تعديل ضروريه بعد ذلك وتنص دوال العرض فى المعادله (٦ــ٧) على ان كمية العرض المثلى لكل وحده انتاجيه تكون بدلالة السعر بعد اجراء جميع التعديلات • ونحصل على دالة العرض الاجمالى كما فعلنا من قبل وذلك باضافه دوال العرض الفرديه فى المعادله(٦ــ٧) •

$$S = \sum_{i=1}^{n} S_i(p) = S(p)$$

وقد يكون لدالة العرض الاجمالى ميل سالب فى حالة وجود اقتصاديات وفرة وزياده external economies. وتتطلب شروط الدرجه الثانيه ان منحنيات MC الفرديه يجب ان تكون تصاعديه عندما نفترض ان ناتج الوحده الصناعيه يكون متغيرا بقيمه ثابته •

مثال : اعتبر ان الوحده الصناعيه ممثله بوحدتين انتاجيتين متنافستين بحيث ان دالتى التكلفه الاجماليه لهما كالتالى :

$$C_1 = \alpha q_1^2 + (\alpha + \beta)^2 q_1 + \beta q_1 q \qquad C_2 = \alpha q_2^2 + (\alpha + \beta)^2 q_2 + \beta q_2 q$$

حيث ان $q = q_1 + q_2$ ويجب ان يكون العامل α موجبا والا فان التكلفه الحديه سوف تصبح سالبه لقيم عاليه بدرجه كافيه للمتغير q_1 او q_2 اما العامل β فقد يكون سالبا او موجبا • فاذا كان $\beta < 0$ فانه يوجد وفره اقتصاديه external economies ولكن اذا كان $\beta > 0$ فانه يوجد خارجيه external diseconomies فشروط الدرجه الاولى المقابله للمعادله(٦ــ٦) هى :

$$p - 2\alpha q_1 - (\alpha + \beta)^2 - \beta q = 0 \qquad p - 2\alpha q_2 - (\alpha + \beta)^2 - \beta q = 0$$

وبحل المعادلتين السابقتين للقيمتين $q_1 = S_1$ و $q_2 = S_2$, :

$$S_1 = S_2 = \frac{p}{2(\alpha + \beta)} - \frac{(\alpha + \beta)}{2}$$

وعلى هذا ، فان دالة العرض الاجمالى تكون خطيه فى هذه الحاله :

$$S = S_1 + S_2 = \frac{p}{(\alpha + \beta)} - (\alpha + \beta)$$

وبغض النظر عن علامة $(\alpha + \beta)$ فان قاطع منحنى العرض سوف يكون المقدار التالى $p = (\alpha + \beta)^2 > 0$ فاذا وجدت زيادة نفقات خارجيه$(\beta > 0)$فان منحنى العرض سوف

يكون له وان كمية العرض سوف تزداد بكمية اقل سرعة مع السعر عما لو كانت عليه فى غياب مثل هذه الزيادات فى النفقات الخارجيه أما اذا وجدت وفره اقتصاديه ، $(\beta < 0)$ ، فان منحـــنى العرض سوف يكون له ميلا موجبا او سالبا حسبما تكون اشارة المقام $(\alpha + \beta)$ موجبه او سالبه وسوف يكون لمنحنى العرض للمدى الطويل ميلا سالبا فقط اذا كانت التخفيضات فى التكلفه الناتجـــه عن التوسع فى ناتج الوحده الصناعيه بقدر كبير من الضخامه لتعادل الزيادات فى التكلفه الناتجه عن توسع انتاجات الوحدات الانتاجيه ٠

٦ - ٤ توازن سوق السلع : COMMODITY-MARKET EQUILIBRIUM

توازن المدى القصير : Short-Run Equilibrium

ان قوى السوق التى تقرر السعر والكميه المباعه يمكن اعتبارها من خلال دوال الطلب والعرض الاجمالى ٠ ان ميل دالة الطلب $[D'(p)]$ يكون عادة سالبا ، اما ميل دالـــة العرض $[S'(p)]$ فيكون موجبا فى حالة غياب الوفورات الاقتصاديه وسوف نفترض ان $S'(p)$ يكون دائما موجبا الا اذا نصينا على خلاف ذلك٠

تخيل ان البائعين والمشترين وصلوا الى السوق بدون معرفة مسبقه عن ماذا سوف يكون عليه السعر الراهن ٠ وبما ان السلعه تكون متجانسه، فانه يجب ان يسود السوق سعر واحد ، وسوف تساوى الكميه المطلوبه الكميه المعروضه عند سعر التوازن :

$$D(p) - S(p) = 0 \qquad (٦\text{ـ}٨)$$

فاذا لم تتساوى $([D(p)])$ مع $(S(p))$ عند $(p = p_e)$ فان رغبات البائعيـــــــــن والمشترين تكون غير متطابقه : اما ان المشترين يريدون شراء اكثر مما يعرضه البائعون او ان البائعون يعرضون اكثر مما يرغب فيه المشترون وتضمن لنا المساواة فى المعادلـه (٦ــ٨) ان رغبة البائعين والمشترين لابد وان تكون متطابقه ٠

افترض ان الانتاج يكون فوريا وان المنتجين يصلون الى السوق بدون اى ناتج فعلى ثم يحاول المشترون والبائعون فى الدخول فى عقود مع بعضهم البعض فعندما يصل بائع ومشترى الى توقيع العقد بينهما فانه يحق لكليهما ان يتعاقد مع شخص اخر اعطاه عرضا افضل من العرض الاول افترض ان بعض المستهلكين يقوم باعطاء عرض اولى ويقدم السعر p^0 من الريالات للسلعه المعروضه ثم يقوم المعرج auctioneer بتسجيل هذا السعـــر واعلانه فى السوق وعلى هذا الاساس يحاول البائعون والمشترون الدخول فى عقود حسب السعر المعلن p^0 فاذا كان p^0 أقل من سعر التوازن p_e فان المستهلكين الذين يرغبون فى الشراء بهذا السعر سوف يجدون ان الكميه المعروضهغير كافيه لتحقيـــــق رغباتهم٠ فبعض المستهلكين الذين لم يستطيعوا تحقيق رغباتهم سوف يبـــــــدوا استعدادهم لرفع عروضهم على امل اغراء البائعين بالتعاقد معهم وعدم التعاقد مـــع

الاخرين • وحالما يقوم المحرج بتسجيل هذا السعر الاعلى $p^{(1)}$ ويعلنه فى السوق ، فان البائعين سوف ينقضون عقودهم القديمه على السعر القديم ويتزمون بالتعاقد حسب السعر الجديد العالى •• وطما كانت الاسعار عاليه كلما كانت الكميات المطلوبه اقل ، لان المستهلكين الذين هم على الحدود غادروا السوق بقوة السعر العالى الجديد ، واصبح كل مستهلك باقى فى السوق يطلب كميه اقل • ولكن فى نفس الوقت تكون الكميه المعروضه من قبل البائعين اكبر• وتستمد عمليه التعاقد واعادة التعاقد مادام السعر المعلن بالمحرج اقل من سعر التوازن اى انه ما دامت الكميه المطلوبه تفوق الكميه المعروضه • فعندما يصل السوق الى سعر التوازن لايكون عند البائع او المشترى اى رغبه فى اعادة التعاقد وعندما يتوقف اعادة التعاقد ، ويبدء اصحاب الوحدات الانتاجيه فى الانتاج وتوصيله الى اصحابه الذين تعاقدهم وبهذا تتم عملية التبادل • اما اذا حدث وان كان السعر البدائى p^0 كبر من p_e فان بعض المنتجين سوف لايقدران يبيع الكميه المثلى بالنسبه له عند هذا السعر لانهم سوف لا يجدوا مستهلكين للتعاقد معهم ومن اجل تحاشى مثل هذه الامور ، فان البائعين الذين لم يجدوا مشترين بهذا السعر البدائى سوف يضرون الى تخفيض السعر • وعندها يجد المشترين ، الذين تعاقدوا على السعر العالى القديم ، انه من الافضل لهم التعاقد بالسعر الجديد المخفض •وتستمر عمليه اعادة التعاقد حتى يتم الوصول الى سعر التوازن p_e فعندها تتحقق رغبات البائعين والمشترين ولا يستفيد احد من اعادة التعاقد •

ان خليط الكميه والسعر عند التوازن يجب ان يحققا دالتى العرض والطلب لان رغبان المستهلك والبائع قد تحققت عند هذا الخليط من الكميه والسعر • ويمكن الحصول على سعر التوازن بحل شرط التوازن فى المعادله(٦ــ٨) للسعر p ونتحصل على كميه التوازن بتعويض سعر التوازن فى دالة الطلب • وبما ان خليط السعر والكميه فى حالة التوازن تحقق منحنى العرض وكذلك منحنى الطلب ، فالعمليه السابقه تكون مطابقه لعملية ايجاد احداثيات نقطة تقاطع منحنى الطلب مع منحنى العرض•

<u>مثال</u> : افترض ان منحنى الطلب والعرض يكونا على النحو التالى :

$$S = \frac{100}{3}p \qquad D = -50p + 250$$

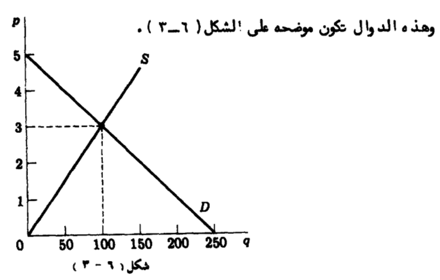
وبوضع $D - S = 0$، نحصل على :

$$-50p + 250 - \frac{100}{3}p = 0$$

وعليه نحصل على :

$$D = S = 100 \qquad p = 3$$

وهذه الدوال تكون موضحه على الشكل (٦ـ٣) .



شكل (٦ - ٣)

التوازن على المدى الطويل : Long-Run Equilibrium

اذا كان حجم الوحده الانتاجيه متغيرا فان توازن الوحدات الانتاجيه الموجوده فى السوق يكون عند نقطه تقاطع منحنى العرض للمدى الطويل مع منحنى الطلب المقابل . وسوف تضم منحنيات العرض والتكلفه للمدى الطويل الربح العادى "normal profit," اى ان الربح الادنى للوحده الضرورى من اجل بقائها فى السوق وهو الربح الذى يحصل عليه صاحب الوحده مقابل خدماته كمدير للوحده، ولعمليه التنظيم ولتحمله المخاطر.. الى .. فاذا حدث وان كان تقاطع منحنى الطلب مع منحنى العرض للمدى الطويل عند نقطة السعر الذى نتحصل عنده لوحدات الانتاجيه على ربح يفوق الربح العادى فان من الممكن دخول وحدات انتاجيه اخرى فافتراض حريه الدخول يضمن للوحدات التى تريد الدخول انها تدخل لتصبح ضمن الوحده الانتاجيه الصناعه بحيث انها تنتج نفس الانتاج المتجانس، ويكون عندها المعلومات التامه مثلما عند الوحدات القديمه السابقه لها . وسوف تضيف الوحدات الجديده انتاجها الى الانتاج الموجود فى السوق(وهذا بالطبع سوف يزيد من الكميه المعروضه فى السوق) ، وكنتيجه لهذا فان منحنى العرض للمدى الطويل سوف يتزحزح (ينتقل) الى اليمين . وسوف يدخل السوق منتجين جدد ماداموا قادرين على تحقيق ارباح موجبه ، ويواصل المنحنى تنقله الى اليمين حتى يحدد تقاطعه مع منحنى الطلب السعر الذى لا يكسب عند الداخلين الجدد اى ربح (الربح = صفر) .

ويمكن ، باستخدام نقاش معاكس للنقاش السابق ، تحليل الحاله التى يتحصل فيها الوحدات الانتاجيه على خسائر بدل الارباح . فبعض الوحدات سوف تنسحب من المجموع وسوف ينخفض مجمل العرض ، وعليه فان منحنى العرض سوف يتزحزح الى اليسار . وسوف

تواصل الوحدات انسحابها حتى يحدد تقاطع منحنى الطلب على منحنى العرض السعر الذى تكون عنده الخسائر صفر للوحده التى تكون تكلفه انتاجها اعلى التكلفات بالنسبه للوحدات الاخرى ٠

الطلب لابد وان يساوى العرض ، وان لابد وان تكون الارباح المحتمله للوحدات الجديده الداخله صفر للتوازن على المدى الطويل وان بالة العرض للوحده i هى $S_i = S_i(p)$ فاذا افترضنا انه يوجد العدد n من الوحدات فى الوحده الانتاجيه الصناعيه وان جميع هذه الوحدات متكافئه من حيث دوال التكلفه فان دالة العرض الاجمالى تكون :

$$S(p) \triangleq nS_i(p) \qquad (٦_٩)$$

وكما كان من قبل ، فان دالة الطلب الاجمالى تكون :

$$D = D(p) \qquad (٦_١٠)$$

وبالاضافه لتساوى الطلب والعرض ، فان التوازن على المدى الطويل يتطلب ان يكون الربح لكل وحده يساوى صفر :

$$\pi_i = pS_i - \Phi(S_i) = 0 \qquad (٦_١١)$$

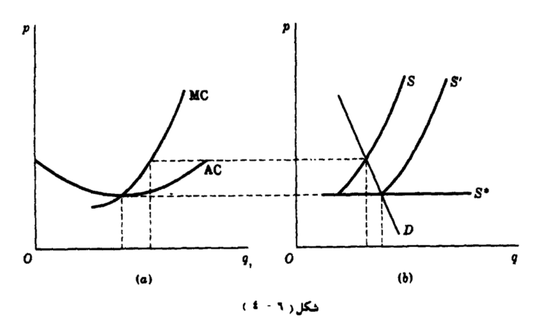
بحيث ان $\Phi(S_i)$ هى التكلفه الاجماليه على المدى الطويل للوحده i للناتج $q_i = S_i = S/n$ وتتطلب المعادله (٦_١١) مساواة السعر و AC: $p = \Phi(S_i)/S_i$

ويمكن حل المعادلات من (٦_٨) الى (٦_١١) للمتغيرات (D, S_i, p, n) ونقرر ، على المدى الطويل ، قوى المنافسه الكامله ليس فقط السعر والكميه ، ولكن ايضا عدد الوحدات الانتاجيه ضمن الوحده الصناعيه ٠

وتوضح المناقشه فى الشكل (٦_٤) بحيث ان الجانب الايسر من الشكل تبين منحنيات التكلفه لوحده انتاجيه نموذجيه (او مثاليه) بينما يوضح الجانب الايمن من الشكل منحنيات الطلب والعرض فى السوق مع تصغير فى المقياس الافقى ٠

ويكون التوازن النهائى من وجهة نظر الوحده الصناعيه عند تقاطع منحنى الطلب والعرض بحيث ان الارباح تكون مساويه لصفر ٠ اما من وجهة نظر صاحب الوحده الانتاجيه فانه يحصل على التوازن عندما يكون السعر مساويا لـ MC و AC وسوف نتحصل على الحاله المثلى ونضمنها اذا كانت $p = MC$ واذا كانت الارباح تساوى صفرا عند $p = AC$ وتعمل كل وحده انتاجيه عند النقطه الادنى لمنحنى AC الخاص بها عند التوازن على المدى الطويل ، لان $MC = AC$ عند النقطه الادنى لمنحنى AC ٠

ولقد عرفنا منحنى الطلب على المدى الطويل S لتضمن جميع العروض المقدمه من



شكل (٦ - ٤)

الوحدات الانتاجيه الموجوده ، بالفعل فى السوق وليست العروض للمنتجين المحتمل وجودهم فى السوق • ويوضح منحنى الطلب S فى الشكل (٦ـ٤ ب) الحالات التى تدر فيها الوحدات ارباحا موجبه وعلى هذا فان الوحدات الجديده سوف تدخل السوق، ثم يتزحزح منحنى العرض الى 'S فلو ان منحنى الطلب عرف على ان يتضمن المعروضات الفعليه والمحتمله (كما هو الحالى فى *S) فان نقطه تقاطع منحنى الطلب والعرض سوف تقرر التوازن النهائى بدون اى تزحزح ونتحصل على المنحنى S لعدد معين n فى المعادله (٦ـ٩) ونتحصل على *S من المعادله (٦ـ١١) بوضع p تساوى ادنى (اقل) AC وسوف يكون منحنى العرض الافقى (*S) والخاص بالوحدة الصناعيه ككل على المدى الطويل هو ايضا منحنى AC للوحده الصناعيه على المدى الطويل ويكون ايضا هو منحنى MC للوحده الصناعيه على المدى الطويل فى الوقت الحاضر • ولقد وضحنا فى الجزء (٥ـ١) ان دوال الانتاج المتجانسه من الدرجه الاولى ثابته لاسعار عناصر انتاج ثابته وتولد ، ايضا مستويات ارباح تساوى صفر AC = MC باستخدام نظريه اويلر اذا دفع للداخل قيم منتجاتهم الحديه • وهذه الشروط تكون هى نفسها الشروط للوحده الصناعيه ككل فى مثل الحاله الموضحه فى الشكل (٦ـ٤) e ولهذا فانه غالبا ما يفترض ان الوحده الصناعيه يكون لها دالة انتاج على المدى الطويل متجانسه من الدرجه الاولى بالرغم من ان الوحدات داخل الوحده الصناعيه ليس لها هذه الميزه •

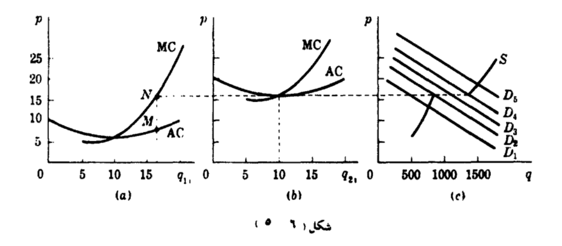
لاتكون دائما منحنيات العرض للمدى الطويل بالشكل الافقى • وسوف يكون منحنى العرض مائلا لاعلى اذا لم يكن للوحدات نفس التكلفه ولايوجد وفورات اقتصاديه تلغى

بعضها البعض • ويمكن ان تولد الوفورات الاقتصاديه (او زيادة النفقات منحنيات عرض على المدى الطويل مائله الى الاسفل (او الى الاعلى) وذلك فى حالة تكافوء دالة التكلفـــه لجميع الوحدات •

شروط التكلفة التفاضلية والايجار : Differential Cost Conditions and Rent

ان افتراض التماثل يكون مفيدا لاغراض العرض ولكنه ليس ضروريا للحصول على التوازن فقد تختار الوحدات الطريقه الفنيه التى تعمل بها وقد يختلف اصحاب الوحدات فـــى طريقة ادارتها وتنظيمها كل حسب مقدرته التنظيميه ، وقد يبنى اصحاب الوحـــدات احجاما مختلفه نتيجه لتوقعات الاسعار المتفرقه • وقد يمتلك البعض بعـــض عناصر الانتاج النادره (مثل الاراضى الخصبه) التى قد لايمتلكها البعض الاخر ، فتحت اى من الشروط السابقة لا تكون دوال التكلفه متساويه لجميع الوحدات •

افترض انه يوجد نوعين محددين من الوحدات الانتاجيه وان منحنياتهما AC و MC للمدى الطويل تكون ممثله فى الجزئين (ا) و (ب) فى الشكل (٦ـ٥) اما الجزء ج فانـه يوضح منحنى العرض للوحده الصناعيه وخمسه منحنيات طلب افتراضيه •



شكل (٦ ٥)

لقد بنى منحنى العرض على الافتراض بانه يوجد خمسين وحده انتاجيه من كـــل صنف ولنفترض انه لايمكن زيادة عدد الوحدات الموجوده من كل صنف فمثلا ، ان عدد المنتجين بتكلفه واطيه (الصنف I) قد يعطى بدون تغيير) بكميد بعض عناصر الانتاج النادر دمثل الاراضى الخصبه • ولا تستطيع وحدات جديده من الدخول ضمن الصف (I) حتى ولو كانت الوحدات فى هذا الصنف تكتسب ارباحا موجبه •

اعتبر منحنى الطلب D_4 حيث ان كل وحده انتاجيه من نوع التكلفه الواطيه، تنتج ما يعادل ١٦ وحده من المنتجات ، وان كل وحده انتاجيه من الوحدات الاخرى تنتـــج

ما يعادل ١٠ وحدات وتعمل الوحدات الاخيره عند النقطه الادنى لمنحنيات AC الخاصه بهم وتكسب ارباحا عاديه • اما وحدات التكلفه الواطيه فانها تربح مايعادل NM وحده ربح زيادة عن الربح العادى • فاذا تزحزح منحنى الطلب الى D_2, فوق جميع وحدات التكلفه العاليه (الصف II) سوف تترك الوحده الصناعيه ، ولكن وحدات التكلفه الواطيه لا تزال تكتسب نفس الارباح الموجبه حتى ولو تزحزح منحنى الطلب الى D_1 اما بالنسبه للمنحنى D_3 فان بعض ، وليس جميع الوحدات ذات التكلفه العاليه سوف تترك الوحده الصناعيه والباقيات سوف يكسبن ارباحا عاديه • اما اذا كان منحنى الطلب هو D_5 فان جميع الوحدات سوف يربحن اعلى من الربح العادى وعلى هذا فان صنفا ثالثا (غير موضح على الشكل) سوف يجد انه من المربح لهم ان يدخلوا فى السوق • وسوف تستمر وحدات التكلفه الواطيه فى كسب ارباحا وتكون فى الموضع الاكثر فائده •

<u>مثال</u> : افترض ان دالتى التكلفه الاجماليه لوحدتين نموذجيتين من الصنفين السابقين هما :

$$C_{1i} = 0.04q_{1i}^3 - 0.8q_{1i}^2 + 10q_{1i} \qquad C_{2i} = 0.04q_{2i}^3 - 0.8q_{2i}^2 + 20q_{2i}$$

وتكون دالتى التكلفه الحديه وتكلفه المعدل المقابلتين هما •

$$MC_{1i} = 0.12q_{1i}^2 - 1.6q_{1i} + 10 \qquad MC_{2i} = 0.12q_{2i}^2 - 1.6q_{2i} + 20$$
$$AC_{1i} = 0.04q_{1i}^2 - 0.8q_{1i} + 10 \qquad AC_{2i} = 0.04q_{2i}^2 - 0.8q_{2i} + 20$$

وتكون النقاط الادنى لمنحنيات تكلفة المعدل النموذجيه $q_{1i} = 10,\ p = 6$ وعند $q_{2i} = 10,\ p = 16$ ونتحصل على منحنى العرض لوحدة ذات التكلفه الواطيه بوضع $MC_{1i} = p$:

$$p = 0.12q_{1i}^2 - 1.6q_{1i} + 10$$

وبحل هذه المعادله التربيعيه لقيم q_{1i} :

$$q_{1i} = \frac{1.6 \pm \sqrt{2.56 - 0.48(10 - p)}}{0.24}$$

ويجب عدم الالتغات الى علامه السالب امام الجزر التربيعى لانها تقابل حالة الوحدة الانتاجيه التى لايتحقق لها شرط الدرجه الثانيه للحصول على الحد الاعلى فبوضع S_{1i} بدل q_{1i}, نحصل على منحنى العرض الاتى :

$$S_{1i} = 0 \qquad \text{اذا كانت} \qquad p < 6$$

$$S_{1i} = \frac{1.6 + \sqrt{2.56 - 0.48(10 - p)}}{0.24} \qquad \text{اذا كانت} \qquad p \geqq 6$$

وعلى نفس الطريقه وبنفس الاسباب ، يكون منحنى العرض لوحدة نموذجيه من وحدات التكلفه العاليه على النحو التالى :

$S_{2i} = 0$ اذا كانت $p < 16$

$$S_{2i} = \frac{1.6 + \sqrt{2.56 - 0.48(20 - p)}}{0.24}$$ اذا كانت $p \geqq 16$

وبالمحافظه على افتراض وجود خمسين وحده فى كل صنف من الصنفين السابقين فان دالة العرض الاجمالى يمكن وصفها بمجموعة المعادلات الثلاثه التاليه :

$S = 0$ اذا كانت $0 \leqq p < 6$

$$S = 50\frac{1.6 + \sqrt{2.56 - 0.48(10 - p)}}{0.24}$$ اذا كانت $6 \leqq p < 16$

$$S = \frac{160}{0.24} + \frac{50}{0.24}[\sqrt{2.56 - 0.48(10 - p)} + \sqrt{2.56 - 0.48(20 - p)}]$$ اذا كانت $p \geqq 16$

افترض ان منحنى الطلب فى الحاله الراهنه هو D ويكون ممثلا بالمعادله التاليه :

$$D = -100p + 2050$$

وتعطى المعادله التاليه النقطه التى تهمنا الان من منحنى العرض (١):

$$S = 50\frac{1.6 + \sqrt{2.56 - 0.48(10 - p)}}{0.24}$$

وبوضع $S = D$ وحل المعادله لقيمتى p و S نحصل على $p = 13$ وكذلك $S = 750$ فاذا كانت $p = 13$. فان كل وحده انتاج ذات التكلفه الواطيه سوف تنتج 15 وحده بمعدل تكلفه تساوى سبعة ريالات وسوف لا تنتج وحدات التكلفه العاليه اى شئ وسوف تكون الكميه الاجماليه ، كما تقررت بحل علاقتى العرض والطلب تساوى $750 = (15)(50)$ وحده وسوف تكسب كل وحده تكلفه واطيه ربحا يساوى 90 ريالا .

ونستطيع وحدات التكلفه الواطيه ان ينتج عند اوطى AC من الاخرين لانهم يمتلكون عناصر انتاج نادره (مثل الاراضى الخصبه) والتى لا تكون متوفره للاخرين ، فاذا تقاطع منحنى الطلب مع منحنى العرض عند نقطه بحيث ان بعض تكتسب ارباحا اكثر من الارباح العاديه، فان ارباحا كثيره سوف يتمتع بها الذين يمتلكون العناصر النادره وسوف يقوم بعض المنتجين (المحتملين) بعد مشاهدتهم وحدات التكلفه الواطيه يحصلون على ارباح عاليه ، باقناع مالكى الاراضى بتاجيرها لهم بدلا من الوحدات المؤجره لها فى الوقت الحاضر ، وسوف يحاولوا تحقيق هذا بدفع ايجارات اعلى من اجل استخدام الارض. وسوف تقوم الوحدات المستاجره حاليا بزيادة اجورها للاراضى

---

(١) اذا لم يكن من الواضح اى قطعه من منحنى العرض هى القطعه المهمه فدع $D = S$ لكل قطعه من القطع الثلاث لمنحنى العرض كلا على انفراد ثم حل لقيم الاسعار فنجد ان واحدا فقط من الاسعار الناتجه فى نفس المدى المناسب لقطعه منحنى العرض المستخدمه ، فتكون هى القطعه المهمه فى الحاله الراهنه .

حتى توافق العروض المقدمه من الوحدات الاخرى وتستمر عمليه رفع الايجارات عن طريق المنافسه بين صنفى الوحدات السابقه الى النقطه بحيث انه لايكون هناك ميزه الربح العالى الناتج من استخدام الارض . وبهذا يستطيع ملاك الاراضى من ابتزاز الارباح الزائده عن الارباح العاديه من مستخدمى اراضيهم . وبهذا تكون هذه المجاميع المبتزه من مستخدمى الاراضى هى الايجار *rent* الذى يدفعه صاحب الوحده مقابل استخدامه هذا العنصر الانتاجى النادر . وقد يستنتج البعض من انه ليس هناك ميزه يمكن الحصول عليها من كون المنتج اكثر كفائه (بكونه منتجا بتكلفه واطيه) بحيث ان ميزة فضل الربح قد محيت بالايجار الاضافى الذى سوف يدفعه صاحب وحدة التكلفه الواطيه مقابل استخدام الارض ففى المثال الحالى تكسب العناصر الانتاجيه النادره المستخدمه من قبل وحدات التكلفه الواطيه ايجارا وقدره 90 ريالا فاذا حدث وان كان صاحب الوحده الانتاجيه هو مالك الارض (العنصر النادر) فانه ليس عليه اى دفعات اضافيه وان الايجار سوف يعود اليه هو نفسه . وبهذا تعرف الايجار rent بانه ذلك الجزء من دخل الفرد او دخل الوحده الانتاجيه الذى يكون زيادة على المقدار الادنى الضرورى لبقاء الفرد او الوحده الانتاجيه تعمل فى نفس وظيفتها او وظيفته . سواء دفع هذا الايجار لمالك العنصر النادر ام لا فهذا ليس المهم لان الانصبا الموزعه Distributive shares تكون مميزه بما تؤديه من وظيفه وليس بالشخص الذى تعود عليه .

٦ - ٥ تطبيق على الضرائب : AN APPLICATION TO TAXATION

ان تطبيق ضريبه البيع سوف تغير من مستوى الانتاج الامثل لصاحب الوحده الانتاجيه لانها تزحزح منحنيات العرض الفرديه وبهذا تزحزح ايضا منحنى العرض الاجمالى وهذا يغير خليط الكميه والسعر فى حالة التوازن . وتكون ضرائب البيع Sales taxes اما ضريبه نوعيه او ضريبه اضافيه قيمة *specific* or *ad valorem* وتنص ضريبه الناعيه على ان كل صاحب وحده انتاجيه ان يدفع عددا من الريالات على كل وحده انتاج قام ببيعها . اما ضريبة اضافيه القيمه فانها تنص على ان يدفع صاحب الوحدة نسبه من سعر مبيعاته .

افترض ان ضريبه البيع هى ضريبه نوعيه بحيث انه يدفع t من الريالات لكل وحده بيعت وعلى هذا تكون مجموع التكلفات بالنسبه لنموذج من اصحاب الوحدات هى :

$$C_i = \phi(q_i) + b_i + tq_i$$

ويتطلب شرط الدرجه الاولى للحصول على الحد الاعلى من الربح من هذا النموذج ان ينتج مستوا من الانتاج بحيث ان $MC = p$:

$$\phi'(q_i) + t = p$$

$$\phi'(q_i) = p - t \qquad (٦_١٢)$$

وهذا يعنى ان صاحب الوحده سوف يساوى التكلفه الحديه لانتاجه زائدا ضريبه الوحدة بالسعر . ويتطلب شرط الدرجه الثانيه ان يكون منحنى MC فى حالة تصاعد، ونحصل على دالة العرض لصاحب الوحده بحل المعادلة (٦_١٢) لقيم q_i وبوضع $q_i = S_i$ لجميع الاسعار الاكبر من ، او تساوى ، او اصغر من ادنى AVC :

$$S_i = S_i(p - t)$$

ونحصل على دالة العرض الاجمالى بجميع دوال العرض الفرديه :

$$S = \sum_{i=1}^{n} S_i(p - t) = S(p - t)$$

وبهذا يكون اجمالى العرض بدلالة السعر الصافى $(p - t)$ الذى تحصل عليه البائعون فاذا كان فى حالة عدم وجود ضريبه بيع ، اجمالى العرض هو S^0 من الوحدات بسعر p^0 من الريالات ، فان اصحاب الوحدات سوف يقدمون للعرض نفس الكميه S^0 بضريبه بيع تساوى ريالا واحدا اذا كان السعر الذى يدفعه المستهلك يساوى $p^0 + 1$ من الريالات . وهذا مكافئا لتزحزح عمودى الى اعلى لمنحنى العرض بمقدار ريالا واحدا وسوف يرغب اصحاب الوحدات بعرض كمية اقل عند كل سعر . ومن اجل تحديد خليط الكميه والسعر فى حالة التوازن ، فاننا نضع العرض يساوى الطلب :

$$D(p) - S(p - t) = 0$$

ونحل هذه المعادله لتبم p .

مثال : افترض وجود ضريبه زيادة قيمة بمعدل $100v$ فى العائد من سعر البيع وعلى هذا تكون التكلفات الاجماليه هى :

$$C_i = \phi(q_i) + b + vpq_i$$

وبوضع MC زائدا ضريبه الوحده تساوى السعر :

$$\phi'(q_i) + vp = p$$

$$\phi'(q_i) = p(1 - v)$$

وعلى هذا يكون دالة العرض الفرديه هى :

$$S_i = S_i[p(1 - v)]$$

وتكون دالة العرض الاجماليه هى :

$$S = \sum_{i=1}^{n} S_i[p(1 - v)] = S[p(1 - v)]$$

وبهذا تكون العرض الاجمالى بدلالة السعر الصافى ، كما تؤدى ضريبة البيع الموجوده فى الدالة الى زحزحة منحنى العرض الى اعلى بحيث انها تكون متناسبه مع ارتفاع منحنى العرض الاصلى فوق محور الكميه وسوف يتقرر خليط الكميه والسعر فى حالة التوازن وللمره

الثانيه ، بوضع العرض مساويا للطلب ٠

افترض ان الوحده الصناعيه تكون مكونه من ١٠٠ بدوال تكلفه متطابقه

$$C_i = 0.1q_i^2 + q_i + 10$$

وبوضع MC مساويا للسعر ، وبالحل لقيم q_i. وبوضع $q_i = S_i$,

$S_i = 0$ اذا كانت $p < 1$

$S_i = 5p - 5$ اذا كانت $p \geqq 1$

وتكون دالة العرض الاجمالى هى :

$S = 0$ اذا كانت $p < 1$

$S = 500p - 500$ اذا كانت $p \geqq 1$

افترض ان دالة الطلب هى :

$$D = -400p + 4000$$

وبوضع العرض يساوى الطلب يكون خليط الكميه والسعر فى حالة التوازن :

$$p = 5 \qquad D = S = 2000$$

افترض الان ان ضريبه النوع بمقدار t من الريالات قد فرضت وان دالة التكلفه الاجماليه النموذجيه تصبح :

$$C_i = 0.1q_i^2 + (1 + t)q_i + 10$$

وبوضع MC مساويا للسعر وبالحل لقيم $q_i = S_i$.

$S_i = 0$ اذا كانت $p < 1 + t$

$S_i = 5(p - t) - 5$ اذا كانت $p \geqq 1 + t$

وعلى هذا فتكون دالة العرض الاجمالى هى :

$S = 0$ اذا كانت $p < 1 + t$

$S = 500(p - t) - 500$ اذا كانت $p \geqq 1 + t$

وبوضع العرض يساوى الطلب ثم الحل لقيم p. :

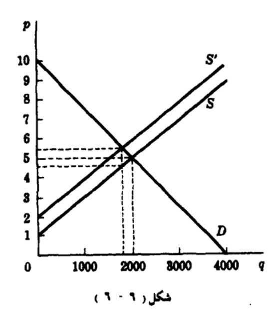
$$p = 5 + \tfrac{5}{9}t$$

فاذا كان معدل الضريبه هو ٩٠ قرشا لكل وحده بيع ، فان خليط التوازن للكميه والسعر يكونان :

$$p = 5.50 \qquad D = S = 1800$$

فنجد ان الاسعار ارتفعت والكميه المباعه نقصت ، وذلك نتيجة للضريبه ولكن ارتفاع السعر كان اقل من كمية الضريبه على الوحده المباعه ٠ وتمثل الخمسين قرشا ، وهـــى الزياده فى السعر ، وذلك الجزء من الضريبه التى قام بدفعها المستهلك عن طريـــق

شرائه للوحدات المباعه ٠ اما الاربعين هلله الباقيه فانها تقع على عاتق صاحب الوحده الانتاجيه ٠ ويمثل شكل (٦ـ٦) هذا المثال ٠ فمنحنى العرض هو S قبل الضريبة و S' هو منحنى العرض بعد الضريبه وتمثل المسافه العموديه بين S و S' قيمـــه الضريبه وهى تسعون هلله ونرى كيف ارتفع السعر المدفوع من خمسة ريالات الى خمسة ريالات ونصف وان السعر المقبوض من قبـــل صاحب الوحده انخفض الى اربعة ريالات وستون هلله ويمكن للقارئ التحقق من ان نسبـــــة الضريبه التى دفعها المستهلك تكبر كلما كان ميل منحنى الطلب والعرض صغيرا وفـــى حالة ثبات بقية المتغيرات ، فان السعر يتغير طرديا مع معدل الضريبه وتتغيرالكميـه عكسيا مع معدل الضريبه(١).



شكل (٦ - ٦)

٦ - ٦ توازن سوق عناصر الإنتاج : FACTOR-MARKET EQUILIBRIUM

لقد تركز النقاش فى الاجزاء السابقه على اسواق السلع التنافسيه الكامله ويمكـن الوصول الى نتائج مماثله بالنسبه لاسواق الدواخل inputs والتى تمثل عناصر الانتـاج الغيـر منتجه nonproduced factors of production ويكون سوق العناصر الانتاجيه تنافسيا كاملا اذا كان :

(١) العنصر متجانسا وكان المشترون المختلفون غير مميزين من وجهة نظر البائع٠
(٢) البائعون والمشترون متعددون ٠

---

(١) ويمكن للتحاليل السابقه ان توضع نتائج التعويضات subsidies بمعالجة التعويض على انه ضريبه سالبه٠

(٣) البائع والمشترى يمتلكون معلومات كامله ٠
(٤) البائعون والمشترون فى حرية تامه للدخول والخروج من السوق على المدى الطويل

ففى حالة السلع ، فان المستهلك يقوم بشراء السلعه لانه يتحصل على منفعه منهـا اما عناصر الانتاج فان المشترى يقوم بشرائها من اجل الاضافه التى تصنعها لعملية الانتاج ٠ اما فى حالة المستهلك ، فان منحنيات الطلب للمنتجات النهائيه فانها تشتق من دوال المنفعه للمستهلك على افتراض الحصول على الحد الاعلى من المنفعه ٠ وفى حالة عناصر الانتاج ، فان منحنيات الطلب تشتق من دوال الانتاج بافتراض الحصول على اعلى حد من الربح ٠

دوال الطلب : Demand Functions

ان عناصر الانتاج المثلى ، بالنسبه لصاحب الوحده الانتاجيه الذى يتصرف بحكمة وعقل ، تحقق الشرط الذى ينص على ان سعر كل عنصر من عناصر الانتاج يجب ان يساوى قيمة MP الخاصه به ٠ ولقد قمنا بحل شروط الدرجة الاولى لعملية الحصول على الحد الاعلى من الربح فى الجزء (٤ــ٣) للحصول على طلبات العناصر بالنسبه للوحدة الانتاجيه بدلالة اسعار هذه العناصر وبدلالة سعر الناتج ايضا ٠ ففى حالة الناتج الواحد باستخدام عنصرين من عناصر الانتاج :

$$D_{i1} = D_{i1}(r_1, r_2, p)$$
$$D_{i2} = D_{i2}(r_1, r_2, p)$$

حيث ان D_{ij} تكون طلب الوحدة الانتاجيه i للعنصر j وبافتراض ان جميع الاسعار الاخرى ثابته ، ونحذف ارقام العناصر السفلى ، تكون دالة الطلب للوحدة الانتاجيه i لعنصر معين هى :

$$D_i = D_i(r)$$

حيث ان r يمثل سعر العنصر الانتاجى ٠ ونحصل على دالة الطلب الاجمالى بجمع دوال الطلب الفرديه ٠ فاذا وجد m من الوحدات الانتاجيه والتى تطلب العنصر فان :

$$D = \sum_{i=1}^{m} D_i(r) = D(r)$$

ولقد بينا فى الجزء (٤ــ٣) ان منحنيات طلب العناصر الفرديه تكون دائما بميل سالب وعلى هذا فان منحنيات طلب العناصر الاجماليه تكون ايضا ، دائما بميل سالب بمعنى ان :

$$\partial D / \partial r < 0$$

دوال العرض : Supply Functions

ان عناصر الانتاج اما ان تكون عناصر اوليه primary او انها تكون عناصر منتجه Produced وتعرف العناصر المنتجه بانها ناتج لوحدات انتاجيه اخرى • وتكون دالة العرض لهذه العناصر هى دالة العرض الاجمالى للوحدات الانتاجيه التى تقوم بانتاج هذا العنصر • ولقد اشتقت مثل هذه الدوال فى الجزء (٤ــ٣) • وسوف نقوم باستخدام طرق مختلفه لعوامل الانتاج الغير منتجه nonproduced factors مثل العمل والذى يفترض فيه دائما انه بملك المستهلك الذى يقوم ببيعه للمنتجين من اجل الحصول على الدخل الذى يشترى به السلع • ويفترض فى بعض الاحيان ، ان المستهلك سوف يقوم ببيع كل ما عنده من العمل بغض النظر عن سعر السوق الراهن • ففى مثل هذه الحاله تكون دالة العرض لهذا العنصر خطا مستقيما عموديا باحداثيات افقيه (احداثى السينى) تساوى مخزون اجمالى ما عنده من العمل • وتمثل حالة بعض المستهلكين الذين يحصلون على متعة (او منفعة) من التحفظ على بعض ما عندهم من العمل (او كله) حالة اكثر فائده من الحالة السابقه •

لقد افترضنا فى حالة العمل فى الجزء (٢ــ٤) ان المنفعه تكون بدلالة وقت الفراغ من العمل leisure والدخل income

$$U = g(T - W, y)$$

حيث ان T تكون اجمالى كمية الوقت المتاحه (وهى طول الفتره الزمنيه التى تكون دالة المنفعه معرفة من اجلها) • وان W تكون كمية العمل الذى قام به الفرد مثلا بعدد الساعات التى اشتغلها الفرد • ولقد بينا ان الفرد الذى يحاول الحصول على الحد الاعلى من المنفعه يوزع وقته بين العمل ووقت الفراغ بحيث ان :

$$\frac{g_1}{g_2} = r \qquad (١٣ـ٦)$$

حيث ان r تكون معدل الاجر وان g_i • تكون الاشتقاق الجزئى لدالة المنفعه بالنسبه لعاملها i وتعتمد g_i على الدخل وكمية العمل الذى قام بها الفرد وبما ان $y = rW$ فان المعادله (١٣ــ٦) تحتوى فقط على المتغيران r و W وبحل (١٣ــ٦) لقيم W ووضع $W = S_i$ نحصل على دالة عرض العمل labor supply function للفرد i :

$$S_i = S_i(r)$$

وتنص دالة العرض على ان كمية العمل التى يرغب الفرد فى القيام بها تكون بدلالة معدل الاجر ونحصل على دالة العرض الاجمالى بجمع دوال العرض الفرديه • فاذا وجد n من الافراد الراغبين فى العمل بمعدل اجر معين ، فان دالة العرض الاجمالى تكون :

$$S = \sum_{i=1}^{n} S_i(r) = S(r)$$

وقد يكون منحنى العرض بميل سالب ، او موجب ، او كلاهما • فاذا كان هناك فرد ايقيم وقت الفراغ بدرجة عاليه وانه يركز على زيادة اوقات الفراغ اكثر من زيادة دخلـــــه فان منحنى العرض بالنسبه للعمل قد يكون بميل سالب بحيث انه كلما ارتفع الاجر كلما قلت كمية العمل التى يقوم بها هذا الفرد •

توازن السوق : Market Equilibrium

اذا اعطينا دالتي العرض والطلب لعناصر الانتاج ، فان خليط التوازن للسعـــر والكميه يتقرر بتطبيق شرط التوازن $D = S$ وسوف تغير قوى السوق كتلك التى نوقشت فى الجزء (٦ــ٤) الحاله الراهنه حالما يختلف السعر الواقعى من سعر التوازن وســوف نصل الى التوازن عندما العرض يساوى الطلب فقط • وكما فى اسواق المنتجات فان اى مشارك فى السوق لا يستطيع تحسين وضعه فى السوق باعادة التعاقد بعد الوصول الى حالة التوازن •

وبما ان خليط التوازن للسعر والكميه يجب ان يقع على كلا منحنى الطلب والعـــرض فان هذا الخليط يجب ان يحقق شروط التوازن للمنتج والتى من خلالها اشتقـــــت منحنيات الطلب • ويكون سعر التوازن دائما مساويا لقيمة MP الخاصه به اى ان قيمة الريال الحديه التى صرفت على العناصر الانتاجيه تكون هى نفسها عنــــد كل استخدام(١) وهذه المساواه ضرورية جدا كشرط لعملية الحصول على الحد الاعلــى من الربح وان كل صاحب وحدة انتاجية يستطيع الوصول الى النقطه المثلى فى الســـوق التنافسيه الكامله اذا تحققت شروط الدرجه الثانيه لحصوله على الحد الاعلى من الربح •

٦ – ٧ وجود ووحدانية التوازن :

THE EXISTENCE AND UNIQUENESS OF EQUILIBRIUM

وحتى هذه النقطه ، كانت تحاليل توازن السوق مبنيه على الافتراض بوجود تــوازن السعر والكمية لكل سوق منفصله وانه ليس من الصعب تكوين بعض الامثله التى لا ينطبـق عليها افتراض وجود هذا التوازن ، فمثلا لا يتساوى العرض والطلب عند اى خليط سعـر

---

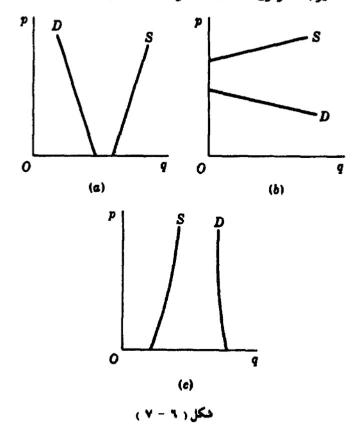
(١) وهذه الحاله لها نظير فى نظريات سلوك المستهلك تذكر ان $f_1 = \lambda p_1$ هى احد شروط التوازن للمستهلك ، حيث ان $f_1 = \lambda p_1$ وان f_1 هى المنفعه الحديه للنقود • وعليه فان $f_1(1/\lambda) = p_1$ او ان سعر السلعه يجــب ان يساوى منفعتها الحديه مضروبة فى الكمية الاضافيه من النقود التى كان من الواجب دفعها لكل وحدة منفعة اضافيـــه •

وكمية غير سالب • وبالمثل ، فانه يمكن تكوين بعض الامثله التى لا ينطبق عليها •افتراض وحدانيه التوازن فمثلا : لايتساوى العرض والطلب عند اكثر من خليط واحد من السعر• والكميه الغير سالب• وسوف يكون هذا الجزء محددا على ملاحظات عامه ومناقشة بعض الحالات الخاصه • وسوف نعتبر مسائل وجود ووحدانيه التوازن باكثر عمقا داخل نطاق تعدد الاسواق (او الاسواق العدده) فى الباب العاشر•

وجود التوازن : Existence

سوف يكون توازن السوق التنافسيه موجود اذا كان هناك سعر واحد غير سالب او اكثر بحيث ان العرض والطلب يكونا متساويين عند هذا السعر ويكونا غير سالبين • وفى الوجهة الهندسيه والرسم ، فان التوازن سوف يكون موجودا اذا كانت لمنحنيات الطلب والعرض نقطه مشتركه واحده على الاقل فى الربع الغير سالب من الفضاء •

ويمثل الشكل (٦ــ٧) ثلاثة حالات لايكون لمنحنيات الطلب والعرض اى نقطه مشتركة فالعرض يفوق الطلب عند كل سعر غير سالب فى الحاله المرسومه فى الشكل (٦ــ٧ ا) وعليه فانه لايوجد توازن حسب التعريف المعطى اعلاه •



شكل (٦ - ٧)

ويمكن توسيع تعريف التوازن ليضم مثل هذه الحاله • افترض ان $p = 0$ اذا كانت

$S(0) > D(0)$ ونعرف " السلعه المجانيه " *free good* بانها السلعه ذات السعر صفر والتى تمتاز بتفوق العرض على الطلب ، فيستطيع المستهلك الحصول على كل ما يرغب من هذه السلعه مقابل لاشئ ويمكن اعتبار ان الماء والهواء سلعتين مجانيتين. ولكن الماء قد يكون مجانا لفتره معينه ، فعندما تبدء عمليه تصفيه وتنقيه ونقل المياه، فقد يصبح ضروريا وجود سعر عرض موجب positive supply price ويغطى الشكل (٦ــ٧ ب) الحاله التى يكون فيها سعر الطلب اقل من سعر العرض لكل ناتج غير سالب ، وتكون الكميات التى يرغب المستهلكون فى دفعها غير كافيه لتعويض المنتجين . وعلى هذا فان توازن السوق لاتوجد تحت التعريفات المعطاه حتى الان . وللمره الثانيه ، فانه يمكن التوسع فى تعريف التوازن ليغطى مثل هذه الحالات . وسوف يوجد توازن بانتاج يساوى صفرا اذا كان سعر العرض يفوق سعر الطلب لجميع المنتجات الغير سالبه . فمثلا يمكن من الناحيه الفنيه انتاج صناديق من الذهب خاصه لحمل غذاء الاطفال ولكن لم يتم انتاج مثل هذه الصناديق لان الاباء والامهات غير مستعدين لدفع السعر الباهظ لمثل هذه الصناديق والتى سوف يطلبها منهم منتجى هذه الصناديق لتغطيه تكلفتهم.

فحالات السلعه المجانيه وحالات انتاج لاشئ يكون لها مغذى فى الاقتصاد وسوف نغطى مثل هذه الحالات بالطرق العامه التى سوف تناقش فى الباب العاشر فاغلب الحالات الاخرى التى لايوجد لها توازن انما هى نتيجة لمواصفات رهيفه للنمط الذى تشكلت به الحاله . فاذا واجهتنا مثل هذه الحالات ، فان الافتراضات القائم عليها سلوك المستهلك والمنتج لابد من تغيرها من اجل الوصول الى اطار معقول لتحليله ، ويقدم لنا الشكل (٦ــ٧ د) مثالا لذلك ، ففى هذه الحاله يكون الطلب اكثر من العرض عند كل سعر ، ولايوجد اى تفسير لتحليل مثل هذه الحاله .

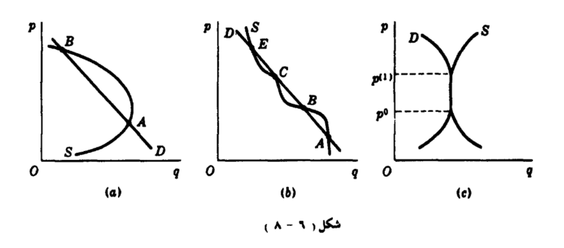
وحدانية التوازن : Uniqueness

ان من المحتمل ان يكون هناك اكثر من توازن واحد ، بمعنى ان العرض والطلب يكونا متساويين عند اكثر من نقطه سعر وكميه واحده غير سالبه . وتمثل نقطتى A و B فى الشكل (٦ــ٨ ا) نقطتى توازن . ففى هذه الحاله يكون لمنحنى الطلب مائلا الى اسفل بالشكل العادى ، ولكن منحنى العرض ينحنى الى الخلف كلما زاد السعر فتكون الكميه ممثله بدالة ذات قيمه مفرده بالنسبه للسعر لايمثل دالة ذات قيمة مفرده بالنسبة للكمية .

ولقد وجد بعض الاقتصاديون ان منحنى العرض المنحنى الى الخلف

"backward-bending" يكون موجودا فى اسواق العمل لبعض الدوال الناميه ، ففى مثل هذه البلدان يكون لمنحنى العرض ميلا موجبا عند معدلات الاجور الواطيه نسبيا ، وان اى زيادة فى معدل الاجور وسوف يزيد من عرض العمل ولكن كلما اخذ معدل الاجور فى التزايد وبالتالى يزداد دخل العمال ، فانه سوف يتوصل الى نقطه ما يفضل عندها العمال وقت الفراغ على العمل وبالتالى على دخل اكثر ٠

افترض ان δ تمثل الفرق بين ميلين منحنى الطلب ومنحنى العرض بحيث ان $\delta = D'(p) - S'(p)$. فاذا كان لمنحنى الطلب ميلا سالبا فى كل مكان وكان لميل منحنى العرض ميلا موجبا فى كل مكان ، فان $\delta < 0$ لجميع الاسعار وانه لا يمكن ان يوجد اكثر من نقطه توازن واحدة فقط ٠ فاذا كانت $\delta < 0$ عند سعر التوازن p^0 فان الطلب سوف يكون اقل من العرض عند سعر اكبر بقليل من p^0 وسوف يكون اكبر من العرض عند سعر اقل بقليل من p^0 ٠ وما دامت $\delta < 0$ فان منحنى الطلب سيظل الى يسار منحنى العرض باسعار اعلى من p^0 وسيظل الى يمينه باسعار اقل من p^0 وعلى هذا فانه لا يمكن وجود نقطه توازن اخرى ٠ وبمثل هذه المناقشه ، نستطيع ان نثبت انه لا يمكن وجود اكثر من نقطه توازن واحده اذا كانت $\delta < 0$ فى كل مكان ٠



شكل (٦ - ٨)

ففى الشكل (٦ــ٨ ا) تكون $\delta < 0$ لنقطه التوازن A وعند نقطه B يكون كلا المنحنين بميل سالب ، ولكن منحنى الطلب اكثر حدة فى الميل من منحنى العرض وتكون $\delta > 0$ عند النقطه B [١] ويظهر الشكل (٦ــ٨ ب) اربعة نقط توازن ويكون منحنى العرض بميل سالب فى كل مكان عاكسا وجود وفورات اقتصاديه external economies وتكون قيم δ عند النقاط الاربعه كالتالى : سالبه عند A ، وموجبه عند B وصفر عند

(١) ان المشتقه $D'(p)$ والمشتقه $S'(p)$ يكونا بدلالة السعر فقط ٠ وعلى هذا فان معنى ميل منحنى الطلب بحده الى الاسفل ان تكون $D'(p) > S'(p)$ ٠

C_1 ، وسالبه عند E. وعموما ، وباهمال نقط التوازن التى تكون عندها $\delta = 0$. نجد ان δ يجب ان تبدل اشارتها عند نقط التوازن المجاوره ، اما نقط التوازن التى تكـــون عندها $\delta = 0$ فانها قد تقع بين او على اى جانب للنقط مع تبديل فى الاشاره وسوف يكون هناك نقاط توازن عدة عند $\delta = 0$ اذا تطابق منحنى الطلب والعرض فى جميع الاجزاء او فى بعض الاجزاء ومثل هذه الحاله معروضه فى الشكل (٦ــ٨ د) حيث ان كمية التوازن وحيده ، ولكن اى سعر من p^0 وحتى $p^{(1)}$ يمكن ان يكون سعـــــــر توازن .

٦ – ٨ استقرار (ثبات) التوازن : THE STABILITY OF EQUILIBRIUM

تتقرر كمية وسعر التوازن بمساواة العرض والطلب ويتميز هذا التوازن بتسليم البائـــع والمشترى بالحاله الراهنه ، اى انه لايكون عند اى مشارك فى السوق الرغبه فـــى تغيير سلوكه . ولكن وجود نقطه توازن لايضمن بقاؤها ، لانه ليس هناك ضمان ان سعرالتوازن سوف يتحقق اذا لم يكن السوق فى توازن عند بداية التعاقد . وليس هناك ايضا ضمان ان السعر البدائى سوف يكون هو سعر التوازن . وعلى كل حال فان التغيـــرات فى افضليات المستهلك سوف تزحزح ، عامة منحنى الطلب ، والاختراعات الجديده ســوف تزحزح منحنى العرض ، وكلا العنصرين (الافضليات والاختراعات) ســـوف يقلق حالة التوازن الراهنه ، وسوف يكون هناك توازن جديد ولكن، ايضا ليس هناك اى ضمـــان لثبات هذا التوازن والمحافظه عليه .

وعامة يرمز الى الاضطراب او التشويش (او القلق) لحاله التوازن بانه الحالـــه التى يكون فيها السعر الفعلى actual price مختلفا من سعر التوازن . ويكون التـــوازن مستقرا *stable* اذا ادى الاضطراب او التشويش الى العوده الى حاله التوازن ويكـون غير مستقر *unstable* اذا بعد التوازن الى ماكان عليه قبل الاضطراب[1]. ولقـــد افترض ضمنا فى مناقشه التوازن فى الجزء ٦ــ٤ تن توازن السوق كان مستقرا .

التوازن الساكن : Static Stability

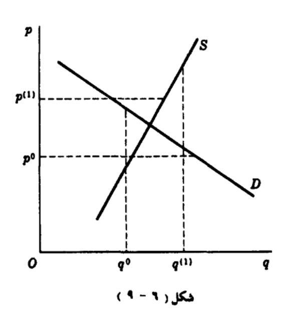
انه من الطبيعى ان يخلق اى اضطراب فى السوق نوعا من التعديل فمثلا اذا

(١) لايمثل هذا التعريف للتوازن المستقر تعريفا عميقا انما هو واحد من عدة تعاريـــف بديله . انظر كتاب P. A. Samuelson, تحت عنوان *Foundations of Economic Analysis* على الصفحات ٢٦٢ ـ ٢٦٠ .

كان السعر الفعلى اقل من سعر التوازن ، فان عمليه التعديل قد تتكون من بعض المشترين الذين سوف يرفعون قيم عروضهم للسلعه • فالتحاليل الساكنه تتجرد من مجرى الزمن لعملية التعديل وتعتبر فقط طبيعة التغير ، بمعنى ان هذا التعديل هل هو فى اتجاه او هل هو بعيدا عن التوازن •

عرفنا : $E(p) = D(p) - S(p)$ على انه فائض الطلب excess demand عند السعر p ففى شكل (٦ــ٩) يكون فائض الطلب موجبا عند السعر p^0 وسالبا عند السعر $p^{(1)}$ (١) ونشتق شروط الاستقرار من الافتراضات عن سلوك البائع والمشترى فى السوق • ولقد اسس شرط فالراس للاستقرار Walrasian stability condition على افتراض ان المشترى يميل لرفع عروضه اذا كان فائض الطلب موجبا وان البائع يميل الى تخفيض اسعاره اذا كان فائض الطلب سالبا • فاذا كان هذا الافتراض السلوكى صحيحا ، فان السوق تكون مستقره اذا كان رفع السعر يقلل من فائض الطلب (١) بمعنى انه اذا كان :

$$\frac{dE(p)}{dp} = E'(p) = D'(p) - S'(p) < 0 \qquad (٦ــ١٤)$$



شكل (٦ - ٩)

---

(١) وباعاده كتابه دالتى الطلب والعرض فى الشكل المعكوس، $p_s = S^{-1}(q)$ و $P_d = D^{-1}(q)$، وتعرف سعر فائض الطلب على انه : $F(q) = p_d - p_s = D^{-1}(q) - S^{-1}(q)$. وينص شرط مارشال للاستقرار Marshallian stability condition على ان المنتجين سوف يرفعون من انتاجهم عندما تكون $F(q) > 0$ وسوف يخفضونه عندما تكون $F(q) < 0$ وعلى هذا فان التوازن يكون مستقرا من وجهة نظر مارشال اذا كان $dF(q)/dq = F'(q) = D^{-1\prime}(q) - S^{-1\prime}(q) < 0$ فاذا كان ميل منحنى الطلب سالبا وكان ميل منحنى العرض موجبا وان التوازن يكون مستقرا حسب وجهة نظر التعريفين • فاذا كان لمنحنى العرض والطلب نفس الاشارة ، فان التوازن سوف يكون مستقرا حسب احد التعاريف وغير مستقر حسب التعريف الاخر •

وسوف يتحقق هذا الشرط بطريقه آليه اذا كان ميل منحنى الطلب سالبا وكان ميل منحنى العرض موجبا • فاذا كان كلاهما بميل موجب ، فان منحنى العرض يجب ان يكون اكثر انبساطا عن منحنى الطلب $[S^{-1'}(q) < D^{-1'}(q)]$ ليحقق المعادله (٦ــ١٤) فاذا كان كلاهما سالبا ، فان منحنى العرض يجب ان يكون اكثر انحدارا من منحنى الطلب•

ان منحنى العرض بميله السالب والمرسوم على الشكل (٦ــ٨ب) يعطى نقط توازن ، فالنقاط الثلاثه E ، B، A تكون بالتبادل مستقره وغير مستقره حسب شرط فالراس للاستقرار فى المعادله (٦ــ١٤) فمنحنى العرض اكثر انحدارا من منحنى الطلب عند A ويكون التوازن مستقرا عند هذه النقطه • اما عند نقطه B فان منحنى العرض يصبح اقل انحدارا من منحنى الطلب وبذلك تكون B غير مستقره وبنفس السبب تكون D مستقره • ولا يكون شرط الاستقرار فى المقابله (٦ــ١٤) شرط كفايه لتغطيه نقطه التوازن C • ان فائض الطلب يكون موجبا عند اسعار اقل من p_e وكذلك عند اسعار اعلى من p_e وسوف تميل الاسعار الى الارتفاع للانحرافات للاعلى او للاسفل من التوازن • وتنصف نقطه C على انها شبه مستقره *semistable* •

الاستقرار الحركى : العديل المتخلف •

Dynamic Stability: Lagged Adjustment

لقد نص على شرط الاستقرار الساكن فى المعادله (٦ــ١٤) باعتبارات معدل التغير لفائض الطلب بالنسبه للسعر ، ولم نقل شيئا عن مجرى الوقت لعملية التعديل • وقد لا يتوقع شخص ما تعديلا لحظيا فى الموديل الحالى • فاذا كان السعر البدائى لا يساوى سعر التوازن ، فانه سوف يتغير ، وتبدء عملية اعادة التعاقد • فاذا كان السعر الجديد لا يزال مختلفا عن سعر التوازن ، فانه سوف يتغير اجباريا • ومن الممكن وضع الطبيعه الحركيه لعملية اعادة التعاقد فى موديل بحيث ان اعادة التعاقد تحصل خلال فترات زمنيه ثابته ولتكن ساعة زمنيه مثلا بحيث ان المحرج يقوم باعلان السعر الجديد فى بداية كل فتره زمنيه وسوف تستقطى تحاليل الاستقرار الحركى مجرى السعر خلال الفتره الزمنيه • بمعنى ان الاستقصاء سوف يكون من فتره لفتره اخرى [(١)] • ويكون التوازن مستقرا بالمعنى الحركى اذا اقترب السعر من سعر التوازن خلال الفتره الزمنيه ، ويكون غير مستقرا اذا كان التغير فى السعر بعيدا عن سعر التوازن •

انه من الممكن وضع الافتراض الذى ينص على ان فائض الطلب الموجب يميل الى رفع

---

(١) ان الاسعار التى تسجل من فتره لاخرى تكون اسعارا محتمله potential اكثر منها فعليه (او محققه) حتى تصل الى التوازن فما دام $D \neq S$ سوف لاينفذ اى عقد وتستمر عمليه اعادة التعاقد •

الاسعار ، فى عدة صور ، منها الموديل الرياضي المستخدم بصفه عامة :

$$p_t - p_{t-1} = kE(p_{t-1}) \qquad (٦_١٥)$$

حيث ان p_t تكون السعر فى الفتره الزمنيه t وان k تكون ثابتا موجبا • وتعبر المعادله (٦_١٥) عن احد الانواع المحتمله لسلوك البائع والمشترى • افترض انه يوجد فائض طلب موجب $E(p_{t-1})$ فى الفتره الزمنيه $(t-1)$ فان هذا يعبر عن الافتراض بان فائض الطلب $E(p_{t-1})$ يدفع البائع ليعرض السعر $p_t = p_{t-1} + kE(p_{t-1}) > p_{t-1}$ فى الفترة الزمنيه اللاحقه • افترض ان دالة العرض والطلب تكونا :

$$D_t = ap_t + b \qquad (٦_١٦)$$

$$S_t = Ap_t + B \qquad (٦_١٧)$$

فيكون فائض الطلب فى الفتره $(t-1)$:

$$E(p_{t-1}) = (a-A)p_{t-1} + b - B$$

وبتعويض هذه المعادله فى المعادله (٦_١٥) :

$$p_t - p_{t-1} = k[(a-A)p_{t-1} + b - B]$$

$$p_t = [1 + k(a-A)]p_{t-1} + k(b-B) \qquad (٦_١٨)$$

وتصف المعادله الفرقيه من الدرجه الاولى first-order difference equation فى المعادله (٦_١٨) المجرى الزمنى للسعر على اساس افتراض السلوك المضمن فى المعادله (٦_١٥) فاذا اعطينا الشرط المبدئى $p = p_0$ عندما تكون $t = 0$ فان حلها يكون :

$$p_t = (p_0 - p_e)[1 + k(a-A)]^t + p_e \qquad (٦_١٩)$$

حيث ان $p_e = \dfrac{b-B}{A-a}$ هو سعر التوازن الذى تقرر من المعادله (٦_١٧) (٦_١٦) بوضع $D_t - S_t = 0$ ثم حل المساله لقيم $p_e = p_t$. فيكون التوازن مستقرا اذا كان مستوى السعر الفعلى يقترب من مستوى التوازن كلما ازدادت t وسوف يقترب مستوى السعر من p_e بدون تذبذب اذا كانت : $0 < 1 + k(a-A) < 1$ وسوف يتحقق الجانب الايمن من هذه اللامتساويه اذا كان :

$$a < A \qquad (٦_٢٠)$$

وسوف يتحقق الجانب الايسر اذا كان :

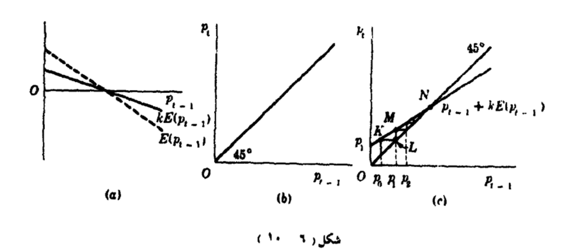
$$k < \frac{1}{A-a}$$

وسوف يتحقق الشرط فى المعادله (٦_٢٠) بطريقة آليه اذا كان لمنحنى العرض ميلا موجبا $(A > 0)$ وسوف ينحرك مستوى السعر الى اعلى مع الزمن اذا كان السعر المبدئى اقل من سعر التوازن وسوف يتحرك الى اسفل اذا كان السعر المبدئى اكبر من سعر التوازن • اما اذا كان ميل منحنى العرض سالبا ، فان الاستقرار يتطلب ان يكون ميل

منحنى الطلب $(1/a)$ اكبر من الناحيه الجبريه ، من ميل منحنى العرض $(1/A)$ بمعنى ان منحنى العرض سوف يقطع منحنى الطلب من الاعلى . ويكون التوازن غير مستقر اذا ما قطع منحنى العرض منحنى الطلب من اسفل وان اى إنحراف من التوازن سوف يتبعه انحرافات اكثر تبعد د عن التوازن . فاذا كانت k كبيره بما فيه الكفايه وكانت $a-A$ سالبه ، فان : $1+k(a-A)$ تكون ايضا سالبه ، وان مستوى السعر سوف يتذ بذ ب مع الزمن (١) .

ان كلا الاستقرارين الحركى والساكن يعتمدان على ميلين منحنى الطلب والعرض ولكن الاستقرار الحركى يعتمد ايضا على حجم المتغير بقيمة ثابته k والذى يؤثر الى الحد الذى يمكن للسوق ان يعدل الفروق بين الكميات المطلوبه والكميات المعروضه لكل وحده زمنيه وتدل قيمة كبيره للمتغير k على ان المشترى والبائع يميلان الى التعديل اكثر من اللازم "overadjust" فاذا كان فائض الطلب موجبا فان عملية العرض من قبل المشترين تكون حركيه بد رجة كافيه لرفع السعر اكثر من مستوى التوازن . وتكون كل تعديل فى الطريق الصحيح ولكنه مغالا فى حجمه . وعلى هذا فان التحاليل الحركيه تأخذ فى الحسبان قوة ردود الفعل للاضطرابات .

ويمكن تحليل الاستقرار الحركى للتوازن بطريقه هندسيه على النحو التالى فاذا رسمنا السعر على المحور الافقى . فان الخط المتقطع على الشكل (٦ـ١٠ ا) يمثل دالة فائض الطلب . وبافتراض ان $k<1$ فان الخط الغير مقطع يمثل $kE(p_{t-1})$



شكل (٦ـ١٠)

(١) اذا كانت $-1 < 1+k(a-A)$ (ولكنها اقل من صفر) فان سعة الذبذبه سوف تتناقص مع الزمن ، ويقترب مجرى الزمن من مستوى التوازن اما اذا كانت اقل من -1 فان السوق سوف يتعرض لتقلبات فى زيادة الاسعار .

ويمثل خط الـ 45 درجه فى الشكل (٦ــ١٠ب) المحل الهندسى للنقط المعرفـــه بالمعادله $p_t = p_{t-1}$. ونتحصل على الدالة التالية :

$$p_t = p_{t-1} + kE(p_{t-1}) = f(p_{t-1})$$

باضافة احداثيات الخطوط الغير مقطعه فى الشكلين (٦ــ١٠ ا) و(٦ــ١٠ب) وتكون النتيجه ظاهره فى الشكل (٦ــ١٠د) .

افترض ان السعر المبدئى هو p_0 فيكون السعر فى الفترة اللاحقه هو p_1 ويكون معطى باحداثيات النقطه على $f(p_{t-1})$ فوق p_0 راسا ومن اجل حساب السعر فى الفتـــرة اللاحقه فان p_1 سوف ينتقل (او يتحول) الى المحور الافقى برسم خط افقى من K الى L وتقع L على خط الـ 45 وتكون الاحداثيات السينيه لكل نقطه عليه تساوى الاحداثيات الصاديه . ونوجد السعر p_2 بالتحرك عموديا الى M على $f(p_{t-1})$ ونجد بقيه الاسعار بنفس الطريقة . وفى الوضع الراهن ، يقترب مستوى السعر من سعر التوازن المعطـى بتقاطع $f(p_{t-1})$ مع خط الـ 45 (1) ويعتمد استقرار التوازن على ميل دالة الطـــلب الفائض وحجم k. فاذا كانت دالة الطلب الفائض فى الشكل (٦ــ١٠ أ) بميل موجـب فان الداله $f(p_{t-1})$ سوف تقطع خط الـ 45 من اسفل ، وسوف يكون التوازن غير مستقر . اما اذا ميل دالة الطلب الفائض سالبا ، كما هو الحال فى الشكل (٦ــ١٠ أ) ولكـن k لم تكن كبيره بدرجه كافيه فان $f(p_{t-1})$ سوف يكون لها ميلا سالبا وسوف يتــذبذب مستوى السعر .

اما التقارب الحركى والساكن من الاستقرار عطيتان مختلفتان اختـــلافا اســاسيا فالاستقرار الساكن . لايعنى ضمنا الاستقرار الحركى بينما الاستقرار الحركى يعـــنى ضمنا الاستقرار الساكن . والسبب لهذا الاختلاف هو ان التحاليل الحركيه تكـون اداة اكثر شمولا للبحث والتقصى فى خواص التوازن بينما تهتم التحاليل الساكنه باتجاه عطيـــة التعديل وتهمل حجم عطية التعديل من فتره الى فتره زمنيه اخرى .

مثال : اعتبر

$$D_t = -0.5p_t + 100$$

$$S_t = -0.1p_t + 50$$

وافترض ان $k = 6$ فيكون التوازن مستقرا بالمعنى الفالراسى اذا كانت :

$D'(p) - S'(p) < 0$ وبالتعويض من دالتى العرض والطلب نجد ان :

$$-0.5 - (-0.1) = -0.4 < 0.$$

---

(1) من السهوله تحقيق ان نقطة N تكون هى نقطة التوازن . فعند N. $p_t = p_{t-1}$ بسبب خط الـ 45 وكذلك $p_t = p_{t-1} + kE(p_{t-1})$ وبتعويض p_{t-1} بدل p_t $p_{t-1} = p_{t-1} + kE(p_{t-1})$ او $kE(p_{t-1}) = 0$ وهذا يعنى ان فائـــض الطلب يساوى صفرا عند نقطة N .

ويتطلب الاستقرار الحركى أن تكون $-1 < 1 + k(a - A) < 1$ وبتعويض القيم المناسبه نحصل على :
$$1 + k(a - A) = -1.4$$
ونجد من هذا أن اللامتساويه المطلوبه (على الجانب الايسر) لاتتحقق · وسوف يبين السوق ذ بذ بات متفجرة explosive oscillations ·

الاستقرار الحركى : التعديل المتواصل :

Dynamic Stability: Continuous Adjustment

تصف المعادلة (٦ـ١٥) عملية تعديل السعر والتى تحدث خلال فترات زمنيه منفصله · ويعتمد البديل لهذه العمليه على الافتراض بان عملية التعديل تحدث باتصال · وبالتالى فان المعادله (٦ـ١٥) تبدل بالمعادله التاليه :

$$\frac{dp}{dt} = kE(p) \qquad (٦\text{ـ}٢١)$$

حيث ان k و $E(p)$ لهما نفس المعنى السابق [١] وبتعويض دالتى الطلب والعرض من المعادلتين (٦ـ١٦) و (٦ـ١٧) تصبح المعادله (٦ـ٢١) كالتالى :

$$\frac{dp}{dt} = k(a - A)p + k(b - B) \qquad (٦\text{ـ}٢٢)$$

وهى معادلة تفاضليه من الدرجه الاولى first-order differential equation وحلها يكون (انظر الجزء A-6) ·

$$p = (p_0 - p_e)e^{k(a-A)t} + p_e$$

وحيث ان p_0 يكون السعر المبدئى عند $t = 0$ وان $e = 2.71828\ldots$ تكون القاعده لنظام اللوغاريتمات الطبيعيه ·

ويكون سعر التوازن p_e مستقرا حركيا ،بمعنى ان $p \to p_e$ عند ما $t \to \infty$ اذا كان $(a - A) < 0$ والتى سوف تكون الحاله اذا كانت دالة الطلب بميل سالب وكانت دالة العرض بميل موجب · وسوف يؤثر حجم عامل عملية التعديل على سرعة التقارب اوالتباعد من التوازن ولكن وعلى عكس موديل التعديل المتخلف فانها لاتأخذ اى دور فى تقرير ما اذا كان التوازن مستقرا ام لا · وتكون شروط الاستقرار الساكن والحركى متطابقه فى هذه الحاله ·

وتكون نقطة التوازن " مستقرة محليا " *locally* stable اذا كان النظام يعود اليها اذا حدث وان كان هناك انحراف بسيط من التوازن وتكون" مستقره عالميا " *globally* stable اذا كان النظام يعود اليها بعد اى انحراف مبدئى من التوازن، فالموديلات

---

(١) لقد عرفنا قيمة p لجميع قيم t وأنه من المتعارف عليه ان نحذف t من واعتماد p على t قد يشار اليه بوضوح بكتابة $p(t)$ ·

الخطيه مثل تلك المعطاه بالمعادله (٦ــ٢٢) يكون لها نقاط توازن وحيدة (فريدة) عامةواذا كانت هذه النقاط مستقره عالميا ايضا • اما الموديلات الغير خطيه فقد يكون لها نقاط توازن وفى كل حاله فأن الاستقرار المحلى للتوازن لاى نقطةلا يضمن استقرارها عالميا •

ويكون من المفيد جدا استخدام التقريب الخطى linear approximation لتقرير الاستقرار المحلى للموديلات الغير خطيه • افترض ان دالة الطلب الفائض $E(p)$ تكون دالة مقعره للسعر p بحيث ان المعادله التفاضليه (٦ــ٢١) صعبه او مستيله الحل بالطريقة المباشرة • وتتبع المتساويه التقريبيه :

$$\frac{E(p) - E(p_e)}{p - p_e} \approx E'(p_e) \qquad (٦ــ٢٣)$$

حيث أن p_e هو سعر التوازن ، من تعريف الاشتقاق ففى النهايه كلما $p \to p_e$. فان المعادله (٦ــ٢٣) سوف تتحقق تماما وأنه لبعض الانحرافات للسعر p من السعر p_e فأن التقريب قد يكون جيدا وبتعويض $E(p_e) = 0,$ وبحل المعادله (٦ــ٢٣) لقيم $E(p)$ ثم بتعويض الناتج فى الجانب الايمن من المعادله (٦ــ٢١)

$$\frac{dp}{dt} = kE'(p_e)(p - p_e)$$

ويتكون هذه المعادلة معادلة خطيه حيث أن $E'(p_e)$ وهى اشتقاق الطلب الفائض الذى قيم عنده p_e تكون ثابته ويكون جزر root المعادلة المميزة characteristic equation وهو صالحا فى حدود جوار p_e هو $kE'(p_e)$ وبهذا اذا كانت دالة فائض الطلب بميل سالب فى جوار p_e فان التوازن يكون مستقرا محليا وتكون شروط الاستقرار الحركى والساكن متطابقه •

وفى الغالب فان وجود الاستقرار العالمى يتحقق بتطبيق الطريقه الفنيه او التقنيه المعروفه بطريقة ليابونوف المباشرة *Liapunov's direct method* •

وتتلخص الطريقه فى التالى :

أولا : اوجد دالة ليابونوف $V(p)$ بحيث ان $V(p) > 0$ اذا كان $p \neq p_e$ وان $V(p_e) = 0$ فاذا كانت dV/dt سالبه اين ماكانت $p \neq p_e$ فان كل التوازنى يكون مستقرا عالميا [١]

وتعطينا المعادلة التالية دالة ليابونوف التقريبيه •

$$V(p) = (p - p_e)^2$$

وهى تمثل مربع مسافة النقطة الفعليه p عند الوقت t من نقطة التوازن :

---

(١) ان معظم البحوث تميز بين الاستقرار واستقرار محور الاقتراب *asymptotic stability.* راجع كتاب J. La Salle and S. Lefschetz بعنوان : *Stability . . Liapunov's Direct Method* على الصفحات ٣٢ــ٣١ •

مثال : اعتبر دالة فائض الطلب الغير خطيه $E = b/p - a$ حيث ان $p_e = b/a$ وان $a, b > 0$ وان :

$$\frac{dp}{dt} = k\left(\frac{b}{p} - a\right)$$

وبتفاضل $V(p)$:

$$\frac{dV}{dt} = 2(p - p_e)\frac{dp}{dt}$$

وبالتعويض لقيم p_e و dp/dt :

$$\frac{dV}{dt} = -\frac{2k(ap - b)^2}{ap}$$

والتى تكون سالبه لجميع $p \neq p_e$ حيث أن $k, a, p > 0$ وعلى هذا فأن التوازن لهــــذا المثال يكون مستقرا عالميا ٠

٦ - ٩ التوازن الحركى مع التعديل المتخلف :

DYNAMIC EQUILIBRIUM WITH LAGGED ADJUSTMENT

تظهر دوال العرض للمنتجين كيف يقوموا بتعديل أنتاجهم حسب السعر السارى فى السـوق ٠

وبما ان الانتاج يحتاج لوقت فان عمليه التعديل قد لاتكون فوريه ولكنها قد تكون ملموسه فى السوق بعد فتره من الزمن ٠ وتمدنا السلع الزراعيه غالبا بامثله جيـــــده للعـرض المتخلف lagged supply فعاده يقوم المزارعون بعمل خطط الانتاج بعد عملية الحصاد ويظهر الناتج المقابل لهذه المخططات الانتاجيه فى السوق بعد سنه ٠

افترض ان دالتى الطلب والعرض هما :

$$D_t = ap_t + b \qquad (٦_٢٤)$$

$$S_t = Ap_{t-1} + B \qquad (٦_٢٥)$$

ويكون السوق فى توازن حركى اذا بقى السعر بدون تغيير من فتره لفتره اخرى بمعنى ان $p_t = p_{t-1}$ وتعطينا المعادلتين (٦_٢٤) و (٦_٢٥) سعر التــوازن الوحيـــد $p_e = (B - b)/(a - A)$ وتعتمد الكميه المطلوبه فى اى فتره زمنيه على السعر فى تلك الفتره ولكن الكميه المعروضه تعتمد على السعر فى الفتره السابقه ٠ ويفترض عادة بان الكميــه المعروضه فى الفتره t دائما تساوى الكميه المطلوبه فى نفس الفتره ، بمعنى ان p_t تتعدل بحيث ان $D_t = S_t$ حالما تظلها S_t فى السوق وهذا يتطلب بان لايترك اى منتـج بمخزون غير مبيوع وان لايترك اى مستهلك بطلب غير متحقق ٠ وبهذا فان :

$$D_t - S_t = 0$$

وبالتعويض من (٦_٢٤) و (٦_٢٥) :

$$ap_t + b - Ap_{t-1} - B = 0$$

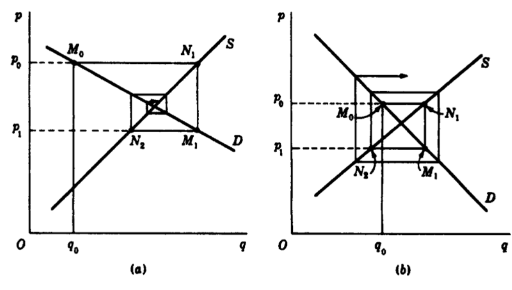
وبالحل لقيم p_t :

$$p_t = \frac{A}{a} p_{t-1} + \frac{B-b}{a} \qquad (٦_٢٦)$$

افترط أن الشرط المبدئي يكون معطاه بالمعادله $p = p_0$ عندما تكون $t = 0$ فيكون حل المعادله الفرقيه من الدرجه الاولى في (٦_٢٦) هو :

$$p_t = (p_0 - p_e)\left(\frac{A}{a}\right)^t + p_e \qquad (٦_٢٧)$$

ويصف حل المعادله (٦_٢٧) مجرى السعر بدلالة الزمن • وبعض مجاري الزمن هذه يوضحه الشكلين (٦_١١ أ) و (٦_١١ ب) •



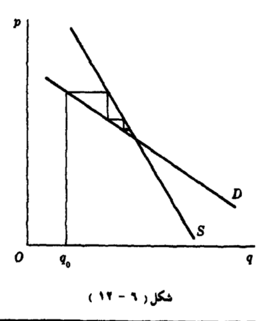
شكل (٦ - ١١)

افترض ان العرض المبدئي لا يساوي كمية التوازن نتيجة لاضطراب مثل القحط drought اعتبر ان كميه العرض المبدئي تساوي q_0 في الشكل (٦_١١ أ) فيكون السعر المقابل هو p_0 ويكون طلب المستهلك هو p_0M_0 وهذه الكميه تساوي كمية العرض المبدئي وان السعر p_0 سوف يغري أصحاب الوحدات الانتاجيه لعرض الكميه p_0N_1 في الفتره القادمه • ولكن السعر ينخفض فورا الى p_1 وتصبح الكميه المطلوبه هي p_1M_1 (والتي تساوي p_0N_1 وهي الكميه المعروضه في تلك الفتره) •ففي الفتره اللاحقه يكون السعر p_1 مغريا اصحاب الانتاج لانتاج p_1N_2. وتستمر هذه العمليه الى مالانهايه ، مكونه شكلا يشبه بيت العنكبوت cobweb pattern ولكن مستوى السعر سوف يتأرجح ولكنه سوف يقترب من مستوى التوازن كما هو موضح بتقاطع منحنى الطلب والعرض • وتعمل نفس القوى في الشكل (٦_١١ ب) ولكن تأرجح السعر في هذه الحاله يميل ألى الابتعاد عن مستوى التوازن ويصبح بمقدار أكبر فأكبر ، وبهذا يتعرض السوق لذبذبات متفجره •

ويكون السوق مستقر حركيا اذا كانت $p_t \to p_e$ كلما اقتربت $t \to \infty$ فاذا كانت القيمة المطلقه للمقدار (A/a) اقل من واحد فان الحد الاول في الجانب الايمن من المعادلة (٦ــ٢٧) سوف تختفي كلما $t \to \infty$. وسوف يكون السوق مستقرا حركيا • فاذا كان لميلى منحنى الطلب $(1/a)$ ومنحنى العرض $(1/A)$ اشارتين مختلفتين ، فان السعر سوف يتذ بذب حول مستوى سعر التوازن واذا كان لميل منحنى الطلب قيمه مطلقه اقل من ميل منحنى العرض $1/|a| < 1/|A|$ فان الذ بذ به سوف تنخفض سعتها ، وسوف يكون السوق مستقرا حركيا كما هو واضح من الشكل (٦ــ١١ ا) فاذا كان لميل منحنى الطلب قيمة مطلقه اكبر من القيمه المطلقه لميل منحنى العرض ، $1/|a| > 1/|A|$ فان الذ بذ بات سوف تزداد سعتها وسوف يكون السوق غير مستقرا كما هو واضح من الشكل (٦ــ١١ ب) •

واخيرا اذا كان ميلي منحنى الطلب والعرض متساويان بالنسبه للقيمه المطلقه $1/|a| = 1/|A|$ فان الذ بذ بات سوف تتساوى سعتها وتكون ثابته ، ويكون السوق غير مستقرا حركيا

فاذا كان منحنى الطلب والعرض يميلان في نفس الاتجاه A/a يكون موجبا ومستوى السعر لا يتذ بذ ب ، ولكن اما ان يزداد او يتناقص باستمرار[١] وتتحقق نفس الشروط كما سبق : السعر سوف يقترب من قيمته التوازنيه اذا كان لميل منحنى الطلب قيمه مطلقه اقل من القيمه المطلقه لميل منحنى العرض(الشكل ٦ــ١٢) وسوف يبتعد اما في اتجاه تصاعدى او في اتجاه تنازلى اذا كان لمنحنى الطلب ميلا اكبر من ميل منحنى العرض •



شكل (٦ - ١٢)

(١) وقد يبقى السعر ثابتا اذا انطبق منحنى الطلب على منحنى العرض • وسوف لا يكون هناك توازن فريد في مثل هذه الحاله • انظر الجزء ٦ــ٧ •

ان شروط الاستقرار الحركى ليست هى نفسها فى حاله الحركه البسيطه لان البائعين والمشتيرين سوف يكون لهم رد فعل فى حالة الحركه البسيطه ويكون فائض الطلب مساويا لصفر فى حالات اشكال بيوت العنكبوت • فالمشترين سوف يكون لهـم رد ود فعل للعروض المعطاه بالنسبه للاسعار المقدمه لهم • اما البائعون فان رد ود فعلهم للعروض المعطاة بالنسبه للاسعار المقدمه بالكميات التى سوف يعرضونها فى الفتره القادمه •

٦ - ١٠ سوق المستقبل : A FUTURES MARKET

لقد اقيمت اسواق المستقبل لبعض السلع التى يكون لها اسعار مستقبل غير مأكده uncertain future prices لان البائعين والمشترين قد اتفقوا على القيام بالاعمال التجاريه باسعار محدده فى وقت ما فى المستقبل • وعلى هذا فان سعر المستقبل لمثل هذه الصفقات التجاريه سوف يكون معروفا بالتاكيد •

ان اسواق المستقبل تكون شائعه ومعروفه للسلع الزراعيه • فالفلاح المتفادى للخطر والذى يبيع للتسليم المستقبلى يستطيع تفادى عدم تأكد السعر فالشخص الذى يشترى منتجات زراعيه بالتسليم فى المستقبل يستطيع التعاقد لبيع هذا المنتج ، اذا اعطى تكلفة ثابته للموارد الاوليه • فالاشخاص الذين يشترون ويبيعون لهذه الاسباب يقال عنهم انهم راهنوا ضد عدم تاكد السعر اما الاخرين الذين ليس لديهم رغبه مباشرة فى مثل هذه السلع قد يقومون بالبيع والشراء فى سوق المستقبل • فالمشترى (او البائع) قد يستطيع البيع (او الشراء) بسعر السوق الفعلى فى المستقبل من اجل تغطيه عقده • فمثل هذا الشخص سوف يشترك فى سوق المستقبل اذا استطاع زياده منفعته المتوقعه ببيع او شراء تذكره اليانصيب المقدمه فى السوق •

فالتوقعات المختلفه بالنسبه لسعر المستقبل قد تؤدى الى صفقات فى سوق المستقبل ونفترض هنا ان التوقعات تكون متساويه بمعنى ان كل شخص يتوقع ان يكون سعر المستقبل احد القيم الـ n التاليه $(p_1, \ldots, p_n)$ بالاحتمالات التاليه $(v_1, \ldots, v_n)$. فمن اجل تاكيد اهميه ان سوق المستقبل لا يتطلب اولئك المشتركون الذين يفضلون المخاطره ، لذلك نعطى مثالا بحيث ان جميع المشتركين من البائعين ومشترين يكونوا من النوع المتفادى للخطر ، ولكن ليس بنفس النسبه ، وجميعهم يتقيدون ببديهيات فون نيومان ومورتنستيرن (انظر الجزء ٣ـ٨) •

المراهن على جانبى الرهان لتفادى الخسارة Hedging

اعتبر ان الذى يقوم بانتاج السلعه المطلوبه فى هذه الحاله هو الفلاح واعتبر ان دالة التكلفه الخاصه به تكون $C(q)$ بحيث انها تكون محدبه بانضباط . وان دالة المنفعه له هى $(U(\pi))$ بحيث انها تكون مقعرة بانضباط فاذا كان هذا الفلاح يبيع فى سوق المستقبل بالسعر الجارى p^* فانه سوف يحصل على الحد الاعلى من المنفعه بمساواة هذا السعر p^* بتكلفته الحديه MC. فاذا لم يبيع فى سوق المستقبل ، فان شرط الدرجه الاولى للحصول على الحد الاعلى من المنفعه المتوقعه يكون (راجع المعادله ٥ــ٢١) .

$$\frac{dE[U(\pi)]}{dq} = \sum_{i=1}^{n} v_i U'(\pi_i)[p_i - C'(q)] = 0 \qquad (٦ــ٢٨)$$

افترض ان U_0 تكون قيمة المنفعه المثلى والمقرره بالمعادله (٦ــ٢٨) ، فيكون مستوى المنفعه للمشتركين فى سوق المستقبل هى :

$$U^* = U[p^*q^* - C(q^*)] = V(p^*)$$

حيث ان q^* تكون حل المعادله $p^* = C'(q^*)$ ومن الواضح ان $dU^*/dp^* > 0$ افترض ان p_0^* تكون حلا للمعادله $U_0 = V(p^*)$ فاذا كان $p^* < p_0^*$ فان الفلاح سوف لا يبيع فى سوق المستقبل اى انه يفضل السعر الغير مؤكد على السعر المؤكد المعطى له فى سوق المستقبل اما اذا كان $p^* > p_0^*$ فانه سوف يبيع جميع انتاجه كما تقرر بدالة MC الخاصه به وهو اذا يفضل السعر المؤكد المقدم له فى سوق المستقبل .

مثال : د ع : $U = \ln(\pi + 10)$ ود ع $C = 0.5q^2$ حيث ان : $p_1 = 4,\ p_2 = 8$

وان $v_1 = v_2 = 0.5$ فيكون الحل التقريبى للمعادله (٦ــ٢٨) هو $q_0 \approx 5.246$

وان $U^0 \approx 3.245$ وانه كذلك : $V(p_0^*) = \ln(0.5p_0^{*2} + 10) \approx 3.245$

فهذه المعادله يكون لها الحل الاتى $p_0^* \approx 5.598$ وتكون دالة العرض لسوق المستقبل بالنسبه للفلاح [1] هى :

$S = 0$ اذا كانت $p^* < 5.598$

$S = p^*$ اذا كانت $p^* > 5.598$

وسوف نترك تركيب دالة الطلب لسوق المستقبل بالنسبه لمن يقدمون العمليات توزيع المنتجات الزراعيه للقارئ (انظر تمرين ٦ــ١٣) .

---

(١) سوف يكون لكل دالة دالة عرض اجماليه لكل فلاح عدم اتصال حيث ان الناتج يقفز من 5.246 الى 5.598 عند السعر p_0^* .

افتراض المخاطرة : Risk Assumption

ان الشخص الذى لايتكون لديه الرغبه فى سلعة ما قد يشترى ويبيع فى سوق المستقبل لهذه السلعه اذا استطاع زياده منفعته • وسوف يتجنب تسلم او تسليم السلعه من خلال صفقات تعويضيه تكون عند وقت معين فى المستقبل فاذا افترضنا ان منفعته تكون بدلالة مكانة ممتلكاته ، $U = U(A)$ بحيث ان مكانة ممتلكاته البدائيه هى $U_0 = U(A_0)$ وافترض ان D تمثل فائض طلبه فى سوق المستقبل بحيث ان $D > 0$ تعنى انه سوف يشترى للتسليم فى المستقبل بسعر p^* وان $D < 0$ تعنى انه بائع ، وتكون منفعته المتوقعه هى :

$$E[U(A)] = \sum_{i=1}^{n} v_i U[A_0 + (p_i - p^*)D] \qquad (٦_٢٩)$$

ويكون شرط الدرجه الاولى للحصول على الحد الاعلى للمنفعه المتوقعه هو :

$$\frac{dE[U(A)]}{dD} = \sum_{i=1}^{n} v_i U'(A_i)(p_i - p^*) = 0 \qquad (٦_٣٠)$$

ويمكن الحصول على دالة فائض الطلب للمشتركين فى السوق بحل المعادله (٦_٣٠) لقيم $D = D(p^*)$ ضع p_0^* لتكون حلا للمعادله $D(p_0^*) = 0$ فاذا كانت $p^* > p_0^*$ فان المشترك سوف يبيع فى سوق المستقبل ، واذا كانت $p^* < p_0^*$ فانه سوف يشترى •

فعلى سبيل المثال ، اذا وضعنا $U(A) = \ln(A)$ فانه بالتعويض فى المعادله (٦_٣٠) نحصل على :

$$D = \frac{6 - p^*}{(8 - p^*)(p^* - 4)} A_0$$

ومن اجل القيم المعطاه $8 > p^* > 4$ فان المشتروات فى سوق المستقبل سوف تساوى نسبه معينه ثابته من قيمة ممتلكات المشترك فى السوق • افترض ان هذه النسبه لايمكن ان تزيد عن واحد ، والتى تحدث عند $p \approx 4.44$ افترض ، ايضا انه يوجد 10,000 مشترك مع كل واحد منهم $A_0 = 9056.25$ ويمثلون المشترون فى سوق المستقبل ، وانه يوجد ، ايضا 1000 فلاح ويمثلون البائعون وبمساواة الطلب الاجمالى بالعرض الاجمالى :

$$\frac{(6 - p^*)}{(8 - p^*)(p^* - 4)} 90,562.5 = 1000p^*$$

والتى يكون حلها هو :

$$q = 5750 \quad ، \quad p^* = 5.75$$

٦ - ١١ ملخص ما سبق : SUMMARY

تحلل نظرية المنافسه الكامله العوامل التى تقرر السعر والكميه فى الاسواق التى يكون فيها :

(١) الناتج متجانسا والمشترون متعادلون .

(٢) البائعون والمشترون متعددون .

(٣) البائعون والمشترون يمتلكون معلومات كامله .

(٤) حريه الدخول والخروج للبائع والمشترى على المدى الطويل . ويتصرف المشتركون فى السوق كما لو لم يكن لهم اى تاثير على السعر ويعتبر كل مشترك ان السعر متغيرا بقيمة ثابته بالنسبه له .

ان السعر والكميه المباعه والمشتراه تتقرر بالعرض والطلب. ونتحصل على دالة الطلب الاجمالى من دوال الطلب الفرديه والتى بدورها يمكن الحصول عليها من شروط الدرجه الاولى للفرد للحصول على الحد الاعلى من المنفعه . ونحصل على دالة العرض الاجمالى من دوال العرض الفرديه والتى اسست على شروط الدرجه الاولى للوحدات الانتاجيه الفرديه للحصول على الحد الاعلى من الربح . ونحصل على التوازن عندما الطلب يساوى العرض . ويضمن مساواة الطلب والعرض ان رغبات البائعين والمشترين تكون موحدة وعلى نمط واحد . ولقد وسعنا تحليل السوق التنافسيه الكامله لتضم ضرائب البيع.

وتشبه تحاليل اسواق العناصر التنافسيه الكامله لتحاليل اسواق السلع ويقرر الطلب والعرض خليط السعر والكميه فى حالة التوازن وتضمن مساواة العرض والطلب عدم تعارض رغبات البائع والمشترى . ونحصل على دالة الطلب لعنصر ما من شروط الدرجه الاولى للوحدات الانتاجيه الفرديه للحصول على عمليه الحد الاعلى من الربح . ونحصل على داله العرض للمواد الاوليه مثل العمل من شروط الدرجه الاولى لكل عامل بمفرده للحصول على الحد الاعلى من المنفعه . ويضمن التوازن فى سوق العناصر ان سعر هذه العناصر يساوى قيمه انتاجه الحدى MR .

انه ليس من الضرورى ان وجود دالتى العرض والطلب تتطلب تساويهما عند خليط او اكثر من السعر والكميه الغير سالبين . ولقد وسعنا مفهوم توازن السوق ليغطى حالتين بحيث ان العرض والطلب لا يتساويان . ولقد تميز توازن السلع المجانيه بفائض للعرض على الطلب عند سعر يساوى صفر . وتميز توازن انتاج لاشئ بزيادة سعر العرض على سعر الطلب لجميع المنتجات الغير سالبه . وانه من المحتمل وجود اكثر من خليط سعر وكميه فى حالة التوازن فى سوق ما . ولا يمكن وجود نقاط توازن عديده اذا كان الفرق بين ميلى

منحنى الطلب والعرض سالبه عند جميع الاسعار، او اذا كان الفرق موجبا عند جميع الاسعار ٠

لايضمن وجود نقطه التوازن الحصول عليها وبقائها ٠ وتهتم تحاليل استقرار التوازن بنتائج الاضطرابات ويكون التوازن مستقرا اذا اتبع الاضطراب عودة الى نقطه التوازن ويكون التوازن غير مستقر اذا لم يتبع الاضطراب عودة الى التوازن وتعتبر التحاليل الساكنه (الغير حركيه) للتوازن فقط ، اتجاه عمليه التعديل التى تتبع الاضطرابات بينما تعتبر التحاليل الحركيه للتوازن التوالى الزمنى لعملية التعديل بالاضافه الى اتجاهها ٠ ويعرض الموديل الحركى الخاص بعملية التعديل المختلفه سوقا مستقرا حسب التحاليل الساكنه ولكن قد يكون غير مستقرا حركيا ٠ ويغذى الموديل الحركى والمتميز بعمليةتعديل متواصله الموديل الساكن بوصف مجرى السعر خلال الفتره الزمنيه التى تتبع الاضطرابات٠ وتحتوى التحاليل الساكنه والحركيه على افتراضات بشأن سلوك المشترون والبائعون ٠وحسب افتراض شرط فالراس للاستقرار ، فان البائعن والمشترين سوف يكون لهم ردود فعل لفائض الطلب ٠

وتظهر بعض المسائل الحركيه الخاصه فى اسواق يكون فيها رد فعل العرض متاخرا ٠ وفى اسواق مثل هذه ، يفترض ان البائع والمشترى سوف يكون لهما رد فعل بالنسبه للسعر ٠ وسوف يتذبذب مجرى الزمن للسوق وينتج عنه ما يشبه بيت العنكبوت اذا كان لميل منحنى العرض والطلب اشارتان مختلفتان ، ويكون التوازن مستقرا اذا كانت القيمه المطلقه لميل منحنى الطلب اقل من القيمه المطلقه لميل منحنى العرض٠

ولقد وسعت تحاليل السوق التنافسيه لتغطى عقود مشتروات المستقبل وبيع السلع باسعار ثابته قد تختلف من سعر السوق عند ذلك الوقت ٠ وسوف يقوم كل مشترك ببيع او شراء كمية تساعده على الحصول على الحد الاعلى من المنفعه المتوقعه ٠ فالاشخاص الذين يراهنون على جانبى الرهان لتفادى الخساره سوف يستخدمون سوق المستقبل لتحويل سعر غير مؤكد مستقبلا الى سعر مؤكد ٠ واخرون يستخدمون سوق المستقبل لشراء تذاكر يانصيب التى تزيد من منفعتهم المتوقعه ٠

EXERCISES

6-1 Two hundred consumers derive utility from the consumption of two goods. Each has the utility function $U = 10q_1 + 5q_2 + q_1q_2$. Each has a fixed income of 100 dollars. Assume that the price of Q_2 is 4 dollars per unit. Express the aggregate demand for Q_1 as a function of p_1. Is the aggregate demand curve downward sloping?

6-2 Construct a short-run supply function for an entrepreneur whose short-run cost function is $C = 0.04q^3 - 0.8q^2 + 10q + 5$.

6-3 A good Q is produced using only one input X. The market for Q is supplied by 100 identical competitive firms each of which has the production function $q = x^\beta$ where $0 < \beta < 1$. Each firm behaves as if the price of X were constant. However, the industry as a whole faces an upward sloping supply curve for $X : r = b(100x)$ where $b > 0$. Derive the industry's long-run supply curve.

6-4 The long-run cost function for each firm that supplies Q is $C = q^3 - 4q^2 + 8q$. Firms will enter the industry if profits are positive and leave the industry if profits are negative. Describe the industry's long-run supply function. Assume that the corresponding demand function is $D = 2000 - 100p$. Determine equilibrium price, aggregate quantity, and number of firms.

6-5 Consider an industry with n identical firms in which the ith firm's total cost function is $C_i = aq_i^2 + bq_iq$ $(i = 1, \ldots, n)$, where $q = q_1 + q_2 + \cdots + q_n$. Derive the industry's supply function.

6-6 Construct an effective supply curve for an industry which has two sources of supply: domestic production with the supply curve $S = 20 + 8p$, and (2) an unlimited supply of imports at a fixed price of 20.

6-7 Determine equilibrium price and quantity for a market with the following demand and supply functions: $D = 20 - 2p$ and $S = 40 - 6p$. Assume that a specific tax of 1 dollar per unit is imposed. Compute the changes in equilibrium price and quantity.

6-8 Assume fifty firms supply commodity Q at location I and fifty at location II. The cost of producing output q_i for the ith firm (in either location) is $0.5q_i^2$. The cost of transporting the commodity to the market from location I is 6 dollars per unit and from location II, 10 dollars per unit. Determine the aggregate supply function.

6-9 A consumer allocates a fixed amount of time to labor and leisure. He derives satisfaction from the time he retains as leisure, L, and the income, y, that he secures by selling his labor at a fixed wage rate. His utility function is $U = Ly + aL$ where a is a positive parameter. Derive the consumer's supply function for labor. Is his labor supply curve upward sloping?

6-10 Assume that aggregate demand and supply functions are given by $D = 25/p$ and $S = \sqrt{5p}$. Is the dynamic process defined by (6-21) locally stable?

6-11 Determine whether equilibrium solutions exist for markets with the following demand and supply functions:

(*a*) $D = 12 - 3p$; $S = -10 + 2p$.
(*b*) $D = 16 - 2p$; $S = 20 - 2p$.
(*c*) $D = 50 - 4p$; $S = 10 + 10p - p^2$.
(*d*) $D = 50 - 4p$; $S = 2 + 10p - p^2$.

6-12 Consider the following markets which are characterized by lagged supply response:

(*a*) $D_t = 40 - 10p_t$; $S_t = 2 + 9p_{t-1}$.
(*b*) $D_t = 30 - 5p_t$; $S_t = 20 - p_{t-1}$.

Determine equilibrium price and quantity for each market. Assume an initial price 20 percent below the equilibrium price for each market, and determine the number of periods necessary for each price to adjust to within 1 percent of equilibrium.

6-13 A sugar refiner has a strictly concave production function for which labor and raw sugar cane are the only inputs. His production of refined sugar and purchase of inputs will take place next spring, but he must determine his future production level today. The future prices of refined sugar and labor are known with certainty, but the price of raw sugar will assume one of the values $(r_1, \ldots, r_n)$ with the respective probabilities $(v_1, \ldots, v_n)$. Show how you would determine his futures-market raw sugar demand.

SELECTED REFERENCES

Baumol, W. J.: *Economic Dynamics* (2d ed., New York: Macmillan, 1959). Chap. 7 contains a nonmathematical discussion of comparative statics, dynamics, and the cobweb theorem.

Boulding, K. W.: *Economic Analysis*: *Microeconomics* (4th ed., New York: Harper & Row, 1966), vol. I. The model of a perfectly competitive economy is developed in nonmathematical terms in pt. I.

Buchanan, N. S.: "A Reconsideration of the Cobweb Theorem," *Journal of Political Economy*, vol. 47 (February, 1939), pp. 67–81. An extension of the cobweb theorem with the use of geometry.

Ellis, H. S., and William Fellner: "External Economies and Diseconomies," *American Economic Review*, vol. 33 (September, 1943), pp. 493–511. Also reprinted in American Economic Association, *Readings in Price Theory* (Chicago: Irwin, 1952), pp. 242–263. A geometric elucidation of these concepts.

Knight, F. H.: *Risk, Uncertainty and Profit* (Boston: Houghton Mifflin, 1921). Also reprinted by the London School of Economics in 1937. A nonmathematical analysis of a perfectly competitive economy with emphasis on the effect of uncertainty on profits.

Marshall, Alfred: *Principles of Economics* (8th ed., London: Macmillan, 1920). Book V contains a nonmathematical analysis of supply and demand and the determination of market equilibrium.

Samuelson, Paul A.: *Foundations of Economic Analysis* (Cambridge, Mass.: Harvard University Press, 1948). Chap. IX contains a discussion of market stability. A knowledge of advanced calculus is necessary.

Schneider, Erich: *Pricing and Equilibrium* (London: William Hodge, 1952). Chap. 4 contains a discussion of equilibrium in a single perfectly competitive market in geometric terms.

Stigler, George J.: *The Theory of Price* (3d ed., New York: Macmillan, 1966). Theories of perfect competition are developed in chap. 10 without the use of mathematics.

الفصل السابع

الاحتكار واحتكار الشراء والتنافس الاحتكارى
MONOPOLY, MONOPSONY, AND MONOPOLISTIC COMPETITION

وحتى هذه النقطه من الكتاب ، كان الافتراض ان شروط المنافسه الكامله تسود جميع الاسواق • فكانت الوحده الانتاجيه الصناعيه التنافسيه الكامله تحتوى على عدد كبير من الوحدات الانتاجيه والتى تبيع انتاجا متجانسا • فكل انتاجيه تواجه منحنى طلب افقى وتقوم بعملية الحصول على الحد الاعلى من الربح باختيار مستوى انتاجى بحيث ان التكلفه الحديه MC تساوى سعر السوق •

والان ، نوجه الاهتمام الى اسواق يكون للوحدات الانتاجيه تاثير ملموس على السعر فالاحتكار هو عبارة عن حالة يحتوى فيها السوق على بائع واحد فقط ويكون منحنى طلب الاحتكارى هو نفس منحنى طلب السوق المقابل ، ولا يستطيع المحتكر ان يفترض ان السعر غير متاثرا باعماله وتصرفاته ، كما يجب ان يعرف (ماعدا فى الحاله النادره وهى حالة سلعة جيفون Giffen good ان السعر الذى يستلمه سوف يتحقق كلما اتسع انتاجه ، وبهذا يكون المحتكر واضعا للسعر بدلا من اخذ بالسعر •

وقد يكون للبائع والمشترى تاثير على السعر • ويصف احتكار الشراء السوق التى يكون فيها مشترى واحد فقط • ولا يكون المحتكر المشترى monopsonist اخذا بالسعر ، ولكنه يعرف ان السعر الذى يدفعه ، عامه سوف يزداد كلما زاد من مشترياته •

ان نظرية المنافسه الاحتكاريه تخلط عناصر من كلا من الاحتكار والمنافسه الكامله وتغطى وحدة انتاجيه صناعيه محتويه على عدد كبير من الوحدات التى تبيع منتجات متقاربه ولكنها متفاضله ، ويكون لكل وحده ، بالرغم من انها تكون صغيره بالنسبه للسوق كوحدة متكامله ، بعض التحكم فى السعر الذى تبيع به •

ولقد طورت نظريه الاحتكار التقليديه فى الجزء ٧ ــ ١ ثم وسعت لغطى تمييز السعر

price discrimination في الجزء ٧ ـ ٢ ثم طبقت على حالات خاصه في الجزء ٧ ـ ٣، ويكون موضوع الجزء ٧ ـ ٤ هو احتكار الشراء اما الجزء ٧ ـ ٥ فيصف المنافسه الاحتكاريه •

٧ - ١ الاحتكار : نظريات أساسية : MONOPOLY: BASIC THEORY

لايوجد تمييز بين الوحده الصناعيه والوحده الانتاجيه المفرده في السوق الاحتكاريه ، فتكون الوحده الانتاجيه الاحتكاريه هي الوحده الصناعيه لانه ليس لها منافس [1] يمتلك منحنى الطلب الفردى للمحتكر نفس المميزات العامه لمنحنى طلب الوحدة الصناعيه للسوق التنافسيه الكامله • ويكون هو اجمالى منحنيات الطلب للمستهلك كفرد ويفترض ان يكون بميل سالب وتكون كمية مبيعات المحتكر دالة ذات قيمة منفرده بالنسبه للسعر الذى يتقاضاه من المستهلك :

$$q = f(p) \qquad (٧ـ١)$$

حيث ان $dp/dq < 0$ ويفترض ان يكون لمنحنى الطلب معكوسا فريدا ومن الممكن وضع السعر كدالة ذات قيمة منفرده بالنسبه للكميه :

$$p = F(q) \qquad (٧ـ٢)$$

حيث ان $dq/dp < 0$ فاحد الفروق الرئيسيه بين المحتكر والمتنافس الكامل يكون في ان سعر المحتكر يتناقص كلما زادت مبيعاته ، بينما يتقبل المتنافس الكامل السعر كانه متغير بمقدار ثابت ويعمل على الحصول على الحد الاعلى من الربح بالنسبه للتغيرات في مستوى الانتاج ، وقد يعمل المحتكر على الحصول على الحد الاعلى من الربح بالنسبه للتغيرات في مستوى انتاجه او بالنسبه لمستوى سعره ، ولكنه لايستطيع ان يضع كلا مستقلا على حدة لان سعره (او مستوى انتاجه) يتقرر بطريقة وحيده عن طريق منحنى طلبه متى ماتم اختيار مستوى الانتاج (او السعر) وسوف يكون خليط السعر والكميه الذى يمكنه من الحصول على الحد الاعلى من الربح غير قابلا للتغيير بالنسبه لاختياره للمتغير المستقل independent variable •

معدل الإيرادات والإيرادات الحدية : Average and Marginal Revenue

ان اجمالى ايرادات المحتكر يكون السعر مضروبا في الكميه المباعه :

$$R = pq \qquad (٧ـ٣)$$

---

(١) وبمعنى اعم فان جميع المنتجات تتنافس على دخل المستهلك المحدود ويعرف التعبير احتكار الحاله التى يكون فيها وحدة انتاجيه واحده فقط تنتج سلعه لايكون لها بديل قريب وتكون اسعار السلع الاخرى كلها ثابته، كما هو دائما الحال في تحاليل السوق الواحدة وينعكس تنافس السلع الاخرى على الدخل المحدود للمستهلك في موقع وشكل منحنى الطلب الاحتكارى •

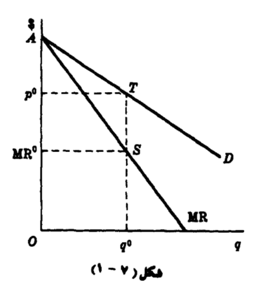
ويكون ايراده الحدى marginal revenue (MR) هو الاشتقاق للايـرادات الاجماليه بالنسبه لمستوى الانتاج • نبتفاضل (٧ـ٣) بالنسبه للمقدار q تحصل على :

$$MR = \frac{dR}{dq} = p + q\frac{dp}{dq} \qquad (٧ـ٤)$$

وبما ان $dp/dq < 0$ فان MR يكون اقل من السعر ، وتعرف(٧ـ٤) ايضـــا MR للمتنافس الكامل حيث ان MR يساوى السعر حيث ان $dp/dq = 0$: اما MR للمحتكر فانه يساوى السعر ناقصا معدل تغير السعر بالنسبه للكميه مضروبا فى الكميه • فاذا زاد المتنافس الكامل مبيعات بوحده واحده ، فان دخله سوف يزداد بقيمـــة السوق لهذه الوحده الاضافيه • اما المحتكر فانه لابد وان يخفض من سعره الذى يتقاضـــــاه من المستهلك لكل وحدة من اجل ان يبيع وحدة اضافيه •

ان الشكل(٧ـ١) يبين منحنيات MR ومنحنيات الطلب الخطى • فالطلب يكون متناقصا باضطراد ويكون MR اقل من السعر لكل انتاج اكبر من الصفر ويكون معـــدل التناقص فى MR ضعف معدل تناقص السعر :

$$p = a - bq \qquad R = aq - bq^2 \qquad MR = \frac{dR}{dq} = a - 2bq$$



شكل (٧ - ١)

وبما ان $dp/dq = -b$ يكون ثابتا ، فان المسافه بين المنحنيين : $[q(dp/dq) = -bq]$ تكون دالة خطيه بالنسبـــه للناتج ويساوى اجمالى الايرادات لخليـــط السعر والكميـــه (p^0, q^0) لمساحه المستطيل Op^0Tq^0 • وتساوى المساحه $OASq^0$ والتى تقـــع اسفل منحنى MR اجمالى الايرادات :

$$\int_0^q (a - 2bq)\, dq = aq - bq^2 = R$$

ويمكن تطبيق هذه النتيجه على منحنيات الطلب الغير خطيه • وعلى وجه العموم تكون:

$$\int_0^q \left(p + q\frac{dp}{dq}\right) dq = pq = R$$

حيث ان ثابت التكامل يساوى صفر • ويكون اجمالى الايرادات معطى بالمساحه التى تقع اسفل المنحنى MR •

وتعرف مرونه الطلب (e) عند نقطه ما على منحنى الطلب بانها القيمه المطلقه لمعدل التغير النسبى للناتج مقسوما على معدل التغير النسبى للسعر[١] :

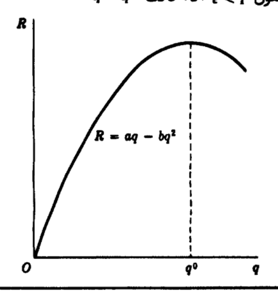
$$e = -\frac{d(\ln q)}{d(\ln p)} = -\frac{p}{q}\frac{dq}{dp} \qquad (٧_٥)$$

ويمكن التعبير عن MR كما اعطى بالمعادله (٧_٤) بالنسبه للسعر ومرونه الطلب على النحو التالى :

$$MR = p\left(1 + \frac{q}{p}\frac{dp}{dq}\right) = p\left(1 - \frac{1}{e}\right) \qquad (٧_٦)$$

ويكون MR موجبا اذا كان $e > 1$ ويكون صفرا اذا كان $e = 1$ ويكون سالبا اذا كان $e < 1$ ويتناقص الفرق بين MR والسعر كلما ازدادت مرونه الطلب ، ويقترب MR من السعر كلما اقتربت مرونه الطلب من لانهايه •

ان الشكل (٧_٢) يوضح منحنى اجمالى الايرادات المكافىء والمقابل لمنحنى الطلب الخطى فى الشكل (٧_١) ان الاشتقاق الاول لاجمالى الايرادات (وهو يساوى (MR)) يكون متناقصا باضطراد ويقترب من صفر عند مستوى الانتاج q^0 ويكون اجمالى الايرادات متزايدا وتكون $e > 1$ اذا كانت $q < q^0$ ويكون عند قيمته المثلى وتكون $e = 1$ اذا كانت $q = q^0$ ويكون منخفضا وتكون $e < 1$ اذا كانت $q > q^0$ •



شكل ٧ - ٢)

(١) وبما ان الانتباه قد ركز على منحنيات الطلب ذات الميل السالب ، فانه من السهل تعريف مرونه الطلب كعدد موجب وهذا بعكس ما جاء فى الجزء (٢_٣) حيث ان مرونات الطلب تاخذ اشارات ميل منحنيات الطلب التابعه لها •

الحد الأعلى من الربح : دالة التكلفة Profit Maximization: Cost Function

يمكن التعبير عن اجمالى ايرادات المحتكر وكذلك عن اجمالى التكلفه بدلالة الانتاج على النحو التالى :

$$R = R(q) \qquad C = C(q)$$

فيكون الربح مساويا للفرق بين اجمالى الايرادات واجمالى التكلفه :

$$\pi = R(q) - C(q) \qquad (٧_٧)$$

وللحصول على الربح الاعلى نضع اشتقاق (٧_٧) بالنسبه للمتغير q مساويا لصفر :

$$\frac{d\pi}{dq} = R'(q) - C'(q) = 0$$

او ان :

$$R'(q) = C'(q) \qquad (٧_٨)$$

وتوضح هذه المعادله ان MR يجب ان يساوى MC للحصول على الربح الاعلى ويستطيع المحتكر زيادة ربحه بالتوسع (او الانكماش) فى انتاجه ، مادام الاضافه الى ايراداتــه (وهى MR) تفوق (او اقل من) الاضافه الى تكلفته (وهى (MC) وبما ان (MR) يكون موجبا للناتج الذى يعطى الربح الاعلى ، فانه يتبع من (٧_٦) ان المحتكر سوف يختار دائما نقطه مرنه على منحنى طلبه ، بمعنى انه سوف يختار نقطه يكون عندهـــا $e > 1$ ولايوجد خطر مثل هذا على قيمه التوازن لـ e بالنسبه للسوق التنافسيه .

يتطلب شرط الدرجه الثانيه للربح الاعلى ان :

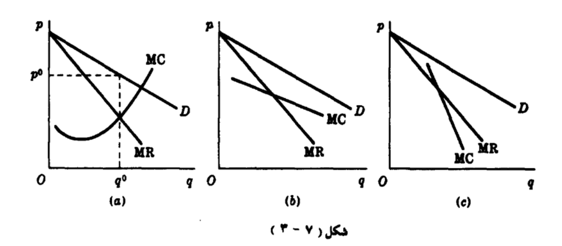
$$\frac{d^2\pi}{dq^2} = R''(q) - C''(q) < 0$$

او انه :

$$R''(q) < C''(q) \qquad (٧_٩)$$

وهذا يعنى ان معدل الزياده فـــى MR يجب ان تكون اقل من معدل الزياده فـــى MC ويكون شرط الدرجه الثانيه محققا مسبقا اذا كان MR فى حالة تناقص وكان MC فى حالة تزايد ، كما هو مفترض عامة . فاذا كان MC فى حالة تناقص فان (٧_٩) تتطلب ان يكون MR متناقصا بمعدل اكثر . فاذا تحقق شرطى الربح الاعلى لاكثر من مستوى انتاج واحد ، فان المستوى الذى يعطى اكبر ربح يكون المستوى الذى يمكن اختيـــاره بطريقه الفحص .

ويمكن تحقيق شرط الدرجه الاولى فى كل حاله من الحالات الثلاثه الموضحــــة بالشكل (٧_٣) فمساواة MR مع MC فى الحاله (١) يقرر الكميه q^0 والسعر p^0 فالمحتكر يستطيع ان يضع السعر p^0 ويسمح للمستهلك ان يشترى q^0 او انـــــه يستطيع تقديم q^0 للبيع ويسمح للمستهلك ان يقرر السعر p^0 ويتطلب شــــرط الدرجه



شكل (٧ - ٣)

الثانيه ان القيمة الجبريه لميل منحنى MC يفوق ميل منحنى MR اى ان منحنى MC يجب ان يقطع منحنى MR من الاسفل ويكون هذا الشرط محققا عند نقطتى التقاطــــع فى الحاله (ا) والحاله (ب) ولا يعطى MR = MC نقطه مثلى للربح فى الحاله (د) لان منحنى MC يقطع منحنى MR من الاعلى عند نقطة تقاطعهما الوحيده • ويمكـــن تحقيق شرط الدرجه الاولى ولكن لا يمكن تحقيق شرط الدرجه الثانيه •

اذا اتبع المحتكر قاعده التنافس الكامل وساوى بين MC والسعر ، فانه سوف ينتــج اكثر ويطلب سعرا اقــل وهذا بديهى من الشكل (٧ــ٣) فاحداثيات نقطه تقاطــــع منحنى MC ومنحنى الطلب تعطى سعرا اقل من p^0 وكمية اكبر من q^0.

<u>مثـــال</u> : اعتبر محتكرا ما يواجه منحنى طلب خطى :

$$p = 100 - 4q \qquad R = pq = 100q - 4q^2 \qquad (٧ـ١٠)$$

وينتج بتكلفه حديه ثابته مقدارها عشرون ريالا ، ويكون اجمالى تكلفته دالة خطيه بالنسبه لمستوى الانتاج :

$$C = 50 + 20q \qquad (٧ـ١١)$$

ويكون ربحه

$$\pi = (100q - 4q^2) - (50 + 20q)$$

وبوضع MR يساوى MC :

$$100 - 8q = 20$$

$$q = 10 \qquad p = 60 \qquad \pi = 350$$

وبهذا يكون قد تحقق شرط الدرجه الثانيه : ان معدل تغير MC ، (صفر) يفوق معدل تغير MR ، (8-) فلو ان المحتكر قرر ان يتبع قاعدة التنافس الكامل وضع السعر مساويا لـ MC :

$$100 - 4q = 20$$

$$q = 20 \qquad p = 20 \qquad \pi = -50$$

فسوف يبيع كمية اكبر بسعر اقل ويكسب ربحا اقل ، ففى هذا المثال ، يكون ربح المحتكر (وهو 350 ريال) قد انخفض الى 50 ريال ·

الحد الأعلى من الربح : دالة الإنتاج :

Profit Maximization: Production Function

ان تحاليل الاحتكار تكون عادة بدلالة دوال التكلفه ، ولكنه يوجد بعض حالات يكـــون مرغوبا فيها اعتبار دالة انتاج المحتكر ومشتروات المواد الاوليه بصوره واضحه · افترض ان محتكرا يستخدم داخلين input (ونسميها هنا المواد الاولى) مشترين مـــن اسواق تنافسيه لانتاج مايريد المحتكر انتاجه · فيكون ربحه :

$$\pi = R(q) - r_1x_1 - r_2x_2$$

وبوضع الاشتقاقات الجزئيه للربح بالنسبه للداخليه(المواد الاولى) مساويه لصفر :

$$\frac{\partial \pi}{\partial x_i} = R'(q)h_i - r_i = 0 \qquad i = 1, 2 \qquad (٧\text{—}١٢)$$

حيث ان $q = h(x_1, x_2)$ وان $h_i = \partial q/\partial x_i$ وباعادة ترتيب الحدود :

$$R'(q)h_i = r_i \qquad i = 1, 2$$

ويتطلب الربح الاعلى ان المحتكر يضع قيمة الايراد الحدى للناتج : *marginal-revenue product* لكل داخل مساويا لسعره · ففى حالة الاحتكار يكون الايراد الحدى **marginal product** مضروبا فى الانتاج الحدى **marginal product** مساويا لسعر الداخل ، بينما فى التناقص الكامل يكون سعر الناتج فى الانتاج الحدى مساويا لسعر الداخل ·

وتتطلب شروط الدرجه الثانيه للربح الاعلى ان :

$$\pi_{11} < 0 \qquad \pi_{22} < 0 \qquad \pi_{11}\pi_{22} - \pi_{12}^2 > 0 \qquad (٧\text{—}١٣)$$

حيث ان $\pi_{ij} = \partial^2\pi/\partial x_i\partial x_j$. وبتفاضل (٧ــ١٢) لمرات اخرى :

$$\pi_{ii} = R'(q)h_{ii} + R''(q)h_i^2 < 0 \qquad i = 1, 2$$

او باعادة ترتيب الحدود والتعويض من (٧ــ١٢)[1] :

$$R''(q) < -\frac{R'(q)h_{ii}}{h_i^2} = -\frac{r_ih_{ii}}{h_i^3} = C''(q) \qquad i = 1, 2 \qquad (٧\text{—}١٤)$$

---

(١) ضع $F(q, x_1, x_2) = q - h(x_1, x_2)$. وكذلك ضع $\frac{\partial x_i}{\partial q} = -\frac{F_q}{F_{x_i}} = -\frac{1}{h_i}$

وبتفاضل السابق مرة أخرى نحصل على : $\frac{\partial^2 x_i}{\partial q^2} = \frac{h_{ii}(\partial x_i/\partial q)}{h_i^2} = -\frac{h_{ii}}{h_i^3}$

ولقد أشتقت اللامتساويه الاخيرة فى (٧ــ١٤) باستخدام قاعدة الداله المركبـــه

$$C''(q) = \frac{\partial^2 C}{\partial x_i^2}\left(\frac{\partial x_i}{\partial q}\right)^2 + \frac{\partial C}{\partial x_i}\frac{\partial^2 x_i}{\partial q^2} = -\frac{r_ih_{ii}}{h_i^3}$$

ان معدل الزياده فى MC والعائد لتغير احد الداخلين يجب أن يفوق معـــدل الزيادة فى MR وتتطلب اللامتساويه الثالثه فى (٧ـ١٣) ان معدل الزيادة فى MC نتيجة لتغيير الدخلين معا يجب ان يفوق معدل الزيادة فى MR ·

وبما أن $R''(q)=0$ للمتنافس الكامل ، فان $C''(q)$ يجب ان يكون موجبا أو بمعنى مكافئا ان دالة الانتاج يجب أن تكون مقعرة بانضباط فى جوار نقطة التوازن · وبما ان $R''(q)$ يكون سالبا للمحتكر ، فأن $C''(q)$ قد يكون سالبا ، ايضا ولايزال يحقق (٧ـ١٤) وهكـذا يكون محتملا الحصول على توازن أحتكارى عند نقطة ما بحيث تكون عندها دالة الانتاج غير محدبه بانضباط ، اى انه عند نقطه يكون عندها $h_{ii}>0$ وان شرط التحدب المنضبـط لدالة الانتاج عند نقطة تتحقق عندها (٧ـ١٢) يكون شرط كفايه لتوازن احتكارى وليس شـــرطـا ضروريـا ·

٧ - ٢ الاحتكار : سعر تمييزى :
MONOPOLY: PRICE DISCRIMINATION

قد لايحتاج المحتكر دائما بيع جميع منتجاته فى سوق واحد بسعر موحد · ففى بعض الحالات يستطيع المحتكر زيادة ربحه بالبيع باكثر من سعر واحد · ونقدم هنا حالتيـــن تمثل ماقلناه · ففى الحاله الاولى يكون المحتكر قادرا على ان يضع سعرا مختلفا فى كل واحد من السوقين المحددين · اما فى الحالة الثانيه فانه قادر على ان يضع سلســـلة متواصله من الأسعار continuum of prices ·

التمييز فى الأسواق : Market Discrimination

اعتبر الحاله التى يبيع فيها المحتكر فى سوقين ويكون التساؤل عما أذا كان المحتـكر قادرا على طلب نفس السعر فى كلا السوقين ؟ ويمكن تحقيق التمييز فى الأسعار اذا كان البائع غير قادر على شراء مايرغب شراوءه فى سوق واحده ثم بيعه فى سوق اخر والا فـان الوسيط سوف يشترى فى سوق يكون فيها سعر واطيا ثم يبيع فى سوق يكون فيها السـعر عاليا بربح ، وعلى هذا فانه سوف يساوى بين الاسعار فى كل الاسواق ·

أن الخدمات الشخصيه تكون نادرا قابله للتنقل ، وان بيعها يعرضها عادة لتمييـز الاسعار · وأن أعادة البيع لسلع مثل الكهرباء ، والغاز ، والماء ، والتى تتطلـــب توصيلات فعليه بين منشات المنتج والمستهلك ، تكون صعبه جدا ويكون تمييز الاســعار متبعا بصوره شائعه فى وضع معدلات المنافع العامه ·ويكون تمييز الاسعار ممكنا عادةً فى حدود أسواق منفصله مثل الاسواق المحليه والاجنبيه بالنسبه للمحتكر الذى يبيـع خارج

بلاده ٠

ويمكن القضاء على اعادة البيع بوضع تعريفه عاليه جدا ٠ اذا مارى المحتكر تمييـــز الاسعار فى سوقين محددين ، فان ربحه سوف يكون الفرق بين اجمالى ايراداته من كلا السوقيه واجمالى تكلفة الانتاج :

$$\pi = R_1(q_1) + R_2(q_2) - C(q_1 + q_2) \qquad (٧\text{—}١٥)$$

حيث ان q_1 و q_2 يكونا الكميتين اللتين يبيعهما فى السوق ، وان $R_1(q_1)$ و $R_2(q_2)$ يكونا دالتى الايرادات ، وان $C(q_1 + q_2)$ تكون دالة تكلفتـــة وبوضع الاشتقاقات الجزئيه للمعادله (٧ـ١٥) مساويه لصفر :

$$\frac{\partial \pi}{\partial q_1} = R_1'(q_1) - C'(q_1 + q_2) = 0$$

$$\frac{\partial \pi}{\partial q_2} = R_2'(q_2) - C'(q_1 + q_2) = 0$$

او ان :

$$R_1'(q_1) = R_2'(q_2) = C'(q_1 + q_2)$$

فيكون الانتاج الحدى MR فى كل سوق مساويا للتكلفه الحديه MC لكل ناتج ككـــل٠ فلو ان الانتاجات الحديهMRsغير متساويه ، فان المحتكر يستطيع زيادة ايراداتهالاجماليه بدون التاثير على اجمالى التكلفه عن طريق تصريف البيع من السوق الذى يكون فيـه MR واطيا الى السوق الذى يكون فيهMRعاليه. ولايدل بالضرورة تساوى MRs مساواة الاسعار فى السوقين ٠ فاذا رمزنا للسعرين ومرونتى الطلب فى السوقين بالرموز p_1, p_2, e_1, e_2 وبالاستفاده من (٧ـ٦) فان مساواة MRs تتطلب :

$$p_1\left(1 - \frac{1}{e_1}\right) = p_2\left(1 - \frac{1}{e_2}\right)$$

وتتطلب كذلك :

$$\frac{p_1}{p_2} = \frac{1 - 1/e_2}{1 - 1/e_1}$$

فنجد ان السعر سوف يكون اوطى فى السوق ذى مرونه الطلب الاكبر ويكون السعرين متساويين فقط اذا كانت if and only if مرونتى الطلب متساويتين ٠

وتتطلب شروط الدرجه الثانيه ان تكون المحددات الاصغر فى المرتبه الرئيســـــيه principal minors, لمحددة هيسيان :

$$\begin{vmatrix} R_1'' - C'' & -C'' \\ -C'' & R_2'' - C'' \end{vmatrix}$$

متعاقبه فى الاشاره بحيث انها تبدا باشارة سالبه ٠ وبفك المحدده الى محددات اصغر فى المرتبه الرئيسيه :

$$R_1'' - C'' < 0 \qquad (R_1'' - C'')(R_2'' - C'') - (C'')^2 > 0$$

ويتطلب هؤلاء ان $R_2'' - C'' < 0$ ويكونMRفى كل سوق متزايدا بسرعة أقل منMCللناتج ككل ٠

مثال : أفترض ان المحتكر الذى له دالة طلب ودالة تكلفه معطاه بالمعادله (٧ـ١٠)

والمعادله (٧ــ١١) يكون قادرا على تمييز (فصل) المستهلكين لمنتجاته فى سوقين محددين : (١)

$$p_1 = 80 - 5q_1 \qquad R_1 = 80q_1 - 5q_1^2$$
$$p_2 = 180 - 20q_2 \qquad R_2 = 180q_2 - 20q_2^2$$
$$C = 50 + 20(q_1 + q_2)$$

وبوضع MR فى كل سوق يساوى MC للناتج ككل :

$$80 - 10q_1 = 20 \qquad 180 - 40q_2 = 20$$

وبالحل لقيمتى q_1 و q_2 وبالتعويض فى معادلات الطلب ، والربح والمرونه :

$$q_1 = 6 \qquad p_1 = 50 \qquad e_1 = 1.67$$
$$q_2 = 4 \qquad p_2 = 100 \qquad e_2 = 1.25$$
$$\pi = 450$$

وتكون شروط الدرجه الثانيه محققه :

$$-10 < 0 \qquad \begin{vmatrix} -10 & 0 \\ 0 & -40 \end{vmatrix} = 400 > 0$$

فبهذا يكون المحتكر قد استطاع زيادة ربحه من 350 ألى 450 ريالا من خلال عملية التمييز ، فيكون السعر منخفضا فى السوق ذات مرونه الطلب العاليه وبزيادة عملية التمييز يزداد ربح المحتكر اذا كان فى مقدوره تقسيم المستهلكين لعدد كبير من المجموعات بمرونات طلب مختلفه •

التمييز الكامل : Perfect Discrimination

أن كل نقطه على منحنى الطلب تعطى اعلى سعر منفرد يدفعه المستهلك ، عن طوع ورغبه ، للحصول على كمية السلع المقابله • وهناك بعض المستهلكين الراغبيه فى دفع سعر أعلى للحصول على هذه الكميه من السلع بدل التنازل عن أستهلاكها •وبهذا فانهم يكسبون فائضا يسمى فائض المستهلك consumers'surplus (راجع الجزء ٣ــ٧) من نظام السعر الواحد للتسهيل افترض ان نتائج الدخل income effects تكون صفرا بحيث ان منحنيات الطلب العاديه والتعويضيه تنطبق على بعضها (راجع الجزء ٢ــ٥).وعند ها

---

(١) أن منحنى الطلب الاجمالى للمحتكر سوف يبقى بدون تغيير • وبحل معادلتى الطلب لقيمتى q_1 و q_2 : $q_1 = 16 - 0.2p_1 \qquad q_2 = 9 - 0.05p_2$

ويكون اجمالى الطلب عند اى سعر (p) هو مجموع الطلبيات فى السوقين :

$$q = q_1 + q_2 = 16 - 0.2p + 9 - 0.05p = 25 - 0.25p$$

وبحل المسأله لقيمة p : $p = 100 - 4q$ وهى نفسها دالة الطلب المعطاه فى المعادله (٧ــ١٠).

يتساوى فائض المستهلك المساحه تحت الطلب ناقصا المقدار الذى دفعه المستهلك للسلعه ٠

ويستطيع المحتكر الذى يستخدم التمييز الكامل ان يقسم السوق لدرجة انه قادر على أن يبيع كل وحدة لاحقه من السلع التى ينتجها بالمقدار الاعلى الذى يدفعه المستهلك عن رغبة للحصول على هذه الوحده اللاحقه من السلع ٠ وبهذا يستخلص المحتكر جميع فائض المستهلك ويكون اجمالى آيراداته مساويا للمساحه تحت منحنى الطلب ويكون ربحه كالتالى :

$$\pi = \int_0^q F(q)\,dq - C(q)$$

ويوضع اشتقاق الربح بالنسبه للناتج مساويا لصفر :

$$\frac{d\pi}{dq} = F(q) - C'(q) = 0$$

ومن هذه المعادله نحصل على $F(q) = C'(q)$ وهذا يعنى أن المحتكر يتحصل على الربح الاعلى بمساواة السعر الحدى marginal price بالتكلفه الحديه وبشكل هندسى فان المحتكر الذى يقوم بالتمييز الكامل يعمل عند النقطه التى يتقاطع عندها منحنى MC مع منحنى الطلب ويكون شرط الدرجه الثانيه للربح الاعلى :

$$\frac{d^2\pi}{dq^2} = F'(q) - C''(q) < 0$$

والذى يتطلب بأن يكون ميل منحنى MC اكبر من ميل منحنى الطلب ٠

مثال : افترض وجود تمييزا كاملا للمثال المعطى بالمعادله (٧ـ١٠) والمعادله (٧ـ١١) ، فيكون الربح :

$$\pi = \int_0^q (100 - 4q)\,dq - (50 + 20q)$$

وبوضع السعر الحدى مساويا لـ MC :

$$100 - 4q = 20 \qquad q = 20 \qquad \pi = 750$$

ومن هنا نجد ان المحتكر الذى يستخدم التمييز الكامل ينتج اكثر من العشرة وحدات التى ينتجها المحتكر البسيط وأنه كذلك يحصل على ربح أعلى مما يحصل عليه المحتكر البسيط ٠ ونجد ايضا ان سعره الحدى يساوى 20 ، وأن معدل دخله لكل وحده مباعه يساوى 60 مقارنة بالسعر الموحد ومقداره 60 ريالا للمحتكر البسيط ٠

٧ - ٣ الاحتكار : تطبيقات : MONOPOLY: APPLICATIONS

انه من الممكن تكييف نظرية الاحتكار الاساسيه لتغطى حالات مختلفه ٠ ونعتبر هنا أربعة تطبيقات :

المحتكر صاحب المصانع المتعددة : The Multiple-Plant Monopolist

اعتبر المحتكر الذى يبيع فى سوق واحده ولكنه يستطيع انتاج سلعه فى مصنعين منفصلين فيكون ربحه عباره عن الفرق بين مجمل ايراداته وبين تكاليف الانتاج الاجماليه لكلا المصنعين :

$$\pi = R(q_1 + q_2) - C_1(q_1) - C_2(q_2) \qquad (٧_١٦)$$

حيث أن q_1 و q_2 هما الكميتان التى يقوم المحتكر بأنتاجهما فى مصنعه وان $R(q_1 + q_2)$ هى دالة ايراداته وان $C_1(q_1)$ و $C_2(q_2)$ هما دالتى تكلفته • وبوضع الاشتقاقات الجزئيه للمعادلة (٧_١٦) مساويه لصفر :

$$\frac{\partial \pi}{\partial q_1} = R'(q_1 + q_2) - C_1'(q_1) = 0$$

$$\frac{\partial \pi}{\partial q_2} = R'(q_1 + q_2) - C_2'(q_2) = 0$$

او ان :

$$R'(q_1 + q_2) = C_1'(q_1) = C_2'(q_2)$$

وبهذا يكون MC فى كل مصنع مساويا لـ MR للناتج ككل وتتطلب شروط الدرجه الثانيه أن تكون المحددات الاصغر فى الرتبه الرئيسيه لمحددة هيسيان :

$$\begin{vmatrix} R'' - C_1'' & R'' \\ R'' & R'' - C_2'' \end{vmatrix} \qquad (٧_١٧)$$

متعاقبه فى الاشارات بحيث انها تبدأ بالاشارة السالبه ويمكن للقارئ التحقق من أن (٧_١٧) تتطلب بان يكون MC فى كل مصنع متزايد بمعدل اسرع من MR للناتج ككل •

المحتكر صاحب المنتجات المتعددة : The Multiple-Product Monopolist

أعتبر أن احد منتجى السلع يتصرف كالمحتكر الذى ينتج سلعتين متميزتين ولكنهما متقاربتين بحيث أن دالتى الطلب هما :

$$q_1 = f_1(p_1, p_2) \qquad q_2 = f_2(p_1, p_2)$$

فاذا كانت الاشتقاقات المتقاطعه $\partial q_i / \partial p_j$, $(i \neq j)$ موجبه فأن المنتجات تكون تبادليه بالجمله gross substitutes. اما اذا كانت سالبه فان المنتجات تكون تكميليه بالجمله gross complements افترض وجود معكوس بقيمة منفرده لدالتى الطلب على النحو التالى :

$$p_1 = F_1(q_1, q_2) \qquad p_2 = F_2(q_1, q_2)$$

أن اشتقاقات المحتكر المتقاطعه الموجبه تمثل المنتجات المتكامله والاشتقاقات المتقاطعه السالبه تمثل المنتجات المتبادله وهذا يتبع من الافتراض بأن : $\partial q_i/\partial p_i < 0$

وأخيرا تعرف دالتى الايرادات :

$$R_1 = p_1 q_1 = R_1(q_1, q_2) \qquad R_2 = p_2 q_2 = R_2(q_1, q_2)$$

حيث أن $\partial R_i/\partial q_j$ $(i \neq j)$ تكون هنا موجبه للمنتجات المتكامله وسالبه للمنتجات المتبادله .

أن ربح المحتكر يكون :

$$\pi = R_1(q_1, q_2) + R_2(q_1, q_2) - C_1(q_1) - C_2(q_2)$$

وبوضع الاشتقاقات الجزئيه مساويه لصفر :

$$\frac{\partial \pi}{\partial q_1} = \frac{\partial R_1}{\partial q_1} + \frac{\partial R_2}{\partial q_1} - C_1'(q_1) = 0$$

$$\frac{\partial \pi}{\partial q_2} = \frac{\partial R_1}{\partial q_2} + \frac{\partial R_2}{\partial q_2} - C_2'(q_2) = 0$$

ومن هذه المعادلة نحصل على :

$$\frac{\partial R_1}{\partial q_1} + \frac{\partial R_2}{\partial q_1} = C_1'(q_1) \qquad \frac{\partial R_1}{\partial q_2} + \frac{\partial R_2}{\partial q_2} = C_2'(q_2) \qquad (٧\text{—}١٨)$$

وللمره الثانيه نجد أن المحتكر يساوى بين MR و MC ففى (٧ــ١٨) نجد ان MR ياخذ فى الاعتبار ، بوضوح ، تقارب الطلب [١] .

اعتبر الحاله التى تكون فيها المنتجات تبادليه حيث ان $\partial R_i/\partial q_j < 0$ وان $(i \neq j)$ وكمثلا لهذا اعتبر وضع مصنع العصير الذى ينتج عصيرا من الدرجه الاولى وعصيرا عاديا فالتكلفه الحديه MC للعصير سوف تكون اقل من الانتاج الحدى MR لذلك العصير الذى تميز عن العصير الاخر • فزياده انتاج عصير الدرجه الاولى يتم اذا خفض المحتكر من سعره وهذا بدوره ، سوف يسبب انخفاض فى مبيعات العصير العادى •

وتملى علينا شروط الدرجه الاولى (والمعطاه بالمعادلة(٧ــ١٨) سعرا غاضليا امثلا للعصيرين •

اما اذا كانت المنتجات تكامليه حيث ان $\partial R_i/\partial q_j > 0$ وان $(i \neq j)$ فان MC لكل منتج سوف يكون اعلى من MR لذلك المنتج الوحيد ، وكمثلا لهذا اعتبر ان احدى المنتجات هى شفر (امواس) الحلاقه وان المنتج الاخر هو ماكينة الحلاقه بمفردها بدون الامواس فاى توسع فى انتاج ماكينة الحلاقه من خلال تخفيض سعرها سوف يسبب توسعا فى

---

(١) وبهذا نفترض ان شروط الدرجه الثانيه قد تحققت الا اذا نص على غير ذلك•

الايرادات من الامواس بالسعر المعطى ، فقد يتطلب الحل الامثل بيع ماكينه الحلاقـــه بخساره بسبب تاثيرها المرضى على مبيعات الامواس الدارة للربح •

فرض الضرائب والإنتاج الاحتكارى : Taxation and Monopoly Output

ان ضريبة الجمله اوضريبة الربح (بمعدل حدى اقل من مائه فى المائه) ســـوف يخفض من الربح ، بعد الضريبه ، للمحتكر الذى يحصل على الربح الاعلى ، ولكـــن الضريبه سوف لا تؤثر على خليط السعر والكميه الامثل للمحتكر • فضريبة البيع سواءً فرضت على اساس الكميه المباعه او قيمة المبيعات ، سوف تخفض من ربح المحتكر ومـــن مستوى انتاجه وانها سوف تسبب فى رفع سعره •

لايستطيع المحتكر تفادى ضريبة الجملة فعليه دفعها بغض النظر عن الكميه المباعــه او قيمة مبيعاته او مقدار ربحه وبهذا يصبح ربحه :

$$\pi = R(q) - C(q) - T \quad (٧_١٩)$$

حيث ان T تكون مقدار ضريبه الجمله وتكون π ربحه بعد دفع الضريبه وبوضع اشتقاق (٧_١٩) مساويا لصفر :

$$\frac{d\pi}{dq} = R'(q) - C'(q) = 0 \quad \text{يتطلب} \quad R'(q) = C'(q)$$

وبما ان T ثابته ، فانها تختفى بعد القيام بعملية التفاضل ، وان مستوى الانتـــاج للمحتكر وسعره يقرران بمساواة MR مع MC كما لو كان الحال بدون ضريبة +

وتتطلب ضريبة الربح بان يدفع المحتكر للحكومه نسبة معينه من الفرق بين اجمـــالى ايراداته واجمالى تكلفته • فاذا كانت الضريبه بمعدل ثابت (نسبه ثابته) فان ربحه بعد دفع الضريبه يكون :

$$\pi = R(q) - C(q) - t[R(q) - C(q)] = (1-t)[R(q) - C(q)] \quad (٧_٢٠)$$

حيث ان $0 < t < 1$ وبوضع اشتقاق (٧_٢٠) مساويا لصفر :

$$\frac{d\pi}{dq} = (1-t)[R'(q) - C'(q)] = 0$$

وبما ان $1 - t \neq 0$ فان :

$$R'(q) - C'(q) = 0 \qquad R'(q) = C'(q)$$

وبما ان شرط الدرجه الاولى يكون كما فى (٧_٨) فان مستوى الانتاج والسعر لايتاثران. فالطريقه الوحيده التى يتفادى بها المحتكر دفع ضريبه الربح تكون بتخفيض ربحـــه قبل الضريبه • فاذا استطاع المحتكر الحفاظ على جزء من الزيادة فى ربحه قبل الضريبه، فانه سوف يحصل على ربح اعلى بعد الضريبه بمساواة MR مع MC

<u>مثـال</u> : اذا افترضنا ان ضريبة بيع محددة بمقدار α من الريالات لكل وحـــدهمن

وحدات الانتاج قد فرضتها الحكومه ، فان الربح يكون :

$$\pi = R(q) - C(q) - \alpha q$$

وبتفاضل الربح نحصل على :

$$\frac{d\pi}{dq} = R'(q) - C'(q) - \alpha = 0 \qquad R'(q) = C'(q) + \alpha \qquad (٧_٢١)$$

فيمكن للمحتكر ان يحصل على ربحه الاعلى بعد الضريبه بمساواة MR مع MC زائدا وحده الضريبه • وباخذ التفاضل الاجمالى للمعادله (٧_٢١) :

$$R''(q)\, dq = C''(q)\, dq + d\alpha$$

ومن هذه المعادله نحصل على :

$$\frac{dq}{d\alpha} = \frac{1}{R''(q) - C''(q)}$$

وبما ان

$R''(q) - C''(q) < 0$ بالافتراض الذى ينص على ان شرط الدرجه الثانيه قد تحقق ، فان $dq/d\alpha < 0$ وان مستوى الانتاج الامثل سوف ينخفض كلما ازداد معدل الضريبه_ وينتج عن فرض ضريبة بيع محدده بيع كميه صغيره من الانتاج بسعر عالى •

وبالعوده الى المثال المعطى بالمعادلتين (٧_١٠) و(٧_١١) وبافتراض ان الحكومه فرضت ضريبه بمقدار ٨ ريالات لكل وحده من انتاج المحتكر :

$$\pi = (100q - 4q^2) - (50 + 20q) - 8q$$

$$\frac{d\pi}{dq} = 72 - 8q = 0 \qquad q = 9 \qquad p = 64 \qquad \pi = 274$$

فنجد ان البيع انخفض بمعدل وحدة واحده ، وان السعر ارتفع بمقدار اربعة ريالات وان ربح المحتكر انخفض بمقدار ٧٦ ريالا نتيجة لفرض الضريبه • وان زيادة السعر كانت باقل زياده من ضريبه الوحده ، ولكن ربح المحتكر انخفض باكثر من الـ ٧٢ ريالا لايرادات الضريبه • فلو ان الحكومه فرضت على المحتكر مبلغا اجماليا وقدره ٧٢ريالا اقل مما سبق، وان المستهلك لايحتاج لدفع سعر اعلى للسلع • وكنتيجه لهذا فان البعض يحتج ويناقش بان فرق ضريبة الجمله يكون مفضلا على ضريبه البيع •

ان النتائج سوف تكون مشابهة لما سبق اذا كانت مقدار ضريبة البيع عبارة عن نسبه من قيمة المبيعات(وهى الايرادات الاجماليه) :

$$\pi = R(q) - C(q) - sR(q) = (1 - s)R(q) - C(q)$$

$$\frac{d\pi}{dq} = (1 - s)R'(q) - C'(q) = 0 \qquad (1 - s)R'(q) = C'(q) \qquad (٧_٢٢)$$

حيث ان $0 < s < 1$ ويمكن الحصول على الربح الاعلى بمساواة MC بذلك الجزء من

MR الذى سمح للمحتكر بقاوءه باخذ الاشتقاق الاجمالى للمعادله(٧ــ٢٢):

$$(1-s)R''(q)\,dq - R'(q)\,ds = C''(q)\,dq$$

$$\frac{dq}{ds} = \frac{R'(q)}{(1-s)R''(q) - C''(q)} \qquad (٧\text{ــ}٢٣)$$

وبما ان شرط الدرجه الاولى يتطلب بان يكون MR موجبا وان شرط الدرجه الثانيهيتطلب بان يكون مقام (٧ــ٢٣) سالبا ، فان $dq/ds < 0$.

ان فرض ضريبة قيمة على المبيعات ينتج عنها ، ايضا انخفاض فى مستوى الانتاج مع زيادة فى السعر ٠

المحتكر الذى يحصل على إيرادات عليا : The Revenue-Maximizing Monopolist

لقد اقترح البعض ان كثيرا من الوحدات الانتاجيه الكبير لاتعمل على الحصول على الربح الاعلى ، انما تعمل على الحصول على ايرادات البيع العليا تحت الشرط الذى ينص على ان الربح يساوى او يفوق مستوى ادنى مقبولا ٠ فالمحتكر يرغب فى الحصول على الحد الاعلى من $R(q)$ تحت شرط :

$$\pi = R(q) - C(q) \geqq \pi^0 \qquad (٧\text{ــ}٢٤)$$

حيث ان π^0 تكون الربح الادنى المقبول[1] ان دالة الايرادات تكون مقعره فاذا كانت دالة التكلفه محدبه ، فان دالة الربح سوف تكون مقعرة ، وتكون تحاليل كون ــ تكر مطبقه هنا على مسالة حصول المحتكر على الحد الاعلى ، وتكون دالة لاقرانج المناسبه هى:

$$L = R(q) + \lambda[R(q) - C(q) - \pi^0]$$

وتكون شروط كون ــ تكر كالتالى :

$$\frac{\partial L}{\partial q} = R'(q) + \lambda[R'(q) - C'(q)] \leqq 0 \qquad q \geqq 0 \qquad q\frac{\partial L}{\partial q} = 0$$

$$(٧\text{ــ}٢٥)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = R(q) - C(q) - \pi^0 \geqq 0 \qquad \lambda \geqq 0 \qquad \lambda\frac{\partial L}{\partial \lambda} = 0$$

افترض انه يوجد ربح اعلى وحيدا وغير مقيدا π^* عند النتائج q^* ، $R'(q^*) > 0$ وان $C''(q) > 0$ للقيم $q \geqq q^*$ وان $R''(q) < 0$ للقيم $q > 0$ فاذا كانت $\pi^0 > \pi^*$ فان دالة المعادله (٧ــ٢٤)لايمكن ان تتحقق وان مسالة الحصول على الحد الاعلى من الايرادات لايكون لها حل ٠ وسوف يوجد لها حل اذا كانت $\pi^0 \leqq \pi^*$ فاذا كانت $\pi^0 = \pi^*$

(١) راجع كتاب William J. Baumol, تحت عنوان *Business Behavior, Value and Growth* فى الباب السادس٠

فان q^* تكون الحد الاعلى للايرادات وبذلك تكون هى الحل حيث انها الناتج الوحيد الذى يحقق المعادله(٧ــ٢٤) اما اذا كانت $\pi^* > \pi^0$ فان الايرادات سوف تزداد وان الربح سوف ينخفض كلما ازدادت q عن q^* وبهذا فان المحتكر سوف يواصل زيادة q حتى انه اما :

(١) يصل الى الحد الاعلى الغير مقيد للايرادات $R(q)$. اوانه

(٢) المعادلة(٧ــ٢٤) قد تحققت كمتساويه ، حسبما يكون ايهما احدث عند الانتاج الاقل فاذا تحقق(١) فان المعادله(٧ــ٢٥) تنص على ان $R'(q) = 0$ وان $\lambda = 0$ اما اذا حدث وان كانت (٢) اقل من الناتج (١) فان $C'(q) > R'(q) > 0$ وان $\lambda > 0$ وتعطينا: λ (وهى مضروب لاقرانج) المعدل الذى يمكن عند التوسع فى الايرادات لكل ريال ضحى به من الربح •

مثال : اعتبر ، ثانيا المثال المعطى بالمعادلتين(٧ــ١٠) و(٧ــ١١)•
افترض ان $\pi^* = 350 > \pi^0 = 334$ فيكون الحد الاعلى الغير مقيد لـ $R(q)$ هو 625 والذى يتم عندما تكون $q = 12.5$ بربح $\pi = 325$ وهذا الاختبار يمكن ابعاده لانه يعطى ربحا منخفضا جدا • فمساواة(٧ــ٢٤) يكون :

$$(100q - 4q^2) - (50 + 20q) = 334$$

والذى يمكن كتابته على النحو التالى:

$$q^2 - 20q + 96 = 0$$

وهذه المعادله التربيعيه يكون لها الجزرين(٨) و(١٢) باجمالى الايرادين التاليين (٥٤٤) و(٦٢٤) بالترتيب وعلى هذا فان المحتكر الذى يعمل على الحصول على الحد الاعلى من ايراداته سوف ينتج (١٢) وحده وسوف يبيعها بسعر ٥٢ ريالا ليحصل على ايرادات اجماليه قدرها (٦٢٤) ريالا وربحا قدره(٣٣٤) وبالمقارنه فان المحتكر البسيط سوف ينتج (١٠) وحدات وسوف يبيعها بسعر (٦٠) ريالا ليحصل على ايرادات اجماليه قدرها (٦٠٠) ريالا وربحا قدره(٣٥٠) ريالا ومن(٧ــ٢٥)، نجد ان $\lambda = 0.25$ وعلى هذا فان صاحب الوحده الانتاجيه يضحى بمعدل حدى مقداره(٤) ريالات من الربح لكل ريال من الايرادات•

وقد يغير المحتكر الذى يعمل على الحصول على الحد الاعلى من ايراداته ، بعكس المحتكر البسيط من انتاجه اذا فرضت الحكومه الضرائب فاذا اعتبرنا الحاله التى يتقرر فيها انتاجه بمساواة المعادله(٧ــ٢٤) قبل وبعد فرض الضريبه وافترضنا ان الضريبه $0 < t < 1$ تكون جزءًا ثابتا من الربح ، فان مساواة(٧ــ٢٤) تصبح :

$$(1 - t)[R(q) - C(q)] = \pi^0 \qquad (٧ــ٢٦)$$

وباخذ التفاضل الاجمالى للمعادله(٧ــ٢٦) :

$$\frac{dq}{dt}=\frac{R(q)-C(q)}{(1-t)[R'(q)-C'(q)]}$$

وبما ان قيمة q التي تحقق (٧ـ٢٦) تكون اكبر من q^* فان $R'(q)-C'(q)$ وبما ان $R(q)-C(q)$ وان $1-t$ يكونا موجبين فان $dq/dt<0$ بمعنى ان اى زيادة فى معدل ضريبة الربح سوف تخفض الناتج الذى يؤدى الى تحقيق الحد الاعلى من الايرادات . فاذا تحقق ناتج الايرادات العليا الغير مقيده ربحا على الاقل بكبر المستوى الادنى المقبول قبل وبعد فرض الضريبه معا ، فان المحتكر سوف لا يغير هذا الانتاج .

٧ - ٤ احتكار المشترى : MONOPSONY

ان احتكار المشترى يشبه الاحتكار الى حد كبير معه عدة اوجه . فالسوق الاحتكارية يكون فيها بائع واحد فقط وعديد من المشترين المتنافسين بينما يكون فى السوق الاحتكارية من جانب المشترى monopsonistic market مشترى واحد فقط وعديد من البائعين المتنافسيين .

ان المحتكر المشترى monopsonist لا يستطيع شراء كميات غير محدوده من المواد الاوليه بسعر موحد ، فالسعر الذى يدفعه لكل كميه يشتريها تكون معطاه من منحنى العرض لسوق المواد الاوليه . وبما ان منحنيات العرض لمعظم المواد الاوليه يكون ميلها موجبا فيكون السعر الذى يدفعه المحتكر المشترى بدلالة تزايديه بالنسبه للكميه التى يشتريها .

فاذا اعتبرنا ، اولا الحاله التى يستخدم فيها المحتكر المشترى داخلا واحدا فقط والذى سوف نسميه العمل لانتاج السلعه التى سوف يبيعها فى سوق تنافسيه كاملة فاكمثال لهذا نعتبر حالة المنتج الذى يكون المشترى الوحيد فى سوق العمل المحليه ثم يبيع انتاجه فى سوق تنافسيه على الصعيد العالمى او على الصعيد القومى فتكون دالة انتاجه بدلالة كمية العمل $((x))$ الموظفه :

$$q=h(x) \qquad (٧ـ٢٧)$$

وتكون دالة الايرادات ودالة التكلفه كما كانت من قبل :

$$R=pq \qquad C=rx$$

حيث ان r تكون اجرة العمل price of labor ولكن اجرة العمل الان تكون بدلالة تزايديه بالنسبه للكميه الموظفة :

$$r=g(x) \qquad (٧ـ٢٨)$$

بحيث ان $dr/dx>0$ ان التكلفه الحديه للعمل marginal cost of labor تعرف بانها معدل

تغير تكلفة العمل بالنسبة للكميه الموظفه (١) :

$$\frac{dC}{dx} = r + xg'(x) \qquad (٧_٢٩)$$

وبما ان $g'(x) > 0$ فان التكلفه الحديه للعمل تفوق سعر للقيم $x > 0$ ويمكن التعبير عن ربح المحتكر المشترى بدلالة كمية العمل التى يقوم بتوظيفها :

$$\pi = R - C = ph(x) - rx \qquad (٧_٣٠)$$

وبوضع اشتقاق (٧_٣٠) بالنسبة لـ x مساويا لصفر :

$$\frac{d\pi}{dx} = ph'(x) - r - xg'(x) = 0$$

$$ph'(x) = r + xg'(x) \qquad (٧_٣١)$$

فنجد ان شرط الدرجه الاولى للربح الاعظم يتطلب ان يوظف جزءا من العمل حتى الوصول الى نقطة يتساوى عندها قيمة انتاجه الحدى مع قيمة تكلفته الحديه • اما شرط الدرجة الثانيه فانه يتطلب بان يكون معدل التغير لقيمة الانتاج الحدى للعمل اقل من معدل التغير لتكلفته الحديه :

$$\frac{d^2\pi}{dx^2} = ph''(x) - 2g'(x) - xg''(x) < 0$$

$$ph''(x) < 2g'(x) + xg''(x) \qquad (٧_٣٢)$$

فنجد ان الناتج الامثل لمحتكر الشراء وكذلك اجرة العمل يتقرران بحل المعادلة (٧_٣١) لقيم x ثم بالتعويض بالقيمه التى يتحقق عندها شرط الدرجه الثانيه فى المعادلتين (٧_٢٧) و(٧_٢٨) •

ان محتكر الشراء الذى يعمل على الحصول على الحد الاعلى من الربح (راجع الشكل ٧_٤) سوف يوظف x^0 وحدة عمل بمعدل اجر يساوى r^0 من الريالات•

ان المساواة بين اجرة العمل بقيمة انتاجها الحدى ، وهى نقطة التوازن لصاحب الوحده الانتاجيه الذى يشترى العمل الذى يحتاج من سوق تنافسيه كامله ، سوف ينتج عنه توظيف $x^{(1)}$ وحدة عمل بمعدل اجر يساوى $r^{(1)}$ فيكون محتكر الشراء فى وضع يجعله يوظف كميه اقل من العمال بمعدل اجر اقل •

<u>مثـال</u> : اذا كانت دالتا عرض العمل والانتاج لمحتكر شراء كالتالى :

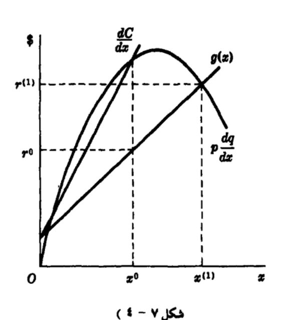
$$q = 15x^2 - 0.2x^3 \ , \qquad r = 144 + 23.4x$$

---

(١) يجب على القارىء ملاحظه ان التكلفه الحديه تكون معرفه هنا بالنسبه لكمية العمل الموظفه بدلا من كمية السلع المنتجه • فالشكل المختصر (MC) يكون معكوسا هنا بالنسبه للتكلفه الحديه بالنسبه لمستوى الناتج •

وكان المحتكر يبيع انتاجه فى سوق تنافسيه كامله بسعر ثلاثة ريالات، فان دالة الايرادات الاجماليه ومعادلة التكلفه :

$$R = 45x^2 - 0.6x^3 \qquad C = 144x + 23.4x^2$$



شكل ٧ - ٤)

وبوضع قيمة الانتاج الحدى للعمل مساويا لتكلفته الحديه :

$$90x - 1.8x^2 = 144 + 46.8x$$

ومنها نحصل على المعادلةالتربيعيه التاليه :

$$1.8x^2 - 43.2x + 144 = 0$$

وجزريها هما $x = 4$ و $x = 20$ ويكون شرط الدرجة الثانيه :

$$90 - 3.6x < 46.8$$

قد تحقق لقيمة $x = 20$ ويكون الحل $x = 4$ هو وضع الحد الادنى للربح وبتعويض $x = 20$ فى الدالات المناسبه نحصل على :

$$q = 4400 \qquad r = 612 \qquad \pi = 960$$

فلو كان محتكر الشراء ايضا محتكرا فى السوق التى يبيع فيها انتاجه ، فان السعر الذى سوف يحصل عليه يكون بدلالة الكمية التى يبيعها :

$$p = F(q)$$

وربحه قد يعبر عنه بدلالة كمية العمل التى يوظفها :

$$\pi = pq - rx = F[h(x)]h(x) - rx$$

او بعد التبسيط :

$$\pi = R(x) - C(x) \qquad (٣٣_٧)$$

حيث ان الايرادات الاجماليه والتكلفه الاجماليه قد وضعتا بدلالة كمية العمل الموظفه • وبوضع اشتقاق (٧ــ٣٣) يساوى لصفر ، نحصل على شرط الدرجه الاولى والذى يتطلب بان يكون معدل زيادة الايرادات الاجماليه من توظيف وحدة اخرى من العمل (وهذه هى الايرادات الحديه لانتاج العمل) مساويا لتكلفتها الحديه اما شرط الدرجه الثانية فانه يتطلب بان تزداد الايرادات الحديه لانتاج العمل بسرعة اكبر من تكلفتها الحديه •

٧ – ٥ التنافس الاحتكارى : MONOPOLISTIC COMPETITION

ان مفهوم فكرة التنافس الاحتكارى يحتوى على عناصر من كل من الاحتكار والمنافسة الكامله[١] فتكون الفكره قريبه من التنافس الكامل من حيث عدد البائعين لانه يوجد عدد كبير من البائعين لدرجة ان ما يقوم به البعض سوف لا يكون له اى اثر ملحوظ على منافسيه • وتكون الفكرة قريبة من الاحتكار لان كل بائع يمتلك منحنى طلب يميل سالب للناتج المميز الذى ينتجه •

فاذا افترضنا وجود منحنيات طلب خطيه ، فان سعر الذى يقبله كل بائع يكون بدلاله الكميات المباعه من كل من الـ n وحدة انتاجيه داخل الوحدة الصناعيه بحيث ان :

$$p_k = A_k - a_k q_k - \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{n} b_{ki} q_i \qquad k = 1, \ldots, n \qquad (٣٤_٧)$$

حيث ان $\partial p_k / \partial q_i = -b_{ki}$ يكون سالبا ولكنه يكون صغيرا عدديا ولتسهيل عمليه عرض المفاهيم ، افترض ان جميع الوحدات الانتاجيه تمتلك دوال تكلفه وطلب متطابقه ، اى ان $b_{ki} = b$ لجميع قيم k وجميع قيم i ماعدا $k = i$ وان $A_k = A, \ a_k = a$ وانه كذلك $C_k(q_k) = C(q_k)$ لجميع k افترض ايضا ان الكميات المبدئيه من خليط السعر والكميه متساويا لجميع الوحدات ، فانه تبعا لذلك يمكن ان نتكلم عن ممثل لجميع الوحدات • وكذلك تساوى جميع الوحدات فى دوال التكلفه والايرادات وكذلك فى سلوكهم للحصول على الحدود العليا سواء من الربح او الايرادات ، بالرغم من منتجاتهم تكون لها تفاضل بين المستهلكين ، وبهذا يكون منحنى الطلب الذى يواجه ممثل الوحدات :

$$p_k = A - a q_k - b \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{n} q_i \qquad (٣٥_٧)$$

ويكون ربح ممثل الوحدات :

---

(١) راجع كتاب Edward H. Chamberlin تحت عنوان *The Theory of Monopolistic Competition* •

$$\pi_k = q_k\left(A - aq_k - b\sum_{\substack{i=1\\i\neq k}}^{n} q_i\right) - C(q_k) \qquad (٧_٣٦)$$

وبما ان b تكون صغيرة عدديا ، وان تغير الكميه من جانب ممثل الوحدات سوف يؤثر على كل واحد من منافسيه الـ $(n-1)$ بنفس الدرجه ، فان تاثير ممثل الوحدات على سعر اى من منافسيه سوف يكون عديم الاهميه • وعلى هذا فان صاحب ممثل الوحدات يتصرف كما لو ان تصرفاته ليس لها اى تاثير على منافسيه وبمساواة MR مع MC التابع له على الافتراض القائل بان مستويات الانتاج لمنافسيه ستظل ثابته وغير متغيرة •

$$A - 2aq_k - b\sum_{\substack{i=1\\i\neq k}}^{n} q_i = C'(q_k) \qquad (٧_٣٧)$$

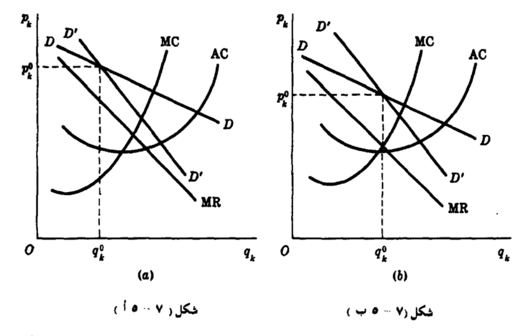
ويتطلب شرط الدرجه الثانيه بان يكون MC متزايدا بسرعه اكبر من MR. ويعتمد مستوى الانتاج الامثل للوحدة k. على مستوى الانتاج الاجمالى للمنافسين ويضمن افتراض التماثل انه اذا كان مربحا لممثل الوحدات ان يقوم بحركه معينه فانه يكون ايضا من المربح لبقية الوحدات ان تتبع بنفس الحركه •

وسوف تحاول جميع الوحدات بالحصول على الحد الاعلى من الربح فى نفس الوقت وسوف تكون التغيرات التى تطرأ على الكميه التى تنتجها الوحده k مصحوبه بتغيرات مماثله لها من جميع الوحدات الموجوده فى الوحده الصناعيه • وسوف لايتحرك ممثل الوحدات على منحنى الطلب (٧_٣٥) والذى بنى على الافتراض بان مستويات الانتاج للوحدات الاخرى تظل ثابته وغير متغيره ، سوف يبنى منحنى طلبه النافذ effective بتعويض $q_k = q_i$ فى المعادله (٧_٣٥):

$$p_k = A - [a + (n-1)b]q_k \qquad (٧_٣٨)$$

فالعدد $(n-1)$ من الوحدات عدد لايستهان به من ناحية اهميته القصوى لان زيادة واحد فى المائه فى مستوى انتاج احد المنافسين قد يسبب فى انخفاض p_k بنسبة 0.02 فى المائه ، ولكن فى نفس الوقت زيادة واحد فى المائه فى كل ١٠٠٠ وحدة انتاجيه قد يسبب فى انخفاض p_k بمقدار ٢٠ فى المائه او اكثر 20 ان منحنى الطلب النافذ effective demand curve فى المعادله (٧_٣٨)، والذى وضح الحركات المتماثله والتى حدثت فى نفس الوقت من جميع البائعين يكون بميلا اكثر انحدارا من (٧_٣٥)، وقد يتضح لصاحب ممثل الوحدات انه غير قادر للتحرك على منحنى طلبها الانفرادى ، ولكن هذه المعلومه غير مفيده بالنسبه له حيث انه ليس لديه اى تحكم فى مستوى انتاج منافسيه • اما الوحدات الاخرى فتستطيع تغيير مستويات انتاجها لانها تستطيع زيادة ارباحها ، ولان تصرفاتهم ليست محكومة بتصرفات ممثل الوحدات • فيجب على ممثل الوحدات اغتنام هذه الفرصه لزيادة ربحه والتصرف تماما كما تصرفت الوحدات الاخرى •

ان ممثل الوحدات ابتداءً من نقطة كمية وسعر مبدئيه سوف يواجه منحنى طلب منفصلين • ففى الشكل (٧ــ٥ ا) نجد ان DD يكون منحنى طلب لممثل الوحدات بالنسبه للتغيرات فى مستوى انتاجه فقط ، وان $D'D'$ يكون منحنى طلبه النافذ بالنسبه للتغيرات المماثله فى مستويات الانتاج لبقيه الوحدات الموجوده فى الوحده الصناعيه فهذين المنحنين يتقاطعان عند خليط الكميه والسعر المبدئى فكلما زادت جميع الوحدات مستويات انتاجها ، كان شكل وموقع المنحنى $D'D'$ والذى يكون بدلالة q_k فقط(انظر (٧ــ٣٦)) ثابتا وغير متغيرا ، وكان DD والذى يعتمد موقعه على انتاج جميع



شكل (٧ ـ ٥ أ) شكل (٧ ـ ٥ ب)

الوحدات (انظر (٧ــ٣٥)) ينساب عبر $D'D'$ قاطعة دائما عند نقطة مستوى الانتاج الحاليه لممثل الوحدات •

ان الوحده الصناعيه تصل الى التوازن عند يكون MR مساويا لـ MC لجميع الوحدات المتضمنه الوحده الصناعيه •فالمعادلات الـ n فى المعادله (٧ــ٣٧) يجب ان تحل لقيم الكميات المجهوله وعددها n ويمكن اثبات ان افتراض التماثل يضمن بان(٧ــ ٣٧) سوف ينتج عنه مساواة مستويات الانتاج لجميع الوحدات وعددها n ولذلك فانه يمكن الحصول على الحل بتعويض $q_k = q_l$ فى المعادله (٧ــ٣٧) ثم حل المعادله التاليه لقيم q_k [1] :

(١) هذا الحل لايكون مثل حل سوق محتكر القله • والذى فيه واحد من الافراد المحتكرين يعرف ان (٧ــ٢٨) هو منحنى الطلب المؤثر• فى هذه الحالة تكون MR هى $A - [2a + 2(n-1)b]q_k$ او اقل بـ $(n-1)bq_k$ ريالات عن كل مستوى خارج • ويكون المستوى الخارج ، والذى عنده تتساوى قيمتى MR ، MC ، اقل من الذى تم الحصول عليه من حل (٧ــ٣٩)•

$$A - [2a + (n-1)b]q_k = C'(q_k) \quad (٣٩_٧)$$

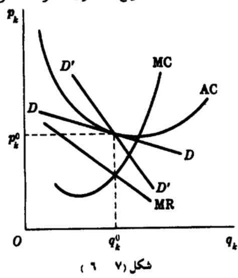
فالمعادله الاخيره تتضمن معادلة واحده بمجهول واحد ، ويكون الربح الاعلى وخليط السعر والكميه الامثل واحدا لجميع الوحدات • ان الشكل (٧ــ٥ ١) يعطى وصفـــا هندسيا للتوازن على المدى القصير بحيث ان MR يساوى MC وان DD يقطع $D'D'$ عند نقطة خليط السعر والكميه فى حالة التوازن •

ان ضريبه الدخول والخروج من السوق تدفع كمية الربح الصافى لتصبح صفرا فى وحـدة صناعيه تنافسيه كامله وقد يكون لـها نفس التاثير فى المنافسه الاحتكاريه • فيمكن التعبير عن ربح ممثل الوحدات بدلالة انتاجه وعدد الوحدات ضمن الوحده الصناعيه اذا عوضنـا عن $q_k = q_i$ فى المعادله (٧ــ٣٦):

$$\pi_k = Aq_k - [a + (n-1)b]q_k^2 - C(q_k) \quad (٤٠_٧)$$

وبوضع π_k تساوى صفرا فان (٧ــ٣٩) و(٧ــ٤٠) يكونان نظاما يحتوى عـلـى معادلتين بمجهولين q_k و n وبحل هذين المعادلتين نحصل على قيم التـوازن للمدى الطويل لمستوى الانتاج لممثل الوحدات وكذلك لعدد الوحدات •

ان موقع التوازن للمدى الطويل لممثل الوحدات يكون ممثلا فى الشكل (٧ــ٦) حيث ان وحدات جديده سوف تميل الى الدخول ضمن الوحدة الصناعيه اذا كان الربح الصافى لممثل الوحدات اكبر من صفر • فكلمـا ازداد عدد الوحدات ، كلما باع ممثل الوحدات مقدارا اقل من ناتجه باى سعر معطى ، وهــذا يعنى ان كلا من DD و $D'D'$ سوف يتزحزحا الى اليسار ويمكن الحصول على التوازن للمدى الطويل عند تساوى MR مع MC وعندما يكون DD ملامسا لمنحنى معدل التكلفه Ac (موضحا ان اجمالى الايـرادات يساوى اجمالى التكلفه وعلى هذا فان الربح يساوى صفرا) • وكذلك عندما تتقطـع نقطة التماس بـ $D'D'$ •



شكل (٧ــ٦)

ان نقطة التوازن للمدى الطويل لممثل الوحدات تكون الى يسار ادنى نقطة على منحنى ATC فهنا السعر يساوى معدل التكلفه ، كما هو حقيقة فى حالة ممثل الوحدات تحت وضع المنافسه الكامله ، ولكن السعر لا يساوى MC وبالمقارنه بنتائج المنافسة الكاملة نجد ان ممثل الوحدات ينتج انتاجا اقل عند معدل اجمالى تكلفة اكبر .

٧ - ٦ ملخص لما سبق SUMMARY

ان وحدة الانتاج الاحتكاريه تكون بنفسها وحده صناعيه ولا يؤثر عليها منافسة المضاربين لها ، فالمحتكر يكون حرا فى اختيار اى خليط سعر وكمية يقع على منحنى الطلب السالب الميل . وحيث ان اى توسع فى انتاجه يحدث عنه انخفاض فى السعر ، فان MR يكون اقل من سعره . ويتطلب شرط الدرجه الاولى للحصول على الحد الاعلى من الربح المساواة بين MR و MC بينما يتطلب شرط الدرجه الثانيه بان يكون MC متزايدا بسرعه اكبر من MR فعندما قدمنا دالة الانتاج بوضوح اكثر ، قام المحتكر لمحاولة الحصول على الربح الاعلى بمساواة الايرادات الحديه للناتج لكل داخل بسعرها.

فلو ان شروط الدرجه الثانيه قد تحققت ، فان المحتكر المميز سوف يحصل على ربح اعلى اذا ساوى بين MR فى كل سوق من الاسواق التى يتعامل معها ، وبين MC لانتاجه ككل فالمحتكر المميز الكامل يستطيع الحصول على كامل فائض المستهلك بالنسبه لانتاجه بمساواة سعره الحدى بتكلفته الحديه MC فالمحتكر الذى يكون له مصانع عدة يستطيع الحصول على الحد الاعلى من الربح بمساواة MC فى كل مصنع من مصانعه ب MR لانتاجه ككل . اما المحتكر الذى ينتج منتجات عدة فانه يساوى بين تكلفاتها الحديه MCs وبين انتاجاته الحديه MRs حيث ان انتاجاته متعدده فى هذه الحاله .

ولقد وجدنا انه لاضريبه القيمه ككل ولاضريبة الربح سوف يؤثران على خليط السعر والكميه الامثل للمحتكر الذى يعمل على الحصول على الحد الاعلى من الربح . ففرض اما ضريبة معينه او ضريبه قيمه سوف ينتج عنه انخفاض فى الانتاج وزيادة فى السعر .

اما المحتكر الذى يعمل على الحصول على الحد الاعلى من ايراداته فانه يحاول الحصول على ايرادات بيع ممكنه تحت شرط ان الربح لا يقل عن مستوى ادنى مقبول وقد ينتج عن فرض ضريبه ربح انخفاض فى الناتج وزيادة فى السعر.

اما المحتكر المشترى فانه يواجه منحنى طلب تصاعديا لاى داخل، فقد يكون هو المشترى الوحيد لنوع معين من العمل . فتكلفته الحديه للعمل تفوق معدل الاجر لانه لابد وان يزيد من معدل الاجر لجميع موظفيه من اجل التوسع فى التوظيف ولذا ، فان

شرط الدرجة الاولى للربح الاعلى يتطلب انه سوف يوظف عمالا للنقطه التى يتساوى عندها قيمة انتاجه الحدى بتكلفته الحديه • فاذا كان المحتكر المشترى هو نفسه محتكرا فى سوق الانتاج ، فان شرط الدرجه الاولى يتطلب بانه يساوى الايرادات الحديه لناتج العمل بتكلفته الحديه •

ففى المنافسه الاحتكاريه يكون للبائع المنفرد منحنى طلب بميل سالب لانتاجه المميز ولكن هذا الانتاج المميز يكون بمثابه جزء صغيرا جدا بالنسبه لاجمالى انتاج السوق ولهذا فان تصرفاته لايكون لها اى اثر ملحوظ على مضاربيه ولكن التحركات التى تحدث فى نفس الوقت من جميع البائعين تسبب تزحزحا فى منحنيات الطلب الفرديه • ويمكن الحصول على الوازن للمدى القصير عندما يساوى كل بائع MR مع MC وسوف يزداد عدد الوحدات او ينخفض بدرجه كافيه لجعل الربح الصافى لممثل الوحدات يساوى صفرا على المدى الطويل •

EXERCISES

7-1 Determine the maximum profit and the corresponding price and quantity for a monopolist whose demand and cost functions are $p = 20 - 0.5q$ and $C = 0.04q^3 - 1.94q^2 + 32.96q$ respectively.

7-2 A monopolist uses one input, X, which she purchases at the fixed price $r = 5$ to produce her output, Q. Her demand and production functions are $p = 85 - 3q$ and $q = 2\sqrt{x}$ respectively. Determine the values of p, q, and x at which the monopolist maximizes her profit.

7-3 Determine the maximum profit and the corresponding marginal price and quantity for a perfectly discriminating monopolist whose demand and cost functions are $p = 2200 - 60q$ and $C = 0.5q^3 - 61.5q^2 + 2740q$ respectively.

7-4 Let the demand and cost functions of a multiplant monopolist be $p = a - b(q_1 + q_2)$, $C_1 = \alpha_1 q_1 + \beta_1 q_1^2$, and $C_2 = \alpha_2 q_2 + \beta_2 q_2^2$ where all parameters are positive. Assume that an autonomous increase of demand increases the value of a, leaving the other parameters unchanged. Show that output will increase in both plants with a greater increase for the plant in which marginal cost is increasing less fast.

7-5 A revenue-maximizing monopolist requires a profit of at least 1500. Her demand and cost functions are $p = 304 - 2q$ and $C = 500 + 4q + 8q^2$. Determine her output level and price. Contrast these values with those that would be achieved under profit maximization.

7-6 Let the demand and cost functions of a monopolist be $p = 100 - 3q + 4\sqrt{A}$ and $C = 4q^2 + 10q + A$ where A is the level of her advertising expenditure. Find the values of A, q, and p that maximize profit.

7-7 A monopsonist uses only labor, X, to produce her output, Q, which she sells in a competitive market at the fixed price $p = 2$. Her production and labor supply functions are $q = 6x + 3x^2 - 0.02x^3$ and $r = 60 + 3x$ respectively. Determine the values of x, q, and r at which she maximizes her profit. Is the monopsonist's production function strictly concave in the neighborhood of her equilibrium production point?

7-8 Consider a market characterized by monopolistic competition. There are 101 firms with identical demand and cost functions:

$$p_k = 150 - q_k - 0.02 \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{101} q_i \qquad C_k = 0.5q_k^3 - 20q_k^2 + 270q_k \quad k = 1, \ldots, 101$$

Determine the maximum profit and the corresponding price and quantity for a representative firm. Assume that the number of firms in the industry does not change.

7-9 A monopolist will construct a single plant to serve two spatially separated markets in which she can charge different prices without fear of competition or resale between markets. The markets are 40 miles apart and are connected by a highway. The monopolist may locate her plant at either of the markets or at some point along the highway. Let z and $(40 - z)$ be the distances of her plant from markets 1 and 2 respectively. The monopolist's demand and production cost functions are not affected by her location:

$$p_1 = 100 - 2q_1 \qquad p_2 = 120 - 3q_2 \qquad C = 80(q_1 + q_2) - (q_1 + q_2)^2$$

Determine optimal values for q_1, q_2, p_1, p_2, and z if the monopolist's transport costs are $T = 0.4zq_1 + 0.5(40 - z)q_2$.

SELECTED REFERENCES

Chamberlin, E. H.: *The Theory of Monopolistic Competition* (8th ed., Cambridge, Mass: Harvard University Press, 1962). The first statement of the problems of monopolistic competition and product differentiation. Geometry is used.

Hadar, Josef: *Mathematical Theory of Economic Behavior* (Reading, Mass.: Addison-Wesley, 1971). The theories of monopoly, monopsony, and monopolistic competition are covered in chaps. 6–8. Intermediate mathematics and geometry are used.

Kuenne, Robert E. (ed.): *Monopolistic Competition Theory* (New York: Wiley, 1967). These essays in honor of E. H. Chamberlin cover many aspects of his theory. Most of the essays use little mathematics beyond geometry.

Robinson, Joan: *The Economics of Imperfect Competition* (London: Macmillan, 1933). A pioneer study of monopoly, price discrimination, and monopsony in which many modern concepts were developed. The analysis is generally limited to geometry.

الفصل الثامن

الاحتكار الثنائي ، واحتكار القلة ، واحتكار بين طرفين
DUOPOLY, OLIGOPOLY, AND BILATERAL MONOPOLY

ان انماط السوق التى نوقشت حتى الان تتميز بوجود اما بائع واحد فقط (وهى حالة الاحتكار) او بوجود عدد كبير جدا من البائعين(وهى حالتى المنافسة الكاملـــــه والمنافسه الاحتكاريه) ففى الحالة الاولى لايوجد للبائع المحتكر منافسا ولذلك فانـــه لايحتاج ان يهتم بنتائج تصرفاته على منافسيه اما فى الحالة الاخيره فان البائعين باعداد كبيرة بحيث ان تصرف اى بائع منهم سوف يكون لها تاثيرا غير ملحوظ على منافسيه .

اما السوق التى يوجد فيها عدد صغير من البائعين ولكنه اكثر من واحد قد تقدم لنا بعض المصاعب فالسوق التى يوجد فيها بائعين فقط تمثل حالة الاحتكار الثنائى للبيـــع *duopoly* والسوق التى يكون فيها عدد صغير ولكنه اكبر من اثنين من البائعين تمثل حالة احتكار القلة *oligopoly* فاذا اعتبرنا السوق الذى تكون فيه المنتجات متجانسه فان المنافسه بين المشترين سوف ينتج عنها سعر موحد لجميع البائعين لكل حجم كل واحد مـــن البائعين كبير بالنسبه للسوق لدرجة ان تصرفاته سوف يكون لها اثر ملحوظ على منافسيه . فتغيير الانتاج من قبل احد الباعه سوف يؤثر على السعر الذى يستلمه الجميع فنتائج مثل هذه المحاولات لتغيير السعر من قبل احد البائعين تكون غير مضمونه . فمنافسيه قـــد يتبعوا هذا التغيير . وقد لايتبعوه ولكنه لايستطيع افتراض انهم سوف لا يلاحظـــون هذا التغيير . فنتائج تحركات البائعين فقط فى حالة الاحتكار الثنائى او حركات القلـــه من البائعين فى حالة احتكار القلة سوف تعتمد على ردود فعل منافسيهم . ولذلك فانـــه لايمكن تعريف العلاقات العامه بين السعر والمبيعات للوحده الانتاجيه الواحده ، لان طبيعة ردود الفعل غير معروفه عامة . وحيث ان الوحده الانتاجيه بمفردها لاتملـــك التحكم فى جميع المتغيرات التى تؤثر على الربح ، فانه من غير المحتمل وجود عملية حصول على ربح اعلى غير مقيد . انه يوجد عدد كبير جدا من انماط واشكال ردود لاســـواق

البائعين المحتكرين وكذلك البائعين القله وكنتيجة لهذا فانه يوجد عدد كبير جدا من النظريات فى هذين الموضوعين • وسوف نناقش فى هذا الباب عدد قليل جدا من اشكال وانماط ردود الفعل المحتمله • ففى الجزء (٨ـ١) نستعرض نظريات معينه من الاحتكار الثنائى واحتكار القله والذين ينتجون سلعا متجانسه • اما الاحتكار الثنائى واحتكار القله والذين ينتجون سلعا متغاضله فانه نوقش فى الجزء (٨ـ٢) اما الذين يقومون بهذين النوعين من الاحتكار (هما : البائعين المحتكرين فقط Duopsony والمحتكرين القله oligopsony فقد نوقشت حالتيهما فى الجزء (٨ـ٣) باختصار • اما نظريات المقامرة theory of games وتطبيقاتها على الاسواق باعداد بسيطه من المشاركين فانهما يكونا موضوع الجزء (٨ـ٤) اما الجزء (٨ـ٥) فانه يضم بعض المفاهيم والافكار التى استعرضت فى هذا الباب وتطبيقها على حالات واحتكار الطرفين (بائع واحد ومشترى واحد) bilateral monopoly .

٨ - ١ الاحتكار الثنائى من احتكار القلة : الإنتاج المتجانس

DUOPOLY AND OLIGOPOLY: HOMOGENEOUS PRODUCT

ان الوحدة الصناعيه ذات الاحتكار الثنائى تحتوى على بائعين اثنين فقط ، اما الوحده الصناعيه ذات احتكار القله فانها تحتوى على عدد صغير كاف بحيث ان تصرفات اى بائع منفرد سوف يكون لها تاثير ملحوظا على مضاربيه انه ليس كافيا لتمييز احتكار القله من المنافسه الكامله لمنتجات متجانسه او من حالة البائعين العدة فى المنافسه الاحتكاريه لمنتجات متغاضله على اساس عدد الباعه فقط : فالسمة المميزة الهامه هى استقلاليه تصرفات البائعين المختلفه • فاذا كان تاثير قرار احد البائعين بتغيير كمية انتاجه على ربح الاخرين، $\partial\pi_i/\partial q_j$ تاثيرا طفيفا ، فان الوحده الصناعيه سوف تحقق المتطلبات الرئيسيه للمنافسه الكامله او لحالة تعدد البائعين فى المنافسه الاحتكاريه • فاذا كانت $\partial\pi_i/\partial q_j$ بحجم ملحوظ ، فان الحاله قد تكون حالة احتكار ثنائى او حالة احتكار القلة •

ان خليط السعر والكميه وربح الاحتكار الثنائى واحتكار القله سوف يعتمد ان على تصرفات جميع اعضاء السوق فالاحتكار الثنائى او احتكار القلة يستطيع التحكم فى مستوى انتاجه (او سعره ، اذا كانت منتجاته متغاضله) ولكنه ليس له تحكم مباشر على المتغيرات الاخرى التى تؤثر على ربحه فربح كل بائع يكون نتيجة لتداخل قرارات جميع اعضاء السوق • انه لايوجد افتراضات سلوكيه عامه مقبولة لحالتى احتكار القله والاحتكار الثنائى بعكس وجودها فى حالتى المنافسه الكامله والاحتكاريه ، ولكنه توجد حلول عديده مختلفه لسوقى احتكار القله والاحتكار الثنائى، وكل واحد من هذه الحلول يكون مبنيا على افتراضات سلوكيه مختلفه •

ففى هذا الجزء ، سوف نكون حلا مقابلا لشرط المساواة بين السعر وتكلفته الحديه MC فى حالة المنافسه الكامله ، ثم نقارن بالنتائج المناظرة لثلاثة حلول اسست على افتراضات سلوكيه معينه وكل واحد من هذه الحلول صمم لسوق الاحتكار الثنائى، ولكنه قد يصمم لسوق احتكار القله •

الحل الشبه تنافس The Quasi-competitive Solution

اعتبر السوق التى يوجد فيها وحدتين انتاجيتين يقوما بانتاج سلع متجانسه فمعكوس دالة الطلب تعطى السعر بدلالة الكميه الاجماليه المباعه :

$$p = F(q_1 + q_2) \qquad (١_٨)$$

حيث ان q_1 و q_2 يمثلان مستويى انتاج الاحتكار الثنائى ويعتمد اجمالى ايرادات كلا من المحتكرين على مستوى انتاجه ومستوى انتاجه المضارب له :

$$R_1 = q_1F(q_1 + q_2) = R_1(q_1, q_2)$$

$$R_2 = q_2F(q_1 + q_2) = R_2(q_1, q_2)$$

اما الربح فانه يساوى اجمالى الايرادات ناقصا التكلفه لكل محتكر والتى تعتمد على مستوى انتاجه هو فقط :

$$\pi_1 = R_1(q_1, q_2) - C_1(q_1)$$

$$\pi_2 = R_2(q_1, q_2) - C_2(q_2) \qquad (٢_٨)$$

يتميز حل المنافسه الكامله بالمساواة بين السعر و MC ويعرف الحل الشبه تنافس لسوق ما تحتويه على عدد بسيط من البائعين على انه الحل الذى سوف يتحقق اذا اتبع كل بائع القاعدة التنافسيه ، ونحصل عليه بحل المعادلتين التاليتين لقيم p، q_1 ، q_2.

$$p = F(q_1 + q_2) = C_1'(q_1)$$

$$p = F(q_1 + q_2) = C_2'(q_2) \qquad (٣_٨)$$

وقد يتحقق الحل الشبه التنافسى ، وقد لايتحقق ، فى اى سوق معينه ففى كلا الحالتين فانه يمدنا بمقياس (او نمط) نقارن به حلول حالات وجود عدد بسيط من البائعين • ومثل هذه المقارنات تكون مهمة جدا وخصوصا فى اقتصاديات الرفاهيه welfare economics (انظر الباب ١١)•

مثـال : افترض ان دوال التكلفه والطلب تكون كالتالى :

$$p = 100 - 0.5(q_1 + q_2) \qquad C_1 = 5q_1 \qquad C_2 = 0.5q_2^2 \qquad (٤_٨)$$

وبحل (٨_٣) بحالة هذا المثال وبالتعويض فى (٨_٢) نحصل على الحل الشبه تنافسى :

$$q_1 = 185 \qquad q_2 = 5 \qquad p = 5 \qquad \pi_1 = 0 \qquad \pi_2 = 12.5 \qquad (٨_٥)$$

وهذا الحل قد قورن بالحلول التى سوف تلى فى الاجزاء المتبقيه فى الباب •

حل التواطىء (أو التامر) The Collusion Solution

قد يتجلى للمحتكرين الثنائيين (او قلة المحتكرين) اعتماد كل منهما على الاخر فيقررا توحيد تصرفاتهما من اجل الحصول على الحد الاعلى من اجمالى ربح الوحده الانتاجيه وبهذا يكون مستويى الانتاج لكليهما تحت تحكم واحد وتكون الوحدة الانتاجيه فى الحقيقه ، احتكاريه • افترض ان :

$$R(q_1 + q_2) = R_1(q_1, q_2) + R_2(q_1, q_2) = (q_1 + q_2)F(q_1 + q_2)$$

وافترض ايضا ان اجمالى الربح يكون :

$$\pi = \pi_1 + \pi_2 = R(q_1 + q_2) - C_1(q_1) - C_2(q_2)$$

وهو نفس (٧ــ١٦) والذى يمثل دالة الربح للمحتكر صاحب المصنعين وعلى هذا فان شروط الدرجه الاولى تتطلب بان يكون MC لكل منتج مساويا لـ MR للناتج ككل •

اعتبر المثال المعطى بالمعادله(٨ــ٤) فيكون ربح الوحدة الصناعية كالتالى :

$$\pi = \pi_1 + \pi_2 = 100(q_1 + q_2) - 0.5(q_1 + q_2)^2 - 5q_1 - 0.5q_2^2$$

وبوضع اشتقاقات π الجزئيه مساويه لصفر :

$$\frac{\partial \pi}{\partial q_1} = 95 - q_1 - q_2 = 0 \qquad \frac{\partial \pi}{\partial q_2} = 100 - q_1 - 2q_2 = 0$$

وبحل لقيمتى q_1 ، q_2 ثم التعويض فى دالة الربح ودوال الطلب :

$$q_1 = 90 \qquad q_2 = 5 \qquad p = 52.5 \qquad \pi_1 = 4275 \qquad \pi_2 = 250 \qquad (٨_٦)$$

وبمقارنته بالحل الشبه تنافسى والمعطى بالمعادلة (٨ــ٥) نجد ان اجمالى الناتج اقل بكثير والسعر اعلى بكثير والربح اعلى بكثير ، ولكن التكلفات الحديه فى الوحدتين الانتاجيتين متساويه فى الحالتين ، ولكن هذه التكلفات الحديه الان تساوى MR للوحده الصناعيه بدلا من السعر • وتكون مستويات الربح للمعادله(٨ــ٦) هى تلك المعطاة بدوال الربح الفرديه • ويكون تقسيم الربح الاجمالى قابل للمفاوضة بين البائعين المحتكرين •

حل كورنوت The Cournot Solution

ان الحل التقليدى لمسألة الاحتكار الثنائى (او احتكار القلة) يلتصق دائما بالاسم اوقستين كورنوت Augustin Cournot الاقتصادى الفرنسى فى اوائل القرن التاسع عشر الميلادى • وكما فى السابق ، فانه يفترض ان وحدتى الانتاج تقوم بانتاج سلع

متجانسه • وينص الافتراض السلوكى الاساسى لحل كورنوت على ان كلا من المحتكرين (فى حالة الاحتكار الثنائى) يعمل على الحصول على الحد الاعلى من الربح بافتراض ان ـــ الكميه المنتجه من قبل مضاربيه غير قابله للتغير بالنسبه لقرار الكميه التى ينتجهـــا هو نفسه فالمحتكر الاول (ونعطيه الرمز I) يعمل على الحصول على الحد الاعلى من الربح π_1 بالنسبه لـ q_1 معاملا q_2 كثابت ، واما المحتكر الثانى (ونرمز لـــه بـ II) فانه يحاول الحصول على الربح الاعلى π_2 بالنسبه لـ q_2 معاملا q_1 كثابت •

وبوضع الاشتقاقات الجزئيه المناسبه للمعادله (٨ـ٢) تساوى صفرا :

$$\frac{\partial \pi_1}{dq_1} = \frac{\partial R_1}{\partial q_1} - \frac{dC_1}{dq_1} = 0 \qquad \frac{\partial R_1}{\partial q_1} = \frac{dC_1}{dq_1}$$

(٨ـ٧)

$$\frac{\partial \pi_2}{\partial q_2} = \frac{\partial R_2}{\partial q_2} - \frac{dC_2}{dq_2} = 0 \qquad \frac{\partial R_2}{\partial q_2} = \frac{dC_2}{dq_2}$$

ان شروط الدرجه الاولى تتطلب بان يساوى كل محتكر منهما MC بـ MR الخاصين به ، ويتطلب شرط الدرجه الثانيه لكل محتكر منهما انه : اما ان يكون :

$$\frac{\partial^2 \pi_i}{\partial q_i^2} = \frac{\partial^2 R_i}{\partial q_i^2} - \frac{d^2 C_i}{dq_i^2} < 0 \qquad i = 1, 2$$

او انه اما ان يكون :

(٨ـ٨)

$$\frac{\partial^2 R_i}{\partial q_i^2} < \frac{d^2 C_i}{dq_i^2} \qquad i = 1, 2$$

فكل محتكر منهما يجد ان انتاجه الحدى MR. يتزايد بسرعة اقل من تكلفته الحديـــه MC •

ان عملية الحصول على الربح الاعلى لحل كورنوت ليست هى نفسها فى حالة المحتكر صاحب المصنعين ، حيث ان الفرد الواحد يتحكم فى قيم كلا من مستويبى الانتاج • فهنا سوف يقوم كل محتكر ثنائى بالعمل للحصول على الربح الاعلى بالنسبه للمتغيـــر الوحيد تحت تصرفه • ويتبع هذا ان الانتاجات الحديه MRs للمحتكر الثنائى ليســت بالضرورة مستويه فاذا وضعنا $q = q_1 + q_2$ ووضعنا كذلك $\partial q/\partial q_1 = \partial q/\partial q_2 = 1$ فـــان MRs للمحتكر الثنائى تكون :

$$\frac{\partial R_i}{\partial q} = p + q_i \frac{dp}{dq} \qquad i = 1, 2$$

ومن هذا نجد ان المحتكر الثنائى الذى يمتلك انتاجا اكبر سوف يكون له MR اصغر •

ان سوق الاحتكار الثنائى يكون فى توازن اذا كانت قيمتى q_1 و q_2 بحيث ان كل محتكر ثنائى يعمل على الحصول على الربح الاعلى معطا انتاج الاخر وانه لايرغب فـــى تغيير انتاجه • ويمكن الحصول على حل التوازن بحل المعادلة (٨ـ٧) بقيمـــتى

q_1 و q_2 اذا تحققت المعادله (٨ـ٨) وتستطيع ان نصف طريقة عمل السوق بتوسع اكثر اذا قدمنا خطوة اضافيه مثل الحل لمستويات الانتاج التوازنيه • ونقرر دوال ردود الفعل • والتى تعبر عن انتاج كل محتكر ثنائى بدلالة انتاج مضاربه ، بحل المعادلــه الاولى من (٨ـ٧) لقيمة q_1 ثم حل المعادلة الثانيه لقيمة :

$$q_1 = \Psi_1(q_2) \qquad (٨\text{ـ}٩)$$
$$q_2 = \Psi_2(q_1)$$

فدالة رد فعل المحتكر الثنائى الاول (والذى رمزنا له ب I) تعطى العلاقـــة بيـن q_1 q_2 بالخاصيه التى تنص على ان لاى قيمه معينه لـ q_2 فان القيمة المقابلــه لـ q_1 سوف تمكنه من الحصول على الحد الاعلى من الربح π_1 . اما دالة رد فعل المحتكر الثنائى الثانى (والذى رمزنا له ب II) فانها تعطى قيمة q_2 التى تمكنه من الحصول على الحد الاعلى من الربح π_2 لاى قيمة معينه لـ q_1 فيكون حل التوازن عبارة عن زوج من القيم لـ $q_1^{\cdot}$ و q_2 والتى تحقق كلا من دوال رد الفعل •

مثـــــال : اذا كانت دوال التكلفه والطلب على النحو التالى :

$$p = A - B(q_1 + q_2) \qquad C_1 = a_1q_1 + b_1q_1^2 \qquad C_2 = a_2q_2 + b_2q_2^2$$

بحيث ان جميع المتغيرات بقيم ثابته تكون موجبه ، فان ربح كل واحد من الاحتكاريـــن يكون :

$$\pi_1 = Aq_1 - B(q_1 + q_2)q_1 - a_1q_1 - b_1q_1^2$$
$$\pi_2 = Aq_2 - B(q_1 + q_2)q_2 - a_2q_2 - b_2q_2^2$$

وبوضع الاشتقاقات الجزئيه المناسبه تساوى صفر :

$$\frac{\partial \pi_1}{\partial q_1} = A - B(2q_1 + q_2) - a_1 - 2b_1q_1 = 0$$

$$\frac{\partial \pi_2}{\partial q_2} = A - B(q_1 + 2q_2) - a_2 - 2b_2q_2 = 0$$

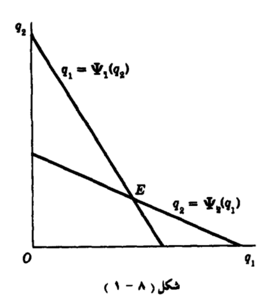
وتكون دالتى رد الفعل المقابلة :

$$q_1 = \frac{A - a_1}{2(B + b_1)} - \frac{B}{2(B + b_1)}q_2 \qquad q_2 = \frac{A - a_2}{2(B + b_2)} - \frac{B}{2(B + b_2)}q_1 \qquad (٨\text{ـ}١٠)$$

وبما ان B ، b_1 ، b_2 جميعا موجبين فان اى ارتفاع فى انتاج اى من المحتكريـــن الثنائيين سوف يسبب انخفاض فى الانتاج الامثل للمحتكر الثانى ويوضح الشكل (٨ـ١) دوال رد الفعل •• ومن هذا الشكل يتضح ان هذه الدوال تكون دوال خطيه ويعطينا حل المعادلة (٨ـ١٠) توازنا متمثلا فى نقطة تقاطع منحنى رد الفعل ، مثل نقطه E على الشكل (٨ـ١) ان حل (٨ـ١٠) يكون :

$$q_1 = \frac{2(B+b_2)(A-a_1) - B(A-a_2)}{4(B+b_1)(B+b_2) - B^2}$$

$$q_2 = \frac{2(B+b_1)(A-a_2) - B(A-a_1)}{4(B+b_1)(B+b_2) - B^2}$$



شكل (٨ - ١)

وتتحقق شروط الدرجه الثانيه بدوال الطلب الخطيه ودوال التكلفه التربيعية :

$$\frac{\partial^2 \pi_1}{\partial q_1^2} = -2(B+b_1) < 0 \qquad \frac{\partial^2 \pi_2}{\partial q_2^2} = -2(B+b_2) < 0$$

وبالعوده الى المثال الموضح فى المعادلة (٨ـ٤) يمكن للقارىء التحقق من ان دوال رد الفعل تكون :

$$q_1 = 95 - 0.5q_2 \qquad q_2 = 50 - 0.25q_1 \qquad (٨ـ١١)$$

وان حل التوازن يكون :

$$q_1 = 80 \qquad q_2 = 30 \qquad p = 45 \qquad \pi_1 = 3200 \qquad \pi_2 = 900$$

وبالمقارنه مع الحل الشبه تنافسى (٨ـ٥) نجد ان المحتكر الثنائى لكورنوت ينتج انتاجا اجماليا اصغر بسعر مرتفع وبربح اكثر • وبالمقارنه بحل التآمر (او التواطىء) (٨ـ٦) نجد انه يوضح انتاجا اجماليا اكبر بسعر اقل وبربح اقل، ويتبع من هذا انه باتفاق مناسب عن كيفية توزيع ربح الوحدة الصناعيه ، سوف يكون كلا من المحتكرين احسن وضعا فى حالة حل التواطىء عن حل كورنوت وان السهل اثبات ان حل التواطىء ليس هو الحل الوحيد الذى يفضل حل كورنوت فاذا قام على سبيل المثال، المحتكر الثنائى الاول I بانتاج 79 وحدة من q_1 والمحتكر II قام بانتاج 29 وحدة من q_2 (وحده واحدة اقل من حل كورنوت) فان ارباحهما على التوالى سوف يكونا : $\pi_1 = 3239$ $\pi_2 = 913.5$

وعلى هذا فانه بالرغم من ان حل كورنوت يكون حلا مثاليا لكل من المحتكرين بافتراض ان الاخر ينتج انتاجا توازنيا يوافق حل كورنوت ، فانه لايكون حلا مثاليا بالنسبه التغيرات المشتركه والتغيرات التى تم تنسيقها بين المحتكرين بالنسبه لمستويات الانتاج •

ان الافتراض السلوكى الرئيسى لحل كورنوت يكون عادة صناعيا وضعيا حيث ان كل محتكر بائع يتصرف كما لو ان انتاج خصمه محدودا ولكن هذا ليس هو واقع الحال لانه من اجل التوصل الى نقطة توازن فان المحتكرين البائعين سوف يقوموا بعمليات متتاليه من الانضباط والتغير (راجع التمرين ٩ــ٨)، بحيث ان احد البائعين المحتكرين يقرر كمية انتاجه وهذا سوف يدعو المحتكر الاخر الى تعديل وضبط انتاجه هو وبالتالى فأن المحتكر الاول سوف يقوم هو بدوره بتعديل أنتاجه نتيجة لتغيير المحتكر الثانى لأنتاجه وبالتالى فأن المحتكر الثانى سوف يقوم بتعديل أنتاجه كذلك وهكذا • فأنه ليس من المحتمل أن يفترض كلا منهما أن قرارات كمية الأنتاج لاتؤثر على قرارات كمية أنتاج خصمه اذا كان كل تعديل فى كمية الانتاج يتبعها فى الحال تعديل لكمية أنتاج الخصم •

فأذا كنا نفكر أن التوصل ألى التوازن للخصمين يكون فى نفس الوقت فأن كمية الأنتاج القصوى للمحتكر البائع الأول لاتمثل بالمعادله :
$q_1 = \Psi_1(q_2)$ وبالمثل للمحتكر البائع الثانى $q_1 = \Psi_1[\Psi_2(q_1)]$ ولكن تمثلها المعادله
لان كل واحد منهما يعرف تماما سلوك الاخر وتصرفاته وكبديل لهذا الافتراض فأننا نفترض أن كل واحد من المحتكرين البائعين سوف يقوم بالحصول على الربح الاقصى على أفتراض أن سعر خصمه سوف يظل بدون تغيير ولكن هذا غير منطقى بالنسبه لاى انتاج متجانس homogeneous product وعلى العموم فان المحتكرين البائعين والمحتكرين القلائل يعرفون تماما أنهم يعتمدون على بعضهم البعض •

وفى بعض الحالات فأن حل كورنوت يتطابق تماما مع الحل الشبه تنافسى وذلك كلما أزداد عدد الوحدات الأنتاجيه •

مثال : أفترض انه يوجد العدد n من الوحدات الانتاجيه بالمستويات الأنتاجيه التاليه $(q_1, q_2, \ldots, q_n)$ ثم أفترض أن معكوس دالة الطلب تكون معطاه بالمعادله التاليه $p = aq^b$ بحيث أن $q = q_1 + q_2 + \cdots + q_n$، وأن $a > 0$ وأن $-1 < b < 0$ وأذا أفترضنا ايضا ان جميع الوحدات الأنتاجيه موحده (لااختلاف بينها) بحيث ان تكلفة الوحده الأنتاجيه الواحده يكون معطاه بالمعادله $C_i = cq_i$ وأن $i = 1, \ldots, n$ وبذا فأنه أذا وحد انتاجا متجانسا وأن جميع الوحدات الانتاجيه لها نفس التكلفه فأن كل وحده أنتاجيه سوف تقوم بأنتاج المستوى $q_i = q/n$. وللحصول على حل كونوت فأننا نقوم بتفاضل المعادله التاليه

بالنسبه للمقدار q_i :

$$\pi_i = aq^b q_i - cq_i \qquad i = 1, 2, \ldots, n$$

وتصبح المعادله كالتالي :

$$\frac{\partial \pi_i}{\partial q_i} = aq^b + baq^{b-1}q_i - c = 0$$

وبتعويض $q = nq_i$، نحصل على :

$$q_i = \frac{c^{1/b}}{n^{(b-1)/b}(an + ab)^{1/b}} \qquad \text{وكذلك نحصل على} \qquad q = \frac{c^{1/b}}{(a + ab/n)^{1/b}}$$

ولكلما اقتربت n من $n \to \infty, q$ فان q تقترب من $(c/a)^{1/b}$
$q \to (c/a)^{1/b}$ وهذا هو الحل الشبه تنافسي والذى يمكن التأكد منه بحل المعادله $aq^b = c$ وفى هذه الحاله يكون $p = MC$ للحصول على q •

حل ستاكيل بيرج The Stackelberg Solution

أن ربح كل بائع محتكر ، عامه يكون بدلالة مستويات الانتاج للمحتكرين :

$$\pi_2 = h_2(q_1, q_2) \qquad \pi_1 = h_1(q_1, q_2) \qquad (١٢_٨)$$

فالحصول على حل كورنوت فاننا نحصل على الربح الاقصى من π_1 بالنسبه للكميه q_1 فافتراض أن q_2 ثابته ، ونحصل على الربح الاقصى من π_2 بالنسبه للكميه q_2 فأفتراض ان q_1 ثابته وقد يفترض كل بائع محتكر ، عامة بعض الافتراضات الاخرى عن خصمه واذا قمنا بتطبيق عملية الحصول على الربح الاقصى فان هذه العمليه التى يقوم بهما البائعين المحتكرين تتطلب الاتى :

$$\frac{\partial \pi_1}{\partial q_1} = \frac{\partial h_1}{\partial q_1} + \frac{\partial h_1}{\partial q_2}\frac{\partial q_2}{\partial q_1} = 0 \qquad (١٣_٨)$$

$$\frac{\partial \pi_2}{\partial q_2} = \frac{\partial h_2}{\partial q_2} + \frac{\partial h_2}{\partial q_1}\frac{\partial q_1}{\partial q_2} = 0$$

ويمثل التعبيرين $\partial q_2/\partial q_1$ $\partial q_1/\partial q_2$ التغيرات المتداخله التى يفترضها كلامن البائعين المحتكرين عن خصمه • وفى حالة ان كل بائع محتكر قد قام بأفتراض أفتراضات خاطئه عن خصمه فأن المعادلتين فى (٨_١٣) سوف لاتمثل أى تحسن ملحوظ فى موديل كورنوت•

ان من اهم افتراضات التغيرات المتداخله تلك الموجوده ضمن تحليل القيـــــادة والاتباع eadership and followershipanalysis والتى قام الاقتصادى الألمانى هنرك فـون ستاكيل بيرق بصياغتها وتركيبها فالتابع *follower* سوف يتقيد بدالة رد الفعل المعطاه بالمعادله (٨_٩) بحيث يقوم بتعديل مستوى أنتاجه للحصول على الحد الاقصى مـن

الربح واضعا فى تقديره كمية انتاج خصمه والتى تكون معروفه لديه والذى يعتبره كرائدا له • أما الرائد او القائد leader فأنه لايتقيد بدالة رد الفعل انما يفترض ان خصمه سوف يتصرف كانه تابع له وبذلك فأن الرائد سوف يحاول الحصول على الحد الاعلى من الربح واضعا فى اعتباره انه يعرف تماما دالة رد فعل خصمه والذى يعتبره كتابع له •

فاذا قررت الوحده الانتاجيه I ان تلعب دور الرائد فأنه يحتم عليها ان نفترض ان دالة رد فعل الوحده الانتاجيه II حقيق ومؤكد وسوف يقوم بتعويض هذه الداله ضمن دالة ربحه بحيث ان :

$$\pi_1 = h_1[q_1, \Psi(q_1)]$$

وبذا يصبح ربح الوحده الانتاجيه I بدلالة q_1 فقط ويمكن الحصول على حده الاقصى بالنسبه لهذا المتغير الواحد فقط • وتستطيع الوحده الانتاجيه II تقرير ربحها الاقصى من الرائد بافتراض ان الوحده الانتاجيه I تتقيد بدالة رد فعلها هى وأنها (أى الوحدة الانتاجيه I) تتصرف كأنها تابعه ونتحصل على الربح الاقصى للوحده الانتاجيه I من التابع بتعويض المستوى الاقصى لانتاج الوحده الانتاجيه II فى دالة رد فعل الوحده الانتاجيه I ونتحصل على الحد الاقصى لربح II من التابع بتعويض المستوى الأقصى للوحده الانتاجيه I فى دالة رد فعل الوحده الانتاجيه II •

فكل واحد من البائعين المحتكرين يقرر مستوى ربحه الاقصى من وجهة النظر على انه تابع ورائد وانه يرغب فى أن يلعب الدور الذى يدر عليه الكميه القصوى من الربح ،وبهذا فأنه يكون هناك احتمالات أربعه للانتاج :

(١) ترغب الوحده الانتاجيه I فى أن تكون هى الرائده وأن تكون الوحده الانتاجيه II هى التابعه •

(٢) II ترغب فى ان تكون هى الرائده و I هى التابعه •

(٣) الاثنان يرغبان فى ان يكونا الرائد أو أن

(٤) أن الاثنان يرغبان فى أن يكونا التابع •

وبهذا فان الناتج (١) سوف ينتج عنه تصرفات متناسقه وسوف يتقرر من خلاله الحصول على توازن محدد [(١)] حيث أن I يفترض ان II سوف يتصرف كتابع له ،وأنه سوف يفعل هذا بالتأكيد ، وأن II سوف يفترض ايضا وان I سوف يتصرف كرائد وأنه سوف يفضل هذا بالتأكيد • وبالمثل فان (٢) سوف ينتج عنه توازن محدد • أما فى حالة أن كلاهما يرغب فى أن يكون تابعا فان توقعاتهما سوف لاتتحقق ، لان كل واحد منهما يفترض أن

---

(١) فى هذه الحاله يتحقق شرطى الحد الاقصى الاول والثانى •

الاخر سوف يتصرف كرائد وعلى هذا فان عليهما ان يعدلا من توقعاتهما فنجدانه تحت افتراضات ستاكيل بيرق . فان حل كورنوت سوف يتحقق أذا رغب كل واحد منهما فى ان يتصرف كتابع واضعا فى اعتباره أن خصمه سوف يتصرف كتابع أيضا ، وألا فأن أحدهمـــا لابد وأن يغير من سلوكه ويتصرف كرائد قبل التوصل ألى التوازن .

اما أذا رغب كل واحد منهما أن يتصرف كرائد ، فأن كل واحد منهما سوف يفتــرض ان دالة رد الفعل سوف تتحكم فى تصرفاته ولكن فى الحقيقة،سوف لايتبع أى واحد منهما دالة رد فعله وبهـذا نواجه حالة عدم توازن لمسأله ستاكيل بيرق ، ولقد أعتقد ستاكيـل بيرق أن حالة عدم التوازن هذه هى التى تحدث فى أغلب الأحيان وأن النتيجةالنهائيه لعدم التوازن هذا لايمكن التنبوء بها مسبقا فلو كان ستاكيل بيرق محقا فأن هذهالحاله سوف ينتج عنها حالة حرب أقتصاديه ولا يمكن تحقيق التوازن الااذا خضع أحد المحتكرين لقيادة خصمه او أتفاقا حصل بينهما .

مثال : بالعوده الى المثال المعطى بالمعادلة (٨ـ٤) فأننا نحصل على الربـــح الاقصى للوحده الانتاجيه الرائده I بتعويض دالة رد الفعل للواحده II والمعطــى بالمعادلة (٨ـ١١) فى معادلة ربح الوحده I :

$$\pi_1 = 100q_1 - 0.5q_1^2 - 0.5q_1(50 - 0.25q_1) - 5q_1$$
$$= 70q_1 - 0.375q_1^2$$

وبالقيام بعمليه الحصول على الربح الاعلى بالنسبه للكميه q_1 :

$$\frac{d\pi_1}{dq_1} = 70 - 0.75q_1 = 0 \qquad q_1 = 93\tfrac{1}{3} \qquad \pi_1 = 3266\tfrac{2}{3}$$

وبالمثل فى حالة الوحده الانتاجيه II :

$$\pi_2 = 100q_2 - 0.5q_2^2 - 0.5q_2(95 - 0.5q_2) - 0.5q_2^2$$
$$= 52.5q_2 - 0.75q_2^2$$
$$\frac{d\pi_2}{dq_2} = 52.5 - 1.5q_2 = 0 \qquad q_2 = 35 \qquad \pi_2 = 918.75$$

وللحصول على الربح الاقصى للوحده I كتابع نقرر أولا أنتاجه بتعويض انتاج الرائـد (وهو 35 وحده) فى دالة رد فعل التابع (٨ـ١١) ثم نحسب ربحه على النحو التالى:

$$q_1 = 95 - 0.5q_2 = 77.5$$
$$\pi_1 = 3003.125$$

وبالمثل نعوض بالقيمه 93 فى دالة رد فعل الوحده II ثم نحسب ربحه على النحـــــو التالـى :

$$q_2 = 50 - 0.25q_1 = 26\tfrac{2}{3} \qquad \pi_2 = 711\tfrac{1}{9}$$

ومن هذا نجد أن كلا من البائعين المحتكرين يتحصل على ربح اكثر من كونه رائدا ولهذا فأن كلاهما يرغب فى أن يكون هو الرائد فهذا المثال والذى يحدد كورنوت بسهوله ، اصبح يمثل حالة عدم توازن بالنسبه لستاكيل بيرق وذلك نتيجه للتغيير الذى حدث فى الافتراضات السلوكيه الاساسيه •

٨ - ٢ الاحتكار الثنائى واحتكار القلة : تنويع المنتجات :

DUOPOLY AND OLIGOPOLY: DIFFERENTIATED PRODUCTS

قد يحدث تنويع فى السلع والمنتجات فى حالة الاحتكار الثنائى واحتكار القله كما هو الحال بالنسبه للمنافسه الاحتكاريه •

تنويع المنتجات : Product Differentiation

ان المنتج للسلع المتنوعه فى سوق يكون فيه قله من المحتكرين يواجه منحنى طلب خاص به وحده بحيث أن الكميه التى يستطيع بيعها تعتمد على قرارات الاسعار من جميع الاعضاء الموجودين فى السوق •

$$q_i = f_i(p_1, p_2, \ldots, p_n) \qquad i = 1, \ldots, n \qquad (٨\text{—}١٤)$$

حيث ان $\partial q_i/\partial p_i < 0$ وأن $\partial q_i/\partial p_j > 0$ لجميع $i \neq j$ •
فأى ارتفاع فى السعر من طرف أحد البائعين (وليكن البائع i) مع بقاء الاسعار الاخرى ثابته ينتج عنه انخفاض فى مستوى انتاج البائع i لان بعض المستهلكين الذين يتعاملون معه سوف يتحولون الى منافسيه ولكن اذا رغب بعض البائعين الاخرين فى رفع اسعار سلعهم فأن البائع سوف يكون قادرا على بيع كميه اكبر بسعر ثابت نتيجة لتحول بعض المستهلكين عن البائعين المنافسين له • أما فى حالة المنافسه الاحتكاريه فان نتائج مايقوم به أحد المنتجين على الاخرين تكون طفيفه جدا بين بقية المتنافسين ولكن فى حالة الاحتكار الثنائى واحتكار القله فأن هذه النتائج تنتشر بشكل طفيف بين مجموعه اصغر من المنتجين •

أن المنتجين الفرادى يستطيعون التحكم فى السعر او الكميه وعلى هذا فان دوال الطلب يمكن التعبير عنها فى صورة المقلوب بحيث أن مستويات الانتاج تكون كمتغيرات

مستقله : (١)

$$p_i = F_i(q_1, q_2, \ldots, q_n) \qquad i = 1, \ldots, n \qquad (١٥_٨)$$

كما أن جميع الاشتقاقات الجزئيه للمعادله (٨_١٥) تكون سالبه • فلو ان البائع i رفع من انتاجه مع بقاء انتاج الاخرين ثابت ، فان p_i سوف تنخفض لان زيادة الكمية المنتجه سوف تسبب فى انخفاض فى السعر فلو فرضنا ان بائعا اخر قرر زيادة انتاجه فانه بالطبع سوف يتحصل على سعر اقل لمنتجاته وبالتالى فان سعر البائع i ايضا سوف ينخفض من اجل المحافظه على ثبات الكميه q_i عند مستوا معينا • والا فان بعضا من زبائنه سوف يتحولون الى البائع الذى يبيع بسعر اقل ومن السهل تعديل حلول كورنت ، وستاكل بيرق والتواطى collusion لحالة المنتجات المتنوعه بالتعويض عن $p = F(q_1 + q_2)$ بدوال الطلب المفرده •

$$p_1 = F_1(q_1, q_2) \qquad p_2 = F_2(q_1, q_2)$$

ويمكن كذلك توسيع رقعة التحليل لتشمل الحالات التى تكون فيها الاسعار كمتغيرات مستقله :

$$q_1 = f_1(p_1, p_2) \qquad q_2 = f_2(p_1, p_2)$$

وتكون الارباح بدلالة الكميات :

$$\pi_1 = h_1(q_1, q_2) \qquad \pi_2 = h_2(q_1, q_2)$$

وبالتعويض :

$$\pi_1 = h_1[f_1(p_1, p_2), f_2(p_1, p_2)] = H_1(p_1, p_2)$$
$$\pi_2 = h_2[f_1(p_1, p_2), f_2(p_1, p_2)] = H_2(p_1, p_2)$$

وبهذا يكون الربح لكل واحد من المحتكرين بدلالة كلا السعرين وتصبح عطية الحصول على الحد الاعلى من الربح بدلالة السعرين ايضا •

ففى حالة المنتجات المتنوعه فان الربح فى حالة الاحتكار الثنائى قد يعتمد على المبالغ المنصرفه على الاعلانات فاذا كانت الاعلانات مؤثره واتت بنتيجة ، فانها تسمح للبائع ببيع كمية اكبر بسعر معطى او بكمية محدده بسعر اعلى وتكون منحنيات الطلب كالتالى :

$$p_1 = F_1(q_1, q_2, A_1, A_2) \qquad p_2 = F_2(q_1, q_2, A_1, A_2)$$

---

(١) يمكن الحصول على دوال الطلب بحيث أنها تصف الحاله التى يكون فيها السعر هو التغير المستقل لبعض البائعين وتكون الكميه هى المتغير المستقل للبعض الاخر وبهذا يكون المتغير المعتمد على غيره لكل بائع بدلالة المتغيرات المستقله لجميع البائعين •

حيث ان A_1 و A_2 تمثلان مقدارى منصرفات الاعلان للبائع الاول والثانى وتصبح دالتى ربحهما كالتالى :

$$\pi_1 = q_1F_1(q_1, q_2, A_1, A_2) - C_1(q_1) - A_1$$

$$\pi_2 = q_2F_2(q_1, q_2, A_1, A_2) - C_2(q_2) - A_2$$

وبهذا يمكن لكل واحد من المحتكرين ان يتحصل على الحد الاعلى من الربح بدلالة منصرفاته على الاعلان بالاضافه الى مستوى انتاجه ٠

الحل الخاص بتقاسم السوق : The Market-Shares Solution

يوجد هناك نموذج اخر للتغيرات الافتراضيه بحيث ان المحتكر الثانى (ونرمز له بالرقم II) يرغب فى المحافظه على نصيب ثابت من اجمالى البيع للمنتجات المتنوعه بغض النظر عن نتائج تصرفاته على ارباحه المدى القصير ٠ وسوف يكون اهتمامه منصبا على المميزات فى المدى الطويل والتى سوف يستخلصها من المحافظه على نصيبه المعطى من السوق ٠ فاى تغير فى الكمية التى ينتجها المحتكر الاول I سوف يتبعه حالا تغيير نسبى من جانب المحتكر الثانى II فتكون العلاقه التاليه صحيحة ومحققة :

$$\frac{q_2}{q_1 + q_2} = k \qquad q_2 = \frac{kq_1}{1-k} \qquad (٨_١٦)$$

بحيث ان k تمثل النصيب الذى يطمع II فى الحصول عليه فى السوق ٠ ان المحتكر I يمثل هنا رائدا للسوق حيث ان تصرفاته سوف يتبعها تصرفا مقررا مسبقا من المحتكر II وسوف تكون دالة الطلب العكسيه للمحتكر I هى :

$p_1 = F_1(q_1, q_2)$ وتكون دالة ربحه هى :

$$\pi_1 = q_1F_1(q_1, q_2) - C_1(q_1)$$

وبالتعويض من (٨_١٦) بالكميه q_2 نحصل على :

$$\pi_1 = q_1F_1\left(q_1, \frac{kq_1}{1-k}\right) - C_1(q_1)$$

فتصبح دالة الربح للمحتكر I بدلالة q_1 فقط ويمكن الحصول على الحد الاعلى من الربح بدلالة متغير واحد فقط مادام المحتكر II يتصرف بطريقة تحفظ له البقاء على نصيبه من السوق ٠

<u>مثال</u> : افترض ان دالتى الطلب والتكلفه للمحتكر هما كالتالى :

$$p_1 = 100 - 2q_1 - q_2 \qquad C_1 = 2.5q_1^2$$

فاذا افترضنا ان $k = \frac{1}{3}$ فان $q_2 = 0.5q_1$ يكون ربح المحتكر I :

$$\pi_1 = q_1(100 - 2q_1 - 0.5q_1) - 2.5q_1^2 = 100q_1 - 5q_1^2$$

وبوضع الاشتقاق الجزئي للربح π_1 مساويا لصفر ، وبحل المعادلة للكميه q_1 وبالتعويض في العلاقات السابقه ، نحصل على :

$$\frac{d\pi_1}{dq_1} = 100 - 10q_1 = 0$$

$$q_1 = 10 \qquad q_2 = 5 \qquad p_1 = 75 \qquad \pi_1 = 500$$

وبهذا يكون المحتكر I قد تمكن من الحصول على الحد الاعلى من الربح بانتاج عشرة وحدات وكان رد فعل المحتكر II هو انتاج خمسة وحدات .

الحل الخاص بمنحنى الطلب الملتوى (المعوج) :

The Kinked-Demand-Curve Solution

تتصف بعض اسواق احتكار القلة واسواق الاحتكار الثنائي بتغيرات السعر المتكرره . فوحدات الانتاج في مثل هذه الاسواق لايقومون بتغيير اسعارهم وكميات انتاجهم كرد فعل للتغيرات البسيطه في منحنيات التكلفه كما تنص عليه التحاليل السابقة للاسواق . ان حل منحنى الطلب الملتوى (المعوج) يمثل تحليلا نظريا مطابقا لهذا السلوك الملحوظ . مبدئيا من اسعار وكميات قرر انتاجها مسبقا ، يستطيع احد المحتكرين ان يخفض سعره (يزيد من كميه انتاجه) بافتراض ان المحتكر الآخر سوف يخفض سعره (يزيد من كمية انتاجه) من اجل الحفاظ على نصيبه من السوق . فلو ان احدا من المحتكرين رفع سعره . فان خصمه سوف يحافظ على سعره بدون اى تغيير وبذلك يحافظ على نصيبه من السوق وسوف يتبع هذا انخفاض في السعر وليس ارتفاعا في السعر .

مثال : افترض ان دالتى الطلب والتكلفه لكل واحد من المحتكرين كالتالى :

$$p_1 = 100 - 2q_1 - q_2 \qquad C_1 = 2.5q_1^2$$
$$p_2 = 95 - q_1 - 3q_2 \qquad C_2 = 25q_2 \qquad (\text{٨-١٧})$$

ولنفرض ان السعرين والكميتين الحاليه والموجوده في السوق كالتالى :

$$p_1 = 70 \qquad q_1 = 10$$
$$p_2 = 55, \qquad q_2 = 10 \qquad (1)$$

فلو ان المحتكر I رفع سعره ، فان المحتكر II سوف لايغير سعره ويتركه عند

(١) يمكن للقارئ من التحقق من ان هذا الخليط من السعر والكميه يمثل حلا من حلول كورنت ويكون MC = MR لكل واحد من المحتكرين II, I بافتراض ان مستوى انتاج خصمه يظل بدون تغيير اما طريقه الحصول على هذا الربح من السعر والكميه فلا يهمنا هنا في هذه الحالة (حالة منحنى الطلب الملتوى) .

(٥٥ ريالا) وبالتعويض بالسعر $p_2 = 55$ في دالة طلب المحتكر II والمعطاه بالمعادلة (٨ـ١٧) للحصول على q_2 :

$$q_2 = \frac{40 - q_1}{3} \qquad (١٨ـ٨)$$

ولهذا فان مستوى انتاج II ونصيبه من السوق سوف يزداد كلما زاد I في سعره وبذلك يضطر لتخفيض مستوى انتاجه • وبتعويض قيمة q_2 المعطاة بالمعادلة (٨ـ١٨) في دالة طلب المحتكر I والمعطاه بالمعادلة (٧ـ١٧) نحصل على:

$$p_1 = \frac{260 - 5q_1}{3} \qquad (١٩ـ٨)$$

فنجد ان سعر I يكون بدلالة q_1 فقط اذا افترضنا ان II سوف يحافظ على سعره عند (٥٥ ريالا) فاذا بدانا من الوضع الاولى ، فان (٨ـ١٩) تكون محققه فقط للحالة $p_1 < 70$.$q_1 > 10$ ويمكن اشتقاق دالة MR للمحتكر I في حالة ارتفاع السعر بتكوين دالة اجمالي التكلفه من المعادله(٨ـ١٩) :

$$R_1 = q_1 \left(\frac{260 - 5q_1}{3}\right)$$

وكذلك

$$\frac{dR_1}{dq_1} = \frac{260 - 10q_1}{3} \qquad (٢٠ـ٨)$$

وبهذا يكون MR للمحتكر الاول ، عند انتاج $q_1 = 10$ في حالة ارتفاع السعر هو $53\frac{1}{3}$ ريالا •

ان دالتي الطلب و MR المعطاه بالمعادلتين (٨ـ١٩) و(٨ـ٢٠) لاتحققان اذا خفض المحتكر I من سعره • ففي هذه الحاله ، سوف يقوم المحتكر II تباعا بتخفيض سعره بنسبه كافيه تسمح له بالحفاظ على نصف اجمالي حجم المبيعات • فالمحتكر II لابد وان يزيد من مستوى انتاجه بنفس النسبه الذي زاد بها المحتكر I من اجل المحافظه على نصيبه في السوق بحيث ان :

$q_2 = q_1$. وبتعويض $q_2 = q_1$ في دالة طلب المحتكر I والمعطاه بالمعادلة (٨ـ١٧) نحصل على :

$$p_1 = 100 - 3q_1 \qquad (٢١ـ٨)$$

وبهذا يكون سعر المحتكر I بدلالة q_1 فقط اذا اعطينا الحقيقه بان المحتكر سوف يحافظ على نصيبه من السوق وتكون دالة الطلب المعطاه بالمعادله (٨ـ٢١) محققه للقيمتين $p_1 > 70$ ، $q_1 > 10$ ويمكن اشتقاق دالة MR للمحتكر I

لحالة ارتفاع السعر بتكوين دالة اجمالى الايرادات من المعادله (٨ــ٢١) على النحو التالى :

$$R_1 = q_1(100 - 3q_1)$$

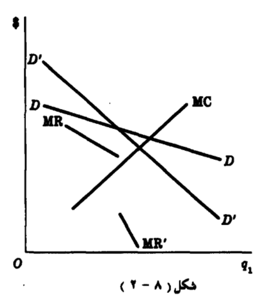
وكذلك

$$\frac{dR_1}{dq_1} = 100 - 6q_1$$

وبهذا يكون MR للمحتكر الاول فى حالة ارتفاع السعر هو (٤٠ ريالا) بانتاج $q_1 = 10$.

ان الوضع الاولى يمثل نقطه الربح العظمى للمحتكر I ويكون MC لمستوى الانتاج لعشرة وحدات هو ٥٠ ريالا • ولا يستطيع زيادة ربحه بزيادة سعره (تخفيض مستوى انتاجه) لان MR تتجاوز (تتعدى MC اى ان $(50 < 53\frac{1}{3})$ وهذا الفرق سوف يزداد بزيادة السعر • ولا يستطيع كذلك من تخفيض سعره (زياده مستوى انتاجه) لان MR اقل من MC (اى ان : $(50 > 40)$ وهذا الفرق سوف يزداد بانخفاض فى السعر ويكون مزيج السعر والكميه الاوليه حدا اقصى لاى قيمه لـ MC من $53\frac{1}{3}$ الى 40 ريالا واى انخفاض فى MC الخاص به بكمية لاتزيد عن ١٠ ريالات سوف لاتجعله يرغب فى تخفيض سعره والتوسع فى مبيعاته • وبالمثل فان زيادة MC بكميه لاتزيد عن $3\frac{1}{3}$ ريالا سوف لاتدفعه لزيادة سعره وتقليص مبيعاتــه •

وبطريقه الرسم ، نجد ان منحنى الطلب الاثرى effective demand curve للمحتكر I يكون ملتويا kinked ويكون منحنى MR الاثرى غير متصل عند مستوى انتاجه الاولـــى • ويكون منحنى طلبه هو $D'D'$ (انظر الشكل (٨ــ٢) اذا كان رد فعل المحتكر II هو المحافظه على نصيبه من السوق • اما فى حالة محافظه المحتكر II على سعره فان منحنى الطلب للمحتكر 1 يكون DD وبهذا يكون المنحنى DD محققا لزيادة فـــى السعر ، و $D'D'$ محققا لانخفاض فى السعر • ويتبع منحنى MR الاثرى منحـــنى MR المقابل للمنحنى DD على ايسار من مستوى انتاجه الاولى وكذلك منحنى MR المقابل على اليمين من مستوى انتاجه الاولى • وبهذا فان المحتكر I ويكون غير قادرا $D'D'$ على مساواة MR بـ MC •



شكل (٨ - ٢)

٨ - ٣ احتكار الشراء بواسطة مشترين واحتكار القلة فى حالة الشراء
DUOPSONY AND OLIGOPSONY

لقد ناقشنا حالة المحتكر فى الجزء ٧ ـ ٤ ففى بعض اسواق الدواخل inputs يكون عدد المشترين اكبر من واحد ، ولكنه لايزال قليلا لدرجة ان افتراض قيام الشراء بالتنافس باسعار ثابته لايمكن الحفاظ عليه فمثل هذه الاسواق تناقش فى هذا الجزء . نعرف السوق التى يكون فيها اثنين من المشترين فقط بانها تمثل حالة احتكار الشراء بواسطة مشترين *duopsony* وكذلك تعرف السوق التى يكون فيها عدد قليل من المشترين ولكنه اكبر من اثنين بانه يمثل حالة احتكار القلة فى حالة الشراء oligopsony .

ان حالة السوق التى يكون فيها عدد قليل من المشترين تشبه السوق التى يكون فيها عدد قليل من البائعين فلايوجد افتراضات سلوكيه للمنافسه مقبولة من الجميع . فكل مشترى يستطيع التحكم فى مستوى مشترياته ولكنه سوف يتاثر بوضوح بتصرفات المشترين الاخرين . فمعظم نظريات الاحتكار الثنائى واحتكار القله والتى تعطى المنتجات الغير متفاضله يمكن تكييفها لتغطى احتكار الشراء بواسطة مشترين واحتكار القله فى حالة الشراء .

فعلى سبيل المثال والتوضيح نعتبر هنا نوعية معدلة من حل كورنوت افترض وجود سوق عمال محليه مكونة من وحدتين للإنتاج تشترى من بائعين عدة يتعاملون بالمنافسه . وكالسابق فان سعر العمل يكون دالة تزايديه بالنسبه للكميه :

$$r = g(x_1 + x_2)$$

حيث ان x_1 , x_2 يمثلان الكميات التى اشترتها الوحدتين الانتاجيتين ونفترض ان كل مشترى سوف يستخدم العمل فقط لانتاج السلعة التى سوف يبيعها فى سوق تنافسيه على مستوى قومى وبسعر ثابت فتكون دالتى الانتاج هما :

$$q_1 = h_1(x_1) \qquad q_2 = h_2(x_2)$$

ويكون ربحهما هو :

$$\begin{aligned} \pi_1 &= p_1h_1(x_1) - g(x_1 + x_2)x_1 \\ \pi_2 &= p_2h_2(x_2) - g(x_1 + x_2)x_2 \end{aligned} \qquad (٨_٢٢)$$

وبهذا يكون قد طبقنا الفرض السلوكى الاساسى لكورنوت لان كل واحد من الاثنين المشترين سوف يعمل على الحصول على الحد الاعلى من الربح على افتراض ان الاخر غير متاثـــرا بتصرفاته هو • وبوضع الاشتقاقات الجزئيه المناسبه للمعادله (٨ــ٢٢) مساويه لصفر نجد:

$$\frac{\partial \pi_1}{\partial x_1} = p_1h_1'(x_1) - r - x_1g'(x_1 + x_2) = 0$$

$$\frac{\partial \pi_2}{\partial x_2} = p_2h_2'(x_2) - r - x_2g'(x_1 + x_2) = 0$$

ومن هاتين المعادلتين نحصل على :

$$\begin{aligned} p_1h_1'(x_1) &= r + x_1g'(x_1 + x_2) \\ p_2h_2'(x_2) &= r + x_2g'(x_1 + x_2) \end{aligned} \qquad (٨_٢٣)$$

فكل واحد من المشترين المحتكرين سوف يساوى قيمة حدة الانتاجى بحدة التكلفى للداخل وسوف لايكون له نفس حد التكلفه عند التوازن الا اذا كانت $x_1 = x_2$ فالذى يمتـــلك مستوى مشتروات اكبر يكون له حد التكلفه الاعلى • اما شروط الدرجه الثانيه فانها تاتـى راسا من تعميم المعادلة (٧ــ٣٢) ان قيمة الانتاج الحديه لكل مشترى محتكر يجـب ان تزيد بدرجة اقل سرعة من تكلفته الحديه •

تعبر دوال ردود فعل الداخل عن مشتريات كل واحد من المشترين المحتكريـــن بدلالة مشتروات الاخر وتتحصل عليها بحل المعادلة الاولى من معادلات (٨ــ٢٣) لقيم x_1 والمعادلة الثانيه لقيم x_2 .

$$x_1 = \Phi_1(x_2)$$

$$x_2 = \Phi_2(x_1)$$

ويشبه مدى الحلول المحتمله فى هذه الحاله لذلك فى حاله الاحتكار الثنائى ويمكن كذلك ادخال التغيرات التخمينية والقياده والتبعيه من نوع ستاكل بيرج ضمنها •

٨ – ٤ نظريات المجموعات (الألعاب) THEORY OF GAMES

ان نظريات احتكار القله والاحتكار الثنائى المنافسه فى الجزئين(٨ـ١) و(٨ـ٢) تؤدى الى حلول رياضيه متماسكه باستخدام حساب التفاضل ولكنها عرضه للاسئلةلاحتوائها على افتراضات عشوائيه عن ما تظنه الوحدات الانتاجيه عن بعضها البعض، وعن ردود فعلها • فالنظريات الرياضيه (للمجموعات تمثل طريقة بديلة للتطبيق على عدد صغير من حالات السوق المعتمده كل واحد فيها على الاخر ونناقش فى الاجزاء الثلاثه من هـذا الباب المجموعات الغير تعاونيه او التنافسيه ممثلة فى لعبة يكون من شخصين بحصيلة تساوى صفر two-person, zero-sum games اما المجموعة التعاونيه Cooperative games والتى يظهر كل مشترك فيها اهتمامه بالتصرف والسلوك الجماعى التعاونى المشترك فسوف نناقش فى الجزئين الاخيرين •

اللعب المكونة من شخصين وبحصيلة تساوى صفر :
Two-Person, Zero-Sum Games

ان اى لعبة قد تكون مكونه من حركات متتاليه كما هو الحال فى لعبة الشطرنج او قد تكون مكونه من حركه واحده لكل لاعب من المشتركين فى اللعبه فالتحاليل الحاليه سـوف تكون محدده بالالعاب ذات الحركه الواحدة: single-move games. ففى هـذا المضمار نعرف كلمة استراتيجيه (خطه) بانها مواصفات حركة معينه لاحد المشاركين فى اللعبه • فخطة المحتكر المشترى duopolist تتكون من اختيار قيمة معينه لكل واحد من المتغيرات الموجودة تحت تحكمة فاذا كان السعر هو المتغير الوحيد ، فان الخطه سوف تتكون من اختيار سعر معين فاذا كان السعر ومصاريف الاعلان هما المتغيران ، فان الخطـه سوف تتكون من احتكار قيمتين محددتين لكلا من السعر ومصاريف الاعلان ويفترض فى ان يكون لكل مشترك عددا محددا من الخطط مع ان العدد قد يكون كبيرا جدا • وهـذا الافتراض يلغى احتمال التغيير المتواصل للمتغيرات الحركيه action variables وسوف تكون نتيجة لعبه المحتكر الثنائى، بمعنى ان الربح المكتسب من كل مشترك سوف يتقرر من التكلفه المباشرة relevant cost وعلاقات الطلب وذلك حالما يختار كل واحـد من المشتركين خطته •

تعتمد فى تصنيف انواع الالعاب على معيارين اساسيين هما :

(١) عدد المشتركين (٢) حصيلة اللعبه •

فالمعيار الاول مجرد احصاء لعدد الاشخاص المشاركين فى اللعبه بمصالحهـم

المتضاربه فقد يوجد شخص واحد ، شخصان ، ثلاثة اشخاص ، وبالتعميم ، قد يوجد عدد n من الاشخاص المشاركين فى كل لعبه (او مجموعة) اما المعيار الثانى فانه يسمح بان يكون هناك علامة مميزة بين الالعاب التى تنتهى بحصيلة تساوى صفر وتلك التى تنتهى بحصيلة تساوى صفر وتلك التى تنتهى بحصيلة لاتساوى صفر :

zero-sum and non-zero-sum games

فاللعبه المنتهيه بحصيلة تساوى صفر هى تلك المجموعة التى يكون حصيلة ناتجها الجبرى (مثلا ، الارباح) للمشتركين مساويه لصفر لكل خليط محتمل من الخطط (الاستراتيجيات) [1] فاللعبات التى يشترك فيها شخصان وتكون حصيلة ناتجها صفرا يجب ان تكون تنافسيه منتظمه (غير تعاونيه) لانه اذا كان احد اللاعبين يخسر دائما فان ذلك يعتبر ربحا للاخرين المشاركين فى اللعبه فلا يكون هناك اى مكان للتعاون .

ان اللعبه المكونه من شخص واحد وبحصيلة صفر تكون غير ممتعه لان اللاعب لايربح شيئا بغض النظر عن اختباره للخطط التى يستخدمها . فالمحتكر او محتكر الشراء قد يعتبر كالمشارك الوحيد فى اللعبه المكونه من شخص واحد وبحصيله غير صفر . ويمكن تطبيق اللعبه المكونه من شخصين بحصيلة صفر على سوق احتكار الشراء والذى تكون فيه غنيمة (ربح) احد المشتركين مساويه دائما للقيمه المطلقه لخسارة الاخر . وعموما اذا ، كان اللاعب I يمتلك n من الخطط فان الحصيلة المحتمله للعبه توضحها مصفوفه الربح التاليه :

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & q_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \qquad (٨\text{–}٢٤)$$

حيث ان a_{ij} تمثل ربح اللاعب I اذا استخدم الخطه رقم i واستخدم خصمه (اللاعب II) الخطه رقم i وبما ان حصيلة هذه اللعبه صفر ، فان الربح المقابل الذى كسبه اللاعب II هو a_{ij} .

<u>مثال :</u> اعتبر مصفوفة الربح التاليه :

$$\begin{bmatrix} 8 & 40 & 20 & 5 \\ 10 & 30 & -10 & -8 \end{bmatrix} \qquad (٨\text{–}٢٥)$$

---

(١) ان اللعبه التى تكون حصيلتها صفرا هى حالة خاصة من اللعبه التى تكون حصيلتها ثابته constant-sum game. بمعنى انها اللعبه التى تكون حصيلتها ثابته لكل خليط من الخطط . فكل لعبه بحصيلة ثابته يمكن تحويلها الى لعبة بحصيلة صفر وبالعكس.

فاذا استخدم اللاعب I خطته الاولى واستخدم اللاعب II خطته الثانيه فان اللاعب I سوف يربح 40 والثانى يربح 40- ولكنه اذا استخدم I خطته الثانيه واستخدم II خطته الثالثه فان I سوف يربح (10-) و II يربح 10 .

ان مشكلة اتخاذ قرار المحتكر المشترى تتكون من اختيار الخطه المثلى optimal strategy فاللاعب I يرغب فى الحصيلة (40) فى الصف الاول والعمود الثانى من المصفوفة (٨ــ٢٥) واللاعب II يرغب فى الحصيلة 10- فى الصف الثانى والعمود الثالث . وتعتمد الحصيلة النهائيه على الخطط لكلا المحتكرين ، ولا يمتلك اى واحد منهما من ان يفرض رغباته فاذا اختار اللاعب I خطته الاولى ، فان اللاعب II قد يختار خطته الرابعه وتكون الحصيلة 5 بدلا من 40 ولكن اذا اختار اللاعب II خطته الثالثه فان اللاعب I قد يختار خطته الاولى ، وتكون الحصيلة 20 بدلا من 10-. ان نظريات المجموعات تفترض انماطا سلوكيه تسمح بتقرير التوازن فى حالات مثل هذه . فاللاعب I يخشى ان يكتشف اللاعب II خطته المختاره ومن ثم يرغب فى " اللعب بحذر " فاذا اختار اللاعب I الخطه رقم i فاقل ربح يحصل عليه وبالتالى يكون اقصى ربح بالنسبه للاعب II يعطيه اصغر عنصر فى الصف رقم i من مصفوفة الربح ونرمز له بالرمز $\min\limits_j a_{ij}$ القيمة الصغرى لـ a_{ij} . فهذا هو الربح المتوقع للاعب I من توظيفه للخطه رقم i اذا كان مايخشاه من معرفة اللاعب II وسلوكه قد تحقق . ويكون ربح I اكبر من هذا المقدار اذا فشل II (فى اختيار الخطه المناسبه . فاللاعب I يرغب فى تحقيق الحد الاعلى من اقل كميه يتوقع الحصول عليها maximize his minimum ولذلك فان (I) سوف يختار الخطه i التى تعطيها اكبر قيمة من القيم الصغرى وتكون الحصيلة المتوقعه هنى : $\max\limits_i \min\limits_j a_{ij}$ فهو لا يستطيع ان يكسب اقل ربحا ولكنه قد يربح اكثر .

وبالمثل فان اللاعب II يتملكه نفس الخشيه من معلومات وسلوك اللاعب I فاذا وظف II خطته رقم j فانه يخشى ان يوظف I الخطه المقابله لاكبر عنصر فى العمود رقم j من مصفوفة الربح $\max\limits_i a_{ij}$ ولهذا فان II سوف يختار الخطه j التى يكون فيها $\max\limits_i a_{ij}$ هو الاصغر ، ويكون ربحه المتوقع هو $\min\limits_j \max\limits_i a_{ij}$ ــ فتكون قرارات المحتكر المشترى متوافقه ويتحقق التوازن اذا كان :

$$\max_i \min_j a_{ij} = \min_j \max_i a_{ij} \qquad (٨ــ٢٦)$$

فاذا اخترنا k لتكون الرقم الاستدلالى الذى من اجله $\min\limits_j a_{kj} = \max\limits_i \min\limits_j a_{ij}$ واخترنا h لتكون الرقم الاستدلالى الذى من اجله $\max\limits_i a_{ih} = \min\limits_j \max\limits_i a_{ij}$ فانه اذا تحققت المعادله (٨ــ٢٦) فاننا نسمى الخطه رقم k والخطه رقم h للاعب

واللاعب II على التوالى زوج توازنى من الخطط equilibrium pair of strategies

وبالعوده الى المثال المعطى بالمعادلة(٨ـ٢٥) فان اللاعب I سوف يوظف خطته الاولى اذا توقع اللاعب II هذا الاختيار من I ويكون ربح I هو 5 ولكن اذا وظف I خطته الثانيه وتوقع II هذا الاختيار فان ربحه سوف يكون 10 فاللاعب II سوف يوظف خطته الرابعه ومن ثم فان هذا سوف يحدد خسارته بالمبلغ 5 لان الحد الاعلى لحصيلة كل عمود اخر (عمود نعم وعمود لا) من(٨ـ٢٥) تكون اكبر من 5 ففى هذه الحاله:

$$\max_i \min_j a_{ij} = \min_j \max_i a_{ij} = a_{14} = 5$$

وبهذا تكون قرارات المحتكر المشترى متوافقة ويتحقق التوازن ٠فلا واحد من المحتكرين يستطيع زيادة ربحه بتغيير خطته اذا بقيت خطه خصمه بدون تغيير ٠

مثـال : لنفترض ان مصفوفة الارباح هى :

$$\begin{bmatrix} -2 & 4 & -1 & 6 \\ 3 & -1 & 5 & 10 \end{bmatrix} \qquad (٨ـ٢٧)$$

حيث ان اللاعب I يمتلك خطتين وان اللاعب II يمتلك اربعة ٠ فمن الممكن تبسيط ، مصفوفة الارباح هذه واللعبه المقابله لها بتعريف فكرة " السيادة" او السيطرة dominance فبفحص (٨ـ٢٧) يتضح ان II سوف لايستخدم ابدا خطته الثالثة لانه يستطيع دائما ان يحسن من وضعه بتوظيف خطته الاولى بغض النظر عن الخطه اللاعب I فكل عنصر فى العمود الثالث يكون اكبر من العنصر المقابل فى العمود الاول وبذلك فانه يمثل خسارة اكبر للاعب II وعموما فان العمود رقم j يسيطر (اويسود)على العمود رقم k اذا كان $a_{ij} \leqq a_{ik}$ لجميع i كان $a_{ij} < a_{ik}$ لواحده i على الاقل ٠ اما العمود الرابع من(٨ـ٢٧) فانه مسيطر عليه من كلا العمودين الاول والثانى ٠ونستطيع تعريف السيطرة ايضا بالنسبه لخطط اللاعب I وعموما فان الصف رقم i يسيطر على الصف رقم h اذا كان $a_{ij} \geqq a_{hj}$ لجميع j وكان $a_{ij} > a_{hj}$ لواحده i على الاقل. اما فى المصفوفة (٨ـ٢٧) فان لاصف من الصفين يسيطر على الاخر ، ولذا فان اللاعب العاقل سوف لايوظف ابدا خطة السيطرة وبذلك يمكن تبسيط مصفوفة الارباح بازالة جميع خطط السيطرة ٠

فبازالة العمودين الثالث والرابع من (٨ـ٢٧) تصبح مصفوفة الارباح :

$$\begin{bmatrix} -2 & 4 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \qquad (٨ـ٢٨)$$

وباتباع القواعد الموضحة سابقا ، فان اللاعب I يرغب في توظيف خطته الثانيه وان اللاعب II سوف يرغب في توظيف خطته الاولى ، ولكن هذه القرارات غير متوافقة :

$$\max_i \min_j a_{ij} = a_{22} = -1 \neq 3 = a_{21} = \min_j \max_i a_{ij}$$

فلو ان المحتكر المشترى وظف هذه الخطط ، فان الحصيلة الاوليه سوف تكون $a_{21} = 3$ فاذا وصف II خطته الاولى فان I لايستطيع زيادة ربحه بتغيير خططه • ولكن ، اذا استخدم I خطته الثانيه فان II يستطيع تخفيض خسارته من 3 الى I- بالانتقال الى خطته الثانيه • فيستطيع I حيئذ من زيادة ربحه من 1- الى 4 وبالانتقال الى خطته الاولى فيستطيع II حيئنذ من تخفيض خسارته من 4 الى 2- بالانتقال الى خطته الاولى • فالافتراضات التى ادت الى موقع توازن للمعادلة(٨ــ٢٥) نتج عنهما ذبذبات غير منتهيه للمعادله(٨ــ٢٨) ولم ينتج عنها زوج توازن •

الخطط الخليط : Mixed Strategies

قد يكون هناك حل للعبه معينه وقد لايكون اذا اختار المحتكر المشترى الخطط ، بالشكل الذى وضعناه سابقا • فالمازق الممثل باللعبات مثل (٨ــ٢٨) يمكن الخروج منه بالسماح للمحتكرين المشترين من ان يختارا خططهما على اساس احتمالى probabilistic basis فاذا اخترنا $r_1\ r_2 \ldots, r_m$ لتكون الاحتمالات التى سوف يستخدمها اللاعب I لتوظيف كل واحده من خططه (وعددها m خطه) بحيث ان $0 \leq r_i \leq 1$ $(i = 1, \ldots, m)$ وان $\Sigma_{i=1}^m r_i = 1.$ افترض ان اللاعب سوف يستخدم عملية عشوائيه فى اختيار خطة معينه فمثلا اذا كانت $m = 3$ وان $r_1 = 0.3,$ $r_2 = 0.1,$ $r_3 = 0.6,$

فقد يعين الارقام من صفر الى اثنين للخطه الاولى ، وثلاثة للخطه الثانيه واربعة الى تسعه للخطه الثالثه ، وقد يختار رقم بوحدة واحده بعملية عشوائيه ثم يوظف الخطه المقابله للرقم المختار • فالاختيار العشوائى سوف لايسمح للاعب II من توقع اختيار اللاعب I اذا عرف احتمالات اللاعب I •

ويستطيع اللاعب II من عشوائية اختيار خطته بتعيين الاحتمالات $s_1, s_2, \ldots, s_n$ لخططه بحيث ان $0 \leq s_j \leq 1$ $(j = 1, \ldots, n)$ وان $\Sigma_{j=1}^n s_j = 1.$ فتكون اهتمامات المحتكر المشترى منصبه على الربح المتوقع بدلا من الربح الفعلى • فربحه المتوقع يساوى مجموع الحصيلات المحتمله مضروبه كل واحده منها باحتمال حدوثها • فمثلا ، اذا وظف اللاعب II خطته رقم j باحتمال يساوى واحد ، وان اللاعب I اختار الاحتمالات $r_1, \ldots, r_m,$ فان الربح المتوقع للاعب I هو $\Sigma_{i=1}^m a_{ij} r_i$ •

ان مشكلة القرار لكل محتكر مشترى هى ان يختار مجموعة قصوى للاحتمالات.
فاللاعب I يخشى ان اللاعب II سوف يكتشف خطته وان II سوف يختار خطه من عنده تمكنه من الحصول على الحد الاعلى من الربح المتوقع ، بمعنى ان هذه الخطه سوف تجعل الربح المتوقع للاعب I اقل . وبالمثل فان اللاعب II يكون لديه نفس الخوف من اللاعب I فتكون الاحتمالات التى يوظفها المحتكر المشترى احتمالات قصوى، اذا كان :

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} r_i \geqq V \qquad j = 1, \ldots, n \qquad (٨\text{ـ}٢٩)$$

واذا كان ايضا :

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} s_j \leqq V \qquad i = 1, \ldots, m \qquad (٨\text{ـ}٣٠)$$

حيث ان V معرفة على انها حصيلة اللعبه (قيمة اللعبه) ***value of the game***
تنص العلاقات (٨ــ٢٩) على ان الربح المتوقع للاعب I ستكون على الاقل بكبر V اذا وظف II ايا من خططه باحتمال يساوى واحد ، وتنص العلاقات (٨ــ٣٠) ان الخساره المتوقعه للاعب II تكون على الاقل بصغر V اذا وظف I ايا من خططه باحتمال يساوى واحد . تنص نظريه اساسيه من نظريات المجموعات على ان اى حل يعنى قيم r وقيم التى تحقق (٨ــ٢٩) و(٨ــ٣٠) دائما موجوده ، وان V تكون فريده unique فاذا اختار كلا المحتكرين المشترين خططهم على اسس احتماليه، فان الربح المتوقع للاعب I ، E_1 يمكن تقريره من (٨ــ٢٩):

$$E_1 = \sum_{j=1}^{n} s_j \left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij} r_i \right) \geqq \sum_{j=1}^{n} s_j V$$

او

$$E_1 = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} a_{ij} r_i s_j \geqq V \qquad (٨\text{ـ}٣١)$$

وكذلك الخسارة المتوقعه للاعب II يمكن تقريرها من (٨ــ٣٠) :

$$E_2 = \sum_{i=1}^{m} r_i \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} s_j \right) \leqq \sum_{i=1}^{m} r_i V$$

او

$$E_2 = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} a_{ij} r_i s_j \leqq V \qquad (٨\text{ـ}٣٢)$$

ان الحدود التى فى الوسط فى (٨ــ٣١) تكون متطابقة (متماثله): الربح المتوقع للاعب I يساوى الخسارة المتوقعة للاعب II وبدمج (٨ــ٣١) مع (٨ــ٣٢):

$$V \leqq E_1 = E_2 \leqq V$$

والتى تثبت ان :

$$E_1 = E_2 = V$$

وهذه تنص على ان الحصيلة المتوقعه تكون هى نفسها لكل واحد من المحتكرين المشترين وتساوى حصيلة اللعبه(قيمة اللعبه) اذا كان كلاهما يوظف احتمالاتهم القصوى. • فاذا وظف I احتمالاته القصوى ، فان ربحه المتوقع لايقل عن V بغض النظر عن الخطة التى يختارها اللاعب II وتكون اكبر من V اذا وظف II مجموعة احتمالات غير قصوى • وبالمثل ، اذا وظف II احتمالاته القصوى ، فان خسارته المتوقعه سوف لاتزيد عن V بغض النظر عن الخطه التى يختارها I سوف تكون اقل اذا وظف مجموعة احتمالات غير قصوى •

البرمجة الخطية المماثلة (المكافئة) Linear-Programming Equivalence

ان من الممكن تقرير الخطط القصوى للمحتكرين وكذلك حصيلة اللعبه وذلك بتحويل مشاكل اللعبه الى اطار البرمجه الخطيه(راجع الجزء ٧ــ٥) • اولا تعتبر الحالات ــ التى تكون فيها $V > 0$ ثم نعرف المتغيرات الاتيه للمحتكر الشرائى II :

$$z_j = \frac{s_j}{V} \qquad j = 1, \ldots, n \qquad (٨ــ٣٣)$$

ومن منطلق هذا التعريف نجد ان :

$$\frac{1}{V} = z_1 + z_2 + \cdots + z_n \qquad (٨ــ٣٤)$$

ويرغب اللاعب II فى ان يجعل خسارته العظمى المتوقعه صغيرة بقدر المستطاع او ما يماثل ذلك (او يكافوءة) انه يرغب فى جعل $1/V$ باكبر حجم ممكن فتكون البرمجه الخطيه المماثله له هى فى ان يجد القيم التى من اجلها تكون π_i , $i = 1, \ldots,$ والتى تعطيه الحد الاعلى من(٨ــ٣٤) بشرط ان :

$$a_{i1}z_1 + a_{i2}z_2 + \cdots + a_{in}z_n \leqq 1 \qquad i = 1, \ldots, m \qquad (٨ــ٣٥)$$

ولقد اشتقت العلاقات فى(٨ــ٣٥) بقسمه (٨ــ٣٠) على V ثم بالتعويض من (٨ــ٣٣) •

وبتعريف المتغيرات الخاصة بالمحتكر المشترى I :

$$w_i = \frac{r_i}{V} \qquad i = 1, \ldots, m \qquad (٨ــ٣٦)$$

ومن منطلق هذا التعريف نجد ان

$$\frac{1}{V} = w_1 + w_2 + \cdots + w_m \qquad (٨ــ٣٧)$$

يرغب اللاعب II فى ان يجعل ربحه الادنى المتوقع اكبر مايمكن او ما يماثل ذلك انه يرغب فى $1/V$ اصغر مايمكن ، فتكون البرمجه الخطيه المماثله له فى ايجاد القيم التى من اجلها $z_j \geqq 0$ $(j = 1, \ldots, n)$ والتى تعطى الحد الادنى للمعادلات فى(٨ــ٣٧) بشرط

ان : $a_{1j}w_1 + a_{2j}w_2 + \cdots + a_{mj}w_m \geqq 1 \quad j = 1, \ldots, n$ (٨ــ٣٨)

ولقد اشتقت العلاقات فى (٨ــ٣٨) بقسمة العلاقات فى (٨ــ٢٩) على v ثم بالتعويض من (٨ــ٣٦) ٠

ان نظام البرمجه للاعب I المعطى بمجموعتى المعادلات (٨ــ٣٧) و (٨ــ٣٨) هى المزوج dual لنظام البرمجه للاعب II المعطاه بمجموعتى المعادلات (٨ــ٣٤) و (٨ــ٣٥) بحيث ان مقلوب (معكوس) حصيلة اللعبه المعطى بالقيمة القصوى للمعادلات (٨ــ٣٤) والذى يساوى القيمة الادنى للمعادلات (٨ــ٣٧) ويمكن ، وبسهولة الوصول الى الاحتمالات القصوى للمحتكرين المشترين باستخدام (٨ــ٣٣) وباستخدام (٨ــ٣٦) من القيم القصوى للمتغيرات z_i و w_i .

ان صيغة (وضع البرمجه الخطيه يسهل الحصول على اثبات ان الحلول تحقق دائما للعبات المشترك فيها شخصان بحصيلة صفر ٠ وهذا الاثبات ينبثق من:

اولا : الاقرار بان عددا محددا من الحلول القصوى يتحقق دائما لنظام البرمجه المتماثله ، ومن ثم التدليل على ان حلول البرمجه القصوى تقدم حلا للعبه القائمه ٠ ففى البدايه نفترض ان جميع a_{ij} اكبر من صفر ، بمعنى ان $a_{ij} > 0$ فاحد الحلول الممكنه ولكنه ليس الحل القصى للنظام المبرمج فى المعادلات (٨ــ٣٤) و (٨ــ٣٥) تعطيه المعادلة $z_j = 0 \ (j = 1, \ldots, n)$ فاذا جعلنا $a^0 = \min_{i,j} a_{ij}$. فان احد الحلول الممكنه للنظام المعطى بالمعادلات (٨ــ٣٧) و (٨ــ٣٨) تعطيه المعادلة $w_i = 1/a^0 \ (i = 1, \ldots, m)$ فالحصول على محدد من الحلول القصوى للانظمه المبرمجه لاياتى الا من احد النظريات الازدواجيه المعطى فى الجزء (٧ــ٥) والتى تنص على انه : اذا تحقق وجود حلول ممكنه (ولكن غير قصوى) للنظام المبرمج وان مزوجها موجود ومحقق ، فان عددا محددا من الحلول القصوى سوف يوجد ويتحقق للنظامين معا ٠

فاذا افترضنا ان القيم القصوى للمتغيرات المبرمجه تكون معطاة بـ $z_1^*, \ldots, z_n^*$ وكذلك $w_1^*, \ldots, w_m^*$. فعلى الاقل احد w_i^* لابد وان يكون موجبا لان $w_i^* = 0 (i = 1, \ldots, m)$ لايكون ممكنا للمعادلات (٨ــ٣٨) وبالمثل ، على الاقل احد z_j^* يجب ان تكون موجبه لانه لو كانت جميع قيم z_j^* مساويه لصفر ، فان شروط المعادلات (٨ــ٣٥) سوف تتحقق على اساس انها غير متساويات منضبطه ولكن بعد هذا ، كما اثبت بنظرية الازدواجيه فى (٥ــ٤٠) فان جميع قيم w_i^* سوف تساوى صفر والتى اثبت انها مستحيله ٠ وبما ان على الاقل احد z^* وان احد w^* يجب ان تكون موجبه ، فانه من الممكن مساواة مقلوبات القيم القصوى للدوال فى (٨ــ٣٤) و

فى (٨ــ٣٧):

$$V = \frac{1}{\sum_{j=1}^{n} z_j^*} = \frac{1}{\sum_{i=1}^{m} w_i^*}$$

وانه كذلك :

$$V\sum_{j=1}^{n} z_j^* = V\sum_{i=1}^{m} w_i^* = 1$$

وبالتعويض من (٨ــ٣٣) و(٨ــ٣٦)

$$\sum_{j=1}^{n} s_j = 1 \qquad s_j \geqq 0 \qquad \sum_{i=1}^{m} r_i = 1 \qquad r_i \geqq 0$$

وهما احتمالات اللعبه وبالتعويض من (٨ــ٣٣) و(٨ــ٣٦) فى (٨ــ٣٥) وفى (٨ــ٣٨) يكون من السهل التحقق من ان هذه الاحتمالات سوف تكون حلا للعبه كما عرفناه بالمعادلات فى (٨ــ٢٩) و(٨ــ٣٠) ٠

ان المعادلات فى(٨ــ٣١) وفى(٨ــ٣٢) يعرفوا حصيلة اللعبه على انها متوسط مرجح لعناصر مصفوفة الارباح ٠ فمن الضرورى ان تكون V موجبه لتحقيق المتطلبات الغير سالبيه nonnegativityللمتغيرات المبرمجه ولكنه عامة ، قد نستنتج ان V تكون موجبه الا اذا كانت جميع قيم a_{ij} موجبه وهذه الصعوبه يمكن حلها بتعريف حلا معدلا بقيم موجبه فلو ان واحدا واكثر من a_{ij} كان اقل من او مساويا لصفر $a_{ij} \leqq 0$، فما علينا الا ان نختار رقما ، ويمكن k بالخاصيه التاليه : $a_{ij} + k > 0$ لجميع i ,j ثم نضيف k لكل عنصر من عناصر مصفوفه الارباح ، فنجد ان حصيلة هذه اللعبه المعدله سوف يتعدى حصيلة اللعبه الاوليه بمقدار k :

$$V' = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}(a_{ij}+k)r_i s_j = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} a_{ij} r_i s_j + k\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} r_i s_j = V + k \qquad (٨ــ٣٩)$$

وتكون القيمه موجبه كما اردنا لها بالتركيب ، وتكون الاحتمالات القصوى هى نفسها للعبه الاوليه والعدليه ٠[1] ولذا فان حلا للعبه الاولبه يمكن الحصول عليه من حلا للبرمجه الخطيه اللعبه المعدل ٠ وبالعوده الى اللعبه المعطاه بالمعادله(٨ــ٢٨) وبوضع $k = 4$ فان مصفوفه الارباح للعبه المعدله ستكون :

$$\begin{bmatrix} 2 & 8 \\ 7 & 3 \end{bmatrix}$$

ويكون نظام البرمجه الخطى للاعب II هو ايجاد قيم ل $z_1, z_2 \geqq 0$ والتى تعطى الحد الاقصى ل :

$$\frac{1}{V'} = z_1 + z_2$$

---

[1] See J. G. Kemeny, J. L. Snell, and G. L. Thompson, *Introduction to Finite Mathematics* (Englewood Cliffs, N.J.: Prentice-Hall, 1957), p. 291.

بشرط :
$$2z_1 + 8z_2 \leqq 1$$
$$7z_1 + 3z_2 \leqq 1$$

ويمكن للقارئ التحقق عن طريق الرسم من ان الحل الاقصى الوحيد هو:
$z_1 = 0.1,\ \ z_2 = 0.1,\ 1/V' = 0.2.$ وبالاستفاده من (٨ـ٣٣) وكذلك (٨ـ٣٩) تكون الاحتمالات القصوى للاعب II هى $s_1 = 0.5\ s_2 = 0.5$ $V = 1$ ويمكن للقارئ كذلك من التحقق بان الحل الاقصى للنظام المبرمج المزدوج هو $w_1 = 0.08,\ w_2 = 0.12,$ والتى تعطى احتمالات قصوى للاعب I على انها : $r_1 = 0.4.\ \ r_2 = 0.6.$

اللعبات (المجموعات) التعاونية : Cooperative Games

ان نظريات المجموعات التنافسيه المنضبطه لاتمثل توضيحا كافيا لسلوك المحتكرين القله فمصالح اى محتكر منهم لايكون دائما على طرفى نقيض ، وانما يمكن تشخيص تصرفاته بخليط من التنافس والتعاون . وتظهر خاصية التعاون فى اللعبات التى تكون حصيلتها غير صفر (غير ثابته) ولكن مثل هذه اللعبات لا تؤول بالضرورة الى التعاون ولكن النتائج المرجوه لاتتحقق الا عن طريق التعاون . وللتوضيح نعتبر سوقا لاثنين من المحتكرين (حالة الشراء) بحيث ان القانون يحرم الحل التواطئ (التامرى) collusive solution وكذلك نفترض ان الرشاوى واعادة توزيع الربح ايضا لايسمح بها القانون . فكل واحد من المحتكرين تكون له خطتين :

(١) يستطيع ان يعلن بانه " رائد " leader ومن ثم ينتج كمية لا باس بها من المنتجات ، او

(٢) يستطيع ان يعلن بانه " تابع " follower ومن ثم ينتج كميه صغيرة نسبيا من المنتجات . وبعدها يعلن كل واحد منهما عن رغبته فان عليه ان يلتزم بما اعلن ويتبع ذلك بالطبع ، كمية الانتاج التى ينتجها بغض النظر عن ماذا اعلن عنه خصمه .

ولنفرض ان مصفوفة الارباح هى :

		المحتكر II رائد Leader	تابع Follower
المحتكر (١)	رائد Leader	(200, 250)	(1000, 200)
	تابع Follower	(150, 950)	(800, 800)

(٨ـ٤٠)

بحيث ان الرقم الاول والثانى من كل مجموعة اقواس يمثلان مستويات الربح للاعب I واللاعب II على التوالى ٠

ويمكن الحصول على افضل حصيلة لكل واحد منهما اذا كان هو الرائد وكان منافسه هو التابع ، وتكون الحصيلة اسوء ما يمكن اذا عكس دورهما ٠ فقد يناقش البعض بانه من المعقول ان يعلن كل واحد منهما عن كونه تابعا ليتحصل على ربحا متوسطا معقولا وتكون هذه هى افضل خطة لكل واحد منهما ٠ ولكن لو ان I اعتقد ان II سوف يكون تابعا ، فان I سوف يعلن انه هو الرائد بالتزكيه وبالمثل للاعب II وبما ان لكل واحد منهما الحافز الذى يدفعه لان يكون رائدا فان سلوكهما الغير تعاونى سوف يقود كل واحد منهما للحصول على ادنى مستوى من الارباح ٠ وفى الحقيقة بان خطط الزيادة للمحتكرين الاثنين تمثل زوجا توازنيا بينما خطط التبعيه المفضله لاتمثل زوجا توازنيا فمن الواضح ان كلاهما سوف يستفيد من التعاون ، ولكنه ليس من الواضح كيفيه الوصول الى اتفاق بشأن هذا التعاون ، وحتى ولو وافق كل واحد منهما على ان يكون تابعا ، فان لكل منهما الحوافز التى تدفعه لاخلال هذا العقد واعلان نفسه رائدا ، فاحتمال وجود حلول تعاونيه يعتمد على احتمال التوصل الى التزامات وضمانات غيرقابله للاخلال بها او عدم التقيد بها ٠

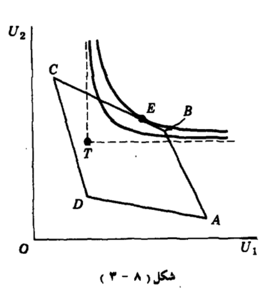
حل المفاوضة لناش : The Nash Bargaining Solution

لنعتبر الحالة التى يحاول فيها المحتكرين التفاوض من اجل التوصل الى حل تعاونى للمثال فى (٨ــ٤٠) فاذا افترضنا ان كل واحد منهما راغبا فى الحصول على الحد الاقصى من المنفعة المتوقعة من ارباحه وان كل واحد منهما يتمسك ببديهيات فون نيومات مورجنستيرن ٠

لنفترض ان النقاط الاربع A, B, C, D فى الشكل (٨ــ٣) يمثلون حصائل الربح الاربعة للمعادلات (٨ــ٤٠) مطبقة فى فراغ المنفعة mapped into utility-space. فاذا افترضنا ان المحتكرين سوف يتبعان الخطط الخليطه ، فان للقارئ يستطيع ان يتحقق من ان منطقة المنفعة المحتمله فى هذه الحالة تكون معطاة بالشكل $ABCD$ (رباعى الاضلاع) انظر تمرين (٨ــ٧) فالمفاوضات فى مثل هذه الحالة تتمثل فى اختيار نقطة من المجموعة (مجموعة منطقة المنفعة المحتمله) ٠

فاذا افترضنا ان المحتكرين لم ينجحا فى التوصل الى اتفاق فانه ليس باستطاعة اى منهما تهديد الاخر ببيع منتجاته باسعار مخفضه لبيوت البيع بالتخفيض بربح مضمون فاذا

افترضنا ان $(\bar{U}_1, \bar{U}_2)$ تمثلان منافع هذه الارباح فان النقطه T على الشكل (٨ــ٣) يكون لها الاحداثيات $(\bar{U}_1, \bar{U}_2)$ ولايحتاج اى واحد منهما على ان يوافق على قبول ربحا اقل من الربح الذى تقدمه له خطة التهديد فالهدف من الحل التعاونى هو ان على كل محتكران يختار نقطه على شمال شرق نقطة T على حدود مناطق المنفعة المحتمله وبالبديهية فانه يوجد اعداد لاحصر لها لمثل هذه الحلول ٠



شكل (٨ - ٣)

ولذا فانه حسب حل المفاوضه لناش فان كل واحد من المحتكرين يجب ان يوافق على خطط بحيث ان الدالة :

$$W = (U_1 - \bar{U}_1)(U_2 - \bar{U}_2) \quad (٨ــ٤١)$$

تكون هى الدالة العظمى بشروط الضوابط التى تنص على ان النقاط الموجوده فى منطقة المنفعة المحتمله هى فقط المتوفرة فيها الشروط والمقبولة ٠ وتعرف هنا المنحنــــى المعادل لـ W على انه المحل الهندسى لنقط المنفعة التى تعطى قيمة محــــددة لـ W An iso-W curve .

وهذه المنحنيات ماهى الا قطع زائدة قائمة rectangular hyperbolas بحيث ان القيمــه الثابته لـ W تزداد معازدياد المسافة من T فاثنين من مثل هذه المنحنيات موجود فى شكل (٨ــ٣) فنقطة E تعطى حل ناش وتقع على اعلى منحنى من منحنيــــات المعادلة لـ W والتى يكون لها ، على الاقل نقطة واحدة مشتركه مع منطقة المنفعـــة المحتمله ٠ فعلى الخط الواصل بين نقطتى B (تمثل كلا المحتكرين كتابعين) و C

(تمثل I كتابع ، و II كرائد) سوف يوظف I الخطة التى تجعل منه تابعا اما II فانه سوف يوظف خطة مختلطه وتكون احتمالات كونه رائدا معطاه بالنسبه BE الى BC وتكون احتمالات كونه تابعا معطاة بالنسبه EC الى BC ويجب على القارئ ان يلاحظ ان هذا الحل يتطلب (يستلزم) مقارنة شخصية لمنافع فون ــ نيومـان مورجنستيرن interpersonal comparison of von utilities .

٨ – ٥ الاحتكار الثنائي (الاحتكار بين طرفين)
BILATERAL MONOPOLY

ان المحتكر لايمتلك دالة عرض انتاج تربط السعر والكميه ، فهو يختار نقطة علـى دالة طلب المشترى والتى تعطيه الحد الاقصى من ارباح . وبالمثل فان محتكر الشراء monopsonist لايمتلك دالة طلب للداخل فهو يختار نقطة على دالة عرض المشترى والتى تعطيه الحد الاقصى من الارباح . فالاحتكار الثنائى هو عبارة عن حالة فى السـوق تتمثل بوجود مشتر واحد فقط وبائع واحد فقط فليس من المحتمل للبائع ان يتصـرف كمحتكر ولا البائع كمحتكر مشترى فى نفس الوقت .

فلا يستطيع البائع ان يستغل دالة طلب غير موجودة ، ولا المشترى ان يستغـل دالة طلب غير موجودة . فلابد من ان احد يتنازل . فهناك احتمالات لثلاث نتائـج عامة :

(١) قد يسيطر (اويتحكم) احد المشتركين ويجبر الاخر على قبول قرارات سعره و/ او كمياته المنتجه .

(٢) وقد يتعاون البائع والمشترى ويحققا حلا مثل حل ناش ، او

(٣) قد تتحطم الية السوق بالمعنى ان لايكون هناك من متاجرة ابدا .

فنظريات الاحتكار ، واحتكار القله ونظريات المجموعات تساعد على تفهم النتائـج المختلفه المحتملة .

الحلول المرجعية (أو الاسنادية) Reference Solutions

افترض حالة احتكار ثنائى فى سوق السلعة المنتجه Q_2 فالمشترى للسـلعه Q_2 يستخدمها كداخل input لانتاج Q_1 حسب دالة انتاجه $q_1 = h(q_2)$ فهو يبيـع السلعه Q_1 فى سوق تنافسيه بالسعر الثابت p_1 أما البائع فانه يستخدم دخلا واحد هو X لانتاج

Q_2 فهو يشترى X من سوق تنافسيه بالسعر الثابت r افترض انه يمكن وضع دالة انتاجه فى الشكل المعكوس $x = H(q_2)$ فالحلول المنشودة من قبل الاحتكار ، والمحتكرين ، وشـــبه التنافس تعطى نقط أسنادا (مرجع) مفيدة لمن يقوم بتحليل هذه السوق •

من الممكن الحصول على حل أحتكارى اذا كان بامكان البائع السيطرة وفرض الســعر الذى يرغبه على المشترى ويكون ربح المشترى :

$$\pi_B = p_1 h(q_2) - p_2 q_2$$

فهو يضع $d\pi_B/dq_2$ مساويه لصفر للحصول على الحد الاقصى من الربح :

$$\frac{d\pi_B}{dq_2} = p_1 h'(q_2) - p_2 = 0$$

$$p_2 = p_1 h'(q_2) \qquad (٨\text{—}٤٢)$$

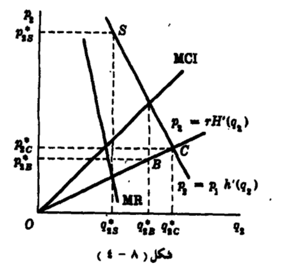
وهى تمثل مقلوب دالة الطلب للمشترى للسلعه Q_2 فالمشترى يشترى السلعه Q_2 للحد الذى تكون عنده قيمة انتاجه الحدى مساويه للسعر الذى وضعه البائع • فالبائع المحتكر سوف يعوض من (٨ــ٤٢) بالسعر p_2 ويتحصل على الحد الاقصى من الربح :

$$\pi_S = p_1 h'(q_2) q_2 - rH(q_2)$$

$$\frac{d\pi_S}{dq_2} = p_1[h'(q_2) + h''(q_2)q_2] - rH'(q_2) = 0$$

$$p_1[h'(q_2) + h''(q_2)q_2] = rH'(q_2) \qquad (٨\text{—}٤٣)$$

فشرط التوازن (٨ــ٤٣) ينص على أن البائع يساوى بين MR الخاص به وبيـــن MC وللحصول على سعر الاحتكار p_{2S}^* فاننا نقوم بحل (٨ــ٤٣) لانتاج الاحتكار q_{2S}^* ثـــم نعوض بهذه القيمه فى (٨ــ٤٢) فمثال لمثل هذا الحل الاحتكارى تعطيه النقطه S فى الشكل (٨ــ٤) •



شكل (٨ - ٤)

ان من الممكن تحقيق حل لاحتكار الشراء monopsony وذلك أذا سيطر المشـــترى واملى سعره على البائع واجبره على قبوله فيكون ربح البائع هو :

$$\pi_S = p_2q_2 - rH(q_2)$$

فهو يضع $d\pi_S/dq_2$ تساوى صفر للحصول على الحد الاقصى من الربح على الشكل التالى:

$$\frac{d\pi_S}{dq_2} = p_2 - rH'(q_2) = 0$$

$$p_2 = rH'(q_2) \qquad (٨_٤٤)$$

وهذا هو مقلوب دالة عرض السلعه Q_2 فالبائع ينتج ويبيع السلعه Q_2 للحد الذى يكون عنده تكلفته الحديه مساويه للسعر الذى وضعه المشترى ٠ فالمشترى المحتكر يعـــوض من (٨ــ٤٤) من اجل p_2 ويحصل على الحد الاعلى من الربح :

$$\pi_B = p_1h(q_2) - rH'(q_2)q_2$$

$$\frac{d\pi_B}{dq_2} = p_1h'(q_2) - r[H'(q_2) + H''(q_2)q_2] = 0$$

$$p_1h'(q_2) = r[H'(q_2) + H''(q_2)q_2] \qquad (٨_٤٥)$$

وشرط التوازن (٨ــ٤٥) ينص على ان المشترى يساوى قيمة انتاجه الحدى بالتكلفـه الحديه للداخل (MCI) وللحصول على سعر المشترى المحتكر p^*_{2B} فاننا نقوم بحل (٨ــ٤٥) للحصول على انتاج المحتكر المشترى q^*_{2B} ثم نعوض بهذه القيمه فى (٨ــ٤٤) فمثال لمثل هذا الحل تعطيه النقطه B على الشكل (٨ــ٤)٠

وأخيرا أذا أعتبرنا السعر والكميه التى يمكن التوصل اليها أذا كان كلا البائـــــــع والمشترى متقبلين للاسعار (أى أن الاسعار تملى عليهما) فان مقلوب دالتى الطــــلب (٨ــ٤٢) والعرض (٨ــ٤٤)٠ سوف تكون فعاله وتتحدد الكميه الشبه ــ تنافسيه q^*_{2C} بمساواة سعر العرض والطلب :

$$p^*_{2C} = p_1h'(q^*_{2C}) = rH'(q^*_{2C}) \qquad (٨_٤٦)$$

وسوف يساوى سعر شبه ــ التنافس بين قيمة الانتاج الحدى للمشترى والتكلفةالحديه للبائع ٠ وهذه النتيجه الشبه ــ تنافسيه قد لاتكون حصيلة ممكنه بسوق يتميز بكونـــــــه احتكاريا ثنائيا ، ولكنها تمدنا بنقطة اسناد (مرجع) اخرى مفيده ٠ فمثال الحل الشبه تنافسى تعطيه النقطه C على الشكل (٨ــ٤) ٠

فمن الممكن تعميم بعض نتائج المقارنه بين حلول الاحتكار (B) واحتكار لشـــــراء (S) وشبه التنافس (C) على الشكل (٨ــ٤) لتغطى جميع الحالات التى يكون فيها منحــــنى الطلب $[p_1h'(q_2)]$ بميل سالب يكون فيها منحنى العرض $[rH'(q_2)]$ بميل موجب بمعنى

الحالات التي يكون فيها $h''(q_2) < 0$ وكذلك $H''(q_2) > 0$ وسوف تقع نقاط تـــوازن الاحتكار والاحتكار الثنائي الى الجهه اليسرى من تقاطع منحنى العرض والطلب وبهـذا تكون q^*_{2C} دائما أكبر من q^*_{2B} و q^*_{2S} ففي الشكل (٨ـ٤) تكون $q^*_{2B} > q^*_{2S}$ وهــذه النتيجه لاتتحقق دائما فانتاج الاحتكار والاحتكار الثنائي يعتمد على ميل كل من منحنى الطلب ومنحنى العرض ٠

ويمكن للقارئ من بناء حالة يكون فيها $q^*_{2B} < q^*_{2S}$ وسوف يقع سعر التوازن دائما بين سعري الاحتكار الثنائي ٠ وبما ان توازن الاحتكار يقع على منحنى الطلب على الجهه اليسرى من الحل شبه ــ التنافس ٠

فان $p^*_{2S} > p^*_{2C}$ وبما ان توازن احتكار يقـع على منحـنى العرض على الجهة اليسرى من الحل شبه ــ التنافس فأن $p^*_{2C} > p^*_{2B}$ افترض ان $\pi^*_{S_S}$، $\pi^*_{S_C}$، $\pi^*_{S_B}$ يمثـلون مستويات ارباح البائع في الحالات الثلاثه فانه عموما يكون :

$$\pi^*_{S_S} > \pi^*_{S_C} > \pi^*_{S_B}$$

واذا افترضنا ان $\pi^*_{B_S}$، $\pi^*_{B_C}$، $\pi^*_{B_B}$ يمثلون مستويات ارباح المشتري فانه عموما يكون :

$$\pi^*_{B_S} < \pi^*_{B_C} < \pi^*_{B_B}$$

واثبات هذه اللامتساويات متروك كتمارين للقارئ ٠

التواطيء والمفاوضة : Collusion and Bargaining

أن من العادة الافتراض بأن المشاركين في السوق سوف يتعرفـون على اعتمــاد بعضهم على البعض الاخر بطريقه تعاونيه وأنهم سوف يتوصلون الى اغاق يوافق جميــع الاطراف من حيث السعر والكميه فيمكن لمرحلة المفاوضه ان تتم على خطوتين منفصلتين الاولى أن يقرر المشتركون الكميه التي تمكنهم من الحصول على الحد الاعلى من الربح المشترك وثانيا تقرير السعر الذي يوزع الربح المشترك بينهم ومعادلة هذا الربح هي :

$$\pi = \pi_B + \pi_S = [p_1h(q_2) - p_2q_2] + [p_2q_2 - rH(q_2)]$$
$$= p_1h(q_2) - rH(q_2)$$

وبوضع $d\pi/dq_2$ مساويه لصفر :

$$\frac{d\pi}{dq_2} = p_1h'(q_2) - rH'(q_2) = 0$$

$$p_1h'(q_2) = rH'(q_2)$$

وهذا الربح المشترك سوف يكون عند حده الاقصى عند الانتاج الذي يتساوى عنـده قيمة الانتاج الحدي للمشتري مع التكلفه الحديه للبائع ٠ وهذا مشابها للحل الشـــبه ــ

تنافسى المعطى بالمعادلة (٨ـ٣٩) ويكون مستوى الانتاج التواطئ الاقصى مشابها لمستوى الانتاج الشبه تنافسى q^*_{IC} وسوف يتصرف الاحتكار الثنائى التواطئ بنفس الطريقة التى تتصرف بهما الوحدات المتنافسه وذلك بالنسبه للعالم الخارجى • ليس من الضرورى ان يتبع سعر شبه المتنافس من حل التواطئ لان البائع سوف يرغب بأعلى سعر يمكن الحصول عليه للكميه المطلوبه وكذلك المشترى فانه يرغب بأقل سعر ممكن، فاذا أفترضنا أن الحد الاعلى هو ذلك السعر الذى يجبر ربح المشترى لان يكون صفرا ، وان يكون الحد الادنى هو ذلك السعر الذى يجبر ربح البائع لان يكون صفرا :

$$\frac{p_1 h(q^*_{IC})}{q^*_{IC}} \geq p_2 \geq \frac{rH(q^*_{IC})}{q^*_{IC}} \qquad (٨ـ٤٧)$$

وبما أن ربحا سالبا سوف يجبر أحد الوحدات الانتاجيه على عدم استمرارية عملياتها الانتاجيه ، فان السعر لايمكن تحديده خارج هذه الحدود •

والبديل هو أن نفترض ان المشترى لايمكن أن يعمل اسوء من الحل الاحتكارى وأن البائع لايمكن ان يعمل أسوء من حل الاحتكار الشرائى •

$$p_1 h(q^*_{IC}) - p_2 q^*_{IC} \geq \pi^*_{BS}$$

$$p_2 q^*_{IC} - rH(q^*_{IC}) \geq \pi^*_{SB}$$

وبحل كل واحده من اللامتساويات السابقه لقيمة p_2 :

$$\frac{p_1 h(q^*_{IC}) - \pi^*_{BS}}{q^*_{IC}} \geq p_2 \geq \frac{rH(q^*_{IC}) + \pi^*_{SB}}{q^*_{IC}} \qquad (٨ـ٤٨)$$

وهذه الحدود يمكن الحصول عليها من حلول الاسناد (المراجع) • فاذا كان π^*_{BS} π^*_{SB} موجبتين فان (٨ـ٤٨) سوف تمدنا بمدى أضيق للمفاوضه والمساومه من (٨ـ٤٧) ففى الحالتين يكون تحديد سعرا معينا ضمن حدود المفاوضه معتمدا على قوة المفاوضه النسبيه للبائع والمشترى •

٨ - ٦ ملخص ما سبق SUMMARY

يعتمد ربح محتكر القله والمحتكر الثنائى على افعال وردود افعال منافسيهم وترتكز النظريات المختلفه على افتراضات مختلفه بالنسبه لسلوك السوق • واحد هذه الاساليب هو ان نضع افتراضا عن استجابه معينه ومحددة للوحدات الانتاجيه للتأثير على منافسيهم ويرتكز الحل الشبه تنافسى على افتراض ان الوحدات الانتاجيه تساوى بين السعر والتكلفه الحديه • ويتحقق الحل التواطئ اذا اتحد المشتركين فى السوق معا لتعظيم الربح الكلى للصناعة • ويمكن التوصل الى حل كورنت اذا عظم كل مشترك من ربحه بافتراض ان مستوى انتاج المنافسين لن يتأثر باجراءه هذا • ولكن حل ستاكيل بيرج فى الافتراض

بالاعتراف التفصيلى للمحتكرين الثنائيين بالتغيرات المتداخله لافعالهم • قد يرغب اى منهم فى ان يقوم بدور الرائد او التابع ، ويتم التوصل الى توازن السوق فقط اذا كانت رغباتهم متوافقه • ويمكن تطبيق هذه الحلول على كل من المنتجات المتجانسه والمتفاضله قد يجد منتج المنتجات المتفاضله ان الدعايه تكون مربحه •

ويتحقق الحل الخاص بتقاسم السوق عندما يتبع المشترك فى السوق تحركات منافسيه بالطريقه التى تحافظ له على نصيب ثابت من اجمالى مبيعات الصناعة • بينما يتحقق الحل الخاص بمنحنى الطلب الملتوى اذا ما افترض بائع ان منافسيه سوف يتبعونه فى حالة خفض الاسعار ، لكنهم سوف يتركون السعر بدون تغير اذا مارفع هو السعر •

تشابه احتكار الشراء بواسطة مشترين واحتكار القله فى حالة الشراء مع الاحتكار الثنائى واحتكار القله فى حالة البيع فى انه لاتوجد فى الحالتين افتراضات سلوكيه مقبوله بصفه عامه.ويمكن تعديل معظم النظريات الخاصه بالاحتكار الثنائى واحتكار القله لكى تغطى ايضا احتكار الشراء بواسطة مشترين واحتكار القله فى حالة الشراء وطبقا لافتراض سلوك كورنت سوف يختار كل مشتر مستوا ما من الشراء بافتراض ان المشترين الاخرين لن يتأثروا بتصرفاته •

ويمكن تطبيق نظرية المجموعات التعاونيه وكذلك الغير تعاونيه على الاسواق ذات العدد الصغير من المشتركين (المساهمين) وبتطبيق النظريه الاولى ، يمكن معالجة السوق ثنائى الاحتكار احيانا كلعبه مكونه من شخصين وبحصيله تساوى صفر • يختار كل من المحتكرين الاحتمالات لعدد محدد من الخطط التى تعظم من القيمه المتوقعه لربحه معطيا اختيار الخطه الاكثر تفضيلا لجانب منافسيه • يتساوى الربح المتوقع لاحد المحتكرين الثنائيين (والذى يساوى الخسارة المتوقعه للمحتكر الاخر) مع حصيلة اللعبه اذا كان كلاهما يوظف احتمالاته القصوى • يمكن استخدام البرمجه الخطيه للحصول على حلول عدديه للعبه المكونه من شخصين وبحصيله تساوى صفر •

يتطلب تطبيق نظريه المجموعة المتعاونه ان يكون المساهمين فى السوق قادرين على عمل اتفاقيات ربط مع بعضهم البعض ، ويشترط حل ناش قسمه معقوله وعادلة للربح من العمل التعاونى للمشتركين •

يتحدى البائع الوحيد المشترى الوحيد فى الاحتكار الثنائى يتحدد السعر والكميه اما من خلال سيادة مشترك واحد وإما عن طريق التفاوض والتعاون • وتستوجب الاسعار ، الكميات والارباح التى يمكن التوصل اليها فى حالة احتكار القله ، واحتكار

القله فى حالة الشراء، وحالة شبه التنافس وجود نقاط اسناد عند تحليل الاحتكار الثنائى ويعظم مستوى الانتاج فى حالة الحل شبه التنافسى الربح المشترك للبائع والمشـــترى، ويكون التفاوض قاصرا على سعر كميه ما • وتبنى قيود التفاوض على السعر بناء على افتراض حول مستويات دنيا مقبوله للربح •

EXERCISES

8-1 Consider a duopoly with product differentiation in which the demand and cost functions are $q_1 = 88 - 4p_1 + 2p_2$, $C_1 = 10q_1$, and $q_2 = 56 + 2p_1 - 4p_2$, $C_2 = 8q_2$ for firms I and II respectively. Derive a *price reaction function* for each firm on the assumption that each maximizes its profit with respect to its own price. Determine equilibrium values of price, quantity, and profit for each firm.

8-2 Let duopolist I, producing a differentiated product, face an inverse demand function given by $p_1 = 100 - 2q_1 - q_2$ and have the cost function $C_1 = 2.5q_1^2$. Assume that duopolist II wishes to maintain a market share of $\frac{1}{3}$. Find the optimal price, output, and profit for duopolist I. Find the output of duopolist II.

8-3 Let n duopolists face the inverse demand function $p = a - b(q_1 + \cdots + q_n)$ and let each have identical cost function $C_i = cq_i$. (*a*) Determine the Cournot solution. (*b*) Determine the quasi-competitive solution. (*c*) As $n \to \infty$, does the Cournot solution converge to the quasi-competitive solution?

8-4 Let two duopsonists have production functions $q_1 = 13x_1 - 0.2x_1^2$ and $q_2 = 12x_2 - 0.1x_2^2$ where x_1, x_2 are the input levels employed by the duopsonists. Assume that the input supply function is $r = 2 + 0.1(x_1 + x_2)$ where r is the supply price of the input, and that q_1 and q_2 are sold in competitive markets for prices $p_1 = 2$ and $p_2 = 3$. (*a*) Find the input reaction functions. (*b*) Determine the Cournot equilibrium values for $x_1, x_2, q_1, q_2, \pi_1, \pi_2$.

8-5 Let the profit matrix of a two-person, zero-sum game have elements a_{ij} ($i = 1, \ldots, m$; $j = 1, \ldots, n$), and let r_i ($i = 1, \ldots, m$) and s_j ($j = 1, \ldots, n$) be the optimal probabilities for participants I and II respectively. Prove that these probabilities are also optimal for a game with profit elements $a_{ij} + k$ where k is a constant.

8-6 Consumers distributed uniformly along a straight-line road are the potential market for two duopolists whose decision problem is where to locate their sales offices. Demand is completely inelastic, and consumers will purchase from whichever sales office is nearer. Assume that the road is 4 miles long and that, for simplicity, each firm has exactly five possible strategies: it may locate itself at either end or at the 1-mile, 2-mile, or 3-mile markers. Let the payoffs to the duopolists be their respective market shares. (*a*) Is this a zero-sum (or constant-sum) game? (*b*) What is the payoff matrix? (*c*) What are optimal strategies for the duopolists?

8-7 Show that the feasible utility region for mixed strategies in Fig. 8-3 is *ABCD* if the duopolists have two pure strategies each as stated in the discussion of Fig. 8-3.

8-8 Let the buyer and seller for the bilateral monopoly discussed in Sec. 8-5 have the production functions $q_1 = 270q_2 - 2q_2^2$ and $x = 0.25q_2^2$ respectively. Assume that the price of q_1 is 3 and the price of x is 6. (*a*) Determine the values of q_2, p_2 and the profits of the buyer and seller for the monopoly, monopsony, and quasi-competitive solutions. (*b*) Determine the bargaining limits for p_2 under the assumption that the buyer can do no worse than the monopoly solution and the seller can do no worse than the monopsony solution. (*c*) Compare your results with Fig. 8-4.

8-9 Assume that the adjustment of each of the two Cournot duopolists to his rival's output level takes a finite length of time. Specifically, let a change in output level from period $t - 1$ to period t be the fixed proportion k of the difference between desired and actual output levels in period $t - 1$. Under what circumstances will this dynamic adjustment process converge to the Cournot equilibrium if the demand function is $p = 100 - (q_1 + q_2)$ and the cost functions are $C_1 = 3q_1$, $C_2 = 2q_2$?

SELECTED REFERENCES

Andrews, P. W. S.: *On Competition in Economic Theory* (New York: St. Martin's, 1964). A nonmathematical review and critique of imperfect-competition theories.

Baumol, William J.: *Business Behavior, Value and Growth* (rev. ed., New York: Harcourt, Brace & World, 1967). Part I covers oligopoly theory. Calculus and geometry are used.

Buchanan, Norman S.: "Advertising Expenditures: A Suggested Treatment," *Journal of Political Economy*, vol. 50 (August, 1942), pp. 537–557. Also reprinted in R. V. Clemence (ed.), *Readings in Economic Analysis*, (Cambridge, Mass.: Addison-Wesley, 1950), vol. 2, pp. 230–250. A geometric determination of the optimum advertising expenditure for a firm.

Cohen, Kalman J., and Richard M. Cyert: *Theory of the Firm* (Englewood Cliffs, N.J.: Prentice-Hall, 1965). Imperfect competition is covered in chaps. 10–13. Calculus and geometry are used.

Cournot, Augustin: *Researches into the Mathematical Principles of the Theory of Wealth*, trans. by Nathaniel T. Bacon (New York: Macmillan, 1897). The original statement of the Cournot solution. Also one of the first applications of mathematics to economics.

Efroymson, Clarence W.: "A Note on Kinked Demand Curves," *American Economic Review*, vol. 33 (March, 1943), pp. 98–109. Also reprinted in Clemence, *Readings in Economic Analysis*, vol. 2, pp. 218–229. A nonmathematical discussion of kinked demand curves and full-cost pricing.

Fellner, William: *Competition Among the Few* (New York: Knopf, 1949). A nonmathematical discussion of oligopoly and bilateral monopoly. Contains an exposition of the Stackelberg solution.

Friedman, J. W.: *Oligopoly and the Theory of Games* (Amsterdam: North-Holland, 1977). A comprehensive survey of the subject with some advanced mathematical treatment.

Luce, R. Duncan, and Howard Raiffa: *Games and Decisions* (New York: Wiley, 1957). A comprehensive treatise with only simple mathematics in the text. More difficult proofs are in appendixes.

Malinvaud, E.: *Lectures on Microeconomic Theory* (Amsterdam: North-Holland, 1972). Duopoly and bilateral monopoly are covered in chap. 6.

الفصل التاسع

توازن الأسواق المتعددة
MULTIMARKET EQUILIBRIUM

إن تحليل تحديد وتوزيع الأسعار يمكن أن يتم على مستويات ثلاثة بزيادة فى التعميم :

(١) توازن المستهلك الفردى أو المنتج (٢) توازن السوق ٠
(٢) التوازن فى نفس الوقت لجميع الأسواق ٠

أما النوع الأول من التحليل وكان موضوع الأبواب من الثانى إلى الباب الخامس والنوع الثانى من التحليل كان موضوع الأبواب من السادس إلى الثامن وهذا الباب خاص بالنوع الثالث من التحليل ٠

إن التحاليل النظريه تحتوى عادة على معلومات ومتغيرات وافتراضات سلوكيه تسمح بتحديد قيم محدده للمتغيرات حالما تكون المعلومات data قد عرفت ٠ فاذا اعتبرنا التحاليل الخاصه بالمستهلك الفردى ، فان المعلومات الملصقه به هى دالة منفعيته دخله ، وأسعار السلع ٠ أما المتغيرات فهى كمية السلع المشتراه والمستهلكه والافتراض السلوكى الأساسى هو رغبته فى الحصول على الحد الأعلى من منفعته ٠ وبالمثل تكون التحاليل الخاصه المنتج المفرد ، فمعلوماته هى دالة انتاجه وأسعار جميع الدواخل والخوارج inputs and outputs أما المتغيرات فهى كمية الدواخل التى يشتريها وكمية الخوارج التى ينتجها ويبيعها ، ويكون الافتراض السلوكى هو رغبته فى الحصول على الحد الأعلى من الربح ٠ ولكن تحاليل أى وحدة متفرده لايلقى الضوء على تحديد الأسعار ، لأن جميع الأسعار قد اعتبرت على أنها مؤشرات (كميات متغيرة القيمة parameters) ٠

ان تحاليل التوازن فى السوق المفرده يعتبر أكثر عمومية بعض الشىء ويتحدد السعر المفرد كنتيجة لسلوك عدد كبير من المستهلكين فى الحصول على الحد الأعلى من منفعتهم

وكذلك سلوك عدد كبير من المنتجين فى الحصول على الحد الأعلى من الربح . فتكون المعلومات الخاصه بتحليل التوازن فى سوق السلع هى دالتى المنفعه والانتاج لجميع المستهلكين والمنتجين ، ودخولات جميع المستهلكين وأسعار جميع العوامل وكذلك اسعار جميع السلع عدى السلعه تحت الاعتبار وتكون المتغيرات الصريحه explicit variables هى سعر السلعه والمشتروات والمبيعات للسلعه لكل مستهلك ومنتج . ويمكن اضافة شرط خلو السوق market cleared (اجمالى الطلب يجب ان يساوى اجمالى العرض) لافتراض الحصول على الحد الأعلى من المنفعة والربح . وبالمثل تكون تحاليل سوق العوامل المفرد ماعدا ان دخل المستهلكين يكون محددا بمبيعات عواملهم .

ان سعر كل سلعه وكل عامل من العوامل يكون بمثابة متغير لتحاليل السوق الخاصه به ويكون مؤشرا لتحاليل الأسواق الأخرى الباقيه . فلايوجد ضمان أن ينتج مجموعه متوافقة من الأسعار من الحل المجزء piecemeal solution وذلك اذا أخذنا كل سوق على حده وسوف يكون من المصادفات أن السعر المفروض للسلعه Q_j فى تحاليل سوق السلعه Q_k هو نفس السعر الذى حددته تحاليل السوق للسلعه Q_j على حده .

ان جميع الأسواق تكون متداخله ولها علاقه ببعضها البعض . فالمستهلكون ينفقون دخلهم على جميع السلع ، ويكون الطلب على كل واحد من هذه السلع معتمدا على أسعارها كلها . فاذا كانت السلعتان Q_1 و Q_2 بدائل أجماليه gross substitutes فان أى زيادة فى سعر Q_1 سوف يدفع المستهلكين جميعا لتعويض Q_2 بدلا من Q_1 ولكن لو ان هاتين السلعتين كانتا متكاملتان ومتلازمتان فى الطلب complements فان أى زيادة فى سعر أحد هما قد يدفع المستهلكين لضبط استهلاكهم من كلا السلعتين (راجع الجزء ٢-٥) فمن الممكن تعريف زوجين من الدواخل على أساس أنهما بدائل أو على أساس أنهما تكمل كل وحدة منهما الأخرى بالاضافه الى أن الانتاج والاستهلاك لايكونا مستقلين فالمستهلكين يكسبون دخلهم من بيع عملهم كخدمات يقدمونها وكذلك العوامل الانتاجيه الاخرى المهمة للمنتجين .

وكنتيجة لهذه العلاقات المتداخله ، فان التوازنات لأسواق العوامل وأسواق الانتاج يجب أن تحدد فى نفس الوقت من أجل تأمين الحصول على مجموعة متوافقة من الأسعار .

ان المعلومات الخاصه بتحديد توازن الأسواق المتعددة بصفة عامه هى دالتى المنفعة والانتاج لجميع المستهلكين والمنتجين وكذلك مايمتلكونه مبدئيا من العوامل و / أو السلع . فالمتغيرات هى أسعار جميع العوامل والسلع والكميات المشتراه والمباعه من قبل كل مستهلك ومنتج . وتتطلب الافتراضات السلوكيه أن تكون عملية الحصول على الحد

الاعلى من المنفعة والربح متمشية مع شرط خلو كل من الاسواق ٠

ان مناقشة تحاليل توازن الاسواق المتعددة لنظام التبادل البحت Pure exchange تكون فى الجزء ٩ـ١ ويكون موضحا لانظمة السلعتين فى الجزء ٩ـ٢ ثم وسعت التحاليل لتغطى الانتاج والتبادل المقايضه فى الجز ٩ـ٣) أما فى الجزء (٩ـ٤) فاننا نناقش مشاكل تحديد الاسعار المطلقه absolute price واختيار معيارا للقيمه standard of value

٩ - ١ المقايضة (المبادلة) البحته PURE EXCHANGE

ان المقايضه البحته تتعامل مع مشاكل التوزيع والتسعير لمجتمع ما مكون من عدد n من الافراد الذين يتبادلون ويستهلكون كميات محدودة من عدد m من السلع ٠ ويكون كل واحد من افراد المجتمع مالكا لسلعة واحده او اكثر وان يكون حرا فى بيع وشراء ما عنده وما يحتاجه باسعار السوق السائدة فيمكن تفسير عمليات البيع والشراء على انها صفقات مقايضه تحيل مستهلكا ممتلكا لشعرين من الكمثرى وثلاثة من التفاح وافترض انه لايوجد اى سلع اخرى ٠ فاسعار السوق السائدة سوف تحدد الشروط التى سوف يتم من خلالها عملية مقايضة الكمثرى للتفاح او التفاح للكمثرى فلو كان سعر الكمثرى خمسة قروش وسعر التفاحة عشرة قروش فان المستهلك سوف يحصل على تفاحة واحدة مقابل بيع كمثرتين او كمثرتين مقابل تفاحة واحدة فاذا عطينا اسعار السوق والممتلكات الاوليه ، فان تبادل اى مستهلك سوف تتحدد بدالة منفعته العاديه ٠ وسوف تكون حالة نادرة اذا لم يستطع اى مستهلك من رفع مستوى اكتفائه من خلال عملية المقايضه ٠ فالمستهلك سوف يبيع جزءا مما عنده من السلع ليضيف لما عنده مادام قادرا على زيادة الرقم القياسى لمنفعته

التوازن للمستهلك i Equilibrium of the *i*th Consumer

نعرف فائض الطلب للمستهلك i للسلعه j ونرمز له (E_{ij}) على انه الفرق بين الكمية التى تستهلكها (q_{ij}) وماعنده مبدئيا (q_{ij}^0) :

$$E_{ij} = q_{ij} - q_{ij}^0 \qquad j = 1, \ldots, m \qquad (١ـ٩)$$

فلو ان ما استهلكه من Q_j فاق ماعنده مبدئيا ، فان فائض طلبه سوف يكون موجبا ، فهو يشترى Q_j من السوق ٠ فلو ان استهلاكه كان اقل مما عنده ، فان فائض طلبه سوف يكون سالبا ، فهو يبيع Q_j فى السوق فليس من الممكن تحديد علاقة فائض طلبه مسبقا ٠ فهو اما ان يبيع او ان يشترى Q_j فالتمييز الحاد بين المشترين والبائعين المستخدم فى الباب السادس لايكون ممكنا هنا ٠

فدخل المستهلك يساوي قيمة ماعنده :

$$y_i = \sum_{j=1}^{m} p_j q_{ij}^0 \qquad (٩_٢)$$

فهذه هي كمية القوة الشرائيه لو انه باع جميع ماعنده فمن اجل ربط التحاليل بتلك في الباب الثاني ، نفترض ، الان انه سوف يبيع جميع ماعنده وتستخدم مايتحصل عليه منها لشراء سلع بالاسعار السائدة في السوق • فقيمة السلع التي يشتريها والتي يستهلكها يجب ان تساوي دخله كما هو معطى بالمعادلة(٩ــ٢) :

$$y_i = \sum_{j=1}^{m} p_j q_{ij} \qquad (٩_٣)$$

فمشترواته سوف تحتوي ، في اغلب الأحيان ، على بعض السلع التي باعها ، ولكن هذا لايضر لأن القيام بعمليات البيع والشراء لاتكلفه شيئا كما هو مفروض فيمكن حذف الصفقات التي تلغي نفسها بنفسها بدون ان تؤثر على التحاليل ولذلك فانه يفترض ان المستهلك سوف لايبيع ويشتري نفس السلعه • ويمكن صيغة شرط ميزانيته بدلالة فائض طلباته • وبطرح (٩ــ٢) من (٩ــ٣) وبالتعويض من (٩ــ١) ،

$$\sum_{j=1}^{m} p_j(q_{ij} - q_{ij}^0) = \sum_{j=1}^{m} p_j E_{ij} = 0 \qquad (٩_٤)$$

والتي تنص على ان القيمه الصافيه لفائض طلبات المستهلك يجب ان تساوي صفرا • فشرط ميزانية المستهلك بهذه الصيغة وعلى هذا الشكل يوضح ان قيمة السلع التي يشتريها يجب ان تساوي قيمة السلع التي يبيعها •

ان تحاليل التوازن للمستهلك والتي ناقشناها في الباب الثاني تحتاج الى تعديلات طفيفة لتطبيقها على المستهلك في اقتصاد المقايضة ــ البحته فمنفعة المستهلك القياسية تكون بدلالة كميات السلع التي يستهلكها ، ولكن يمكن صيغتها بدلالة فائض طلباته وما عنده من السلع وذلك بتعويض $q_{ij} = E_{ij} + q_{ij}^0$ من (٩ــ١)

$$U_i = U_i(q_{i1}, \ldots, q_{im}) = U_i(E_{i1} + q_{i1}^0, \ldots, E_{im} + q_{im}^0) \qquad (٩_٥)$$

فالمستهلك يرغب في الحصول على الحد الاعلى من قيمة منفعته القياسية تحت شرط ميزانيته فباستخدام نمط دالة المنفعة في(٩ــ٥) وشرط الميزانيه في (٩ــ٤) تكون الدالة :

$$V_i = U_i(E_{i1} + q_{i1}^0, \ldots, E_{im} + q_{im}^0) - \lambda\left(\sum_{j=1}^{m} p_j E_{ij}\right) \qquad (٩_٦)$$

ثم نضع الاشتقاقات الجزئيه للدالة V_i بالنسبه لفائض الطلبات و مساويه لصفر :

$$\frac{\partial V_i}{\partial E_{ij}} = \frac{\partial U_i}{\partial E_{ij}} - \lambda p_j = 0 \qquad j = 1, \ldots, m \qquad (٩_٧)$$

$$\frac{\partial V_i}{\partial \lambda} = -\sum_{j=1}^{m} p_j E_{ij} = 0$$

وبما ان $dE_{ij}/dq_{ij} = 1$ فان المجموعة الاولى من معادلات (٩ــ٧) يمكن صياغتها بدلالة زيادات المنفعة القياسية :

$$\frac{\partial U_i}{\partial E_{ij}}\frac{dE_{ij}}{dq_{ij}} - \lambda p_j = \frac{\partial U_i}{\partial q_{ij}} - \lambda p_j = 0 \qquad j = 1, \ldots, m$$

فشرط الدرجة الاولى للمستهلك المفرد هى نفسها الشروط المالوفه من الباب الثانى، فالمستهلك يشترى ويبيع السلع حتى يكون معدل ابدال السلع لكل زوج من السلع (= لنسبه لزيادات منفعتهم القياسيه) مساويا لنسبه اسعارهم ٠ اما شروط الدرجة الثانيه فافتراض شبه ــ التقعر المنضبط بانتظام(راجع الجزء ٢ــ٦)٠

فلو ان شروط الدرجه الثانيه تحققت ، فان من الممكن اشتقاق فائض متطلبات المستهلك i من شروط الدرجه الاولى ٠ فنحذف من (٩ــ٧) ثم الحل للحصول على العدد m من فائض المتطلبات بدلالة اسعار السلع :

$$\text{(٩ــ٨)} \qquad \hat{e}_{ij} = \hat{E}_{ij}(p_1, \ldots, p_m) \qquad j = 1, \ldots, m$$

ويعتمد فائض متطلبات المستهلك على اسعار جميع السلع فاذا كان ماعنده من Q_j لا يساوى صفرا فان فائض طلبه للسلعة Q_j قد تكون موجبا لبعض مجموعات من الاسعار ويكون سالبا للبعض الاخر

لقد اثبتنا فى الجزء (٢ــ٣)ان دوال طلب المستهلك تكون متجانسه من الدرجه صفر فى الدخل والاسعار ٠ فمكن الممكن اثبات نظرية مماثله لاقتصاد المقايضه البحته : ان دوال فائض طلب المستهلك تكون متجانسه من الدرجة صفر فى الاسعار ، بمعنى ان فائض المتطلبات سوف تظل غير متغيرة اذا زادت جميع الاسعار او انخفضت بنفس النسبة[1] فلو ضاعفنا جميع الاسعار فان ذلك سوف يضاعف كلا من قيمة ماعند المستهلك وتكلفة السلع التى يشتريها ٠ فلو ان ما عند المستهلك يكون كمثرا وتفاح وان اسعارهم ارتفعت من خمسة وعشرة قروش الى عشرة وعشرون قرشا على التوالى فان بامكان المستهلك الحصول على تفاحة واحدة لاثنين من الكمثرا او اثنين من الكمثرا للتفاحة الواحدة ففى مثل هذا الاقتصاد وبالمقايضة فان المستهلك سوف يكون راغبا فى نسب تبادل السوق بدلا من مستويات الاسعار البحته ٠

ان الرسم البيانى (الشكل ٩ــ١) يحتوى على بيان وصفى لتوازن المستهلك المفرد

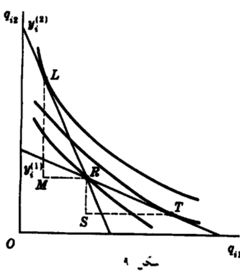
---

(١) الاثبات مشابها لذلك فى الجزء (٢ــ٣) بتعويض kp_j فى شرط الميزانية فى (٩ــ٦) وبوضع اشتقاقاتها الجزئيه مساويه لصفر للحصول على نظام مشابه لـ (٩ــ٧) وقسمة المعادلات$(m+1)$ الاولى على المعادلات m لحذف و k، ثم نستخرج k كعامل مشترك من المعادلة $(m+1)$

فما يمتلكه المستهلك تعادليه احداثيات النقطه R وتكون خط دخله هو المحـــل المهندس لجميع الكميات الخليط والتي يكون لها نفس القيمه في السوق كما لما تمتلكــه •
فلو ان $y_i^{(1)}$ يمثل خط دخله ، فانه سوف يعمل على الحصول على الحد الاعلــى من منفعته بتحركه الى T فهو سوف يبيع RS وحدة من Q_2 ويشتري ST وحدة من Q_1 وذلـــك نتيجة لتحركه من R الى T ويكون فائض طلبه للسلعة Q_1 موجبا ويكون فائض طلبه للسلعة Q_2 سالبا •

افترض ان سعر Q_1 زاد بالنسبه لسعر Q_2 وان خط دخله الجديد هو $y_i^{(2)}$ فان نقطة L تكون موقع المنفعة القصوى بالنسبه لهذا الخط الجديد للدخل فالمستهلك سوف يبيع L وحدة من MR ويشتري Q_1 وحدة من ML ذلك نتيجة لتحركه مــن R الى L لذا نرى ان اى تغير في السعر كان نتيجته هو تغير في اشارات فائـــض متطلبات المستهلك • فالان ، يكون فائض طلبه للسلعه Q_1 سالبا ، وفائض طلبـــه للسلعة Q_2 موجبا •

ان عدم اهمية مستويات السعر البحته يكون واضحا من التحاليل البيانيه على الرسم فملكية المستهلك تكون معطاة بنقطة تمثل الكميات الماديه •ويكون خط دخله مارا خلال هذه النقطه بميل يساوي سالب نسبه اسعار السلع • فالتغير النسبي لكلا السعرين سوف يترك نسبتهما غير متأثرة وسوف لا يتغير الميل ولا موقع خط الدخل •



شكل ٩

توازن السوق : Market Equilibrium

يمكن بناء دالة اجمالي فائض الطلب للسلعة Q_j وذلك بتجميع دوال فائض الطلـــب لكل مستهلك من المستهلكين وعددهم n :

$$E_j = \sum_{i=1}^{n} E_{ij}(p_1, \ldots, p_j, \ldots, p_m) = E_j(p_1, \ldots, p_j, \ldots, p_m)$$

وهذه الدالة تكون ايضا بدلالة اسعار السلع وعددها m ويمكن الحصول على توازن جزئى للسوق j اذا كان فائض الطلب للسلعة Q_j مساويا لصفر وذلك عندما تكون بقية الاسعار $(m-1)$ معطاة قيم ثابته :

$$E_j(p_1^0, \ldots, p_j, \ldots, p_m^0) = 0 \qquad (٩_٩)$$

وشرط (٩ــ٩) يكافئ الشرط الذى يتطلب ان يكون الطلب مساويا للعرض • ويمكن الحصول على سعر التوازن للسلعه Q_j وذلك بحل المعادلة(٩ــ٩) لقيمة p_j التى تعتمد على الاسعار المعينه للسلع الاخرى$(m-1)$وتتحدد مشتريات ومبيعات المستهلكين كل على حدة بتعويض سعر التوازن فى دوال فائض الطلب المفرده •

توازن الأسواق المتعددة Multimarket Equilibrium

والان نتعامل مع جميع الاسعار كمتغيرات وتعتبر التوازن فى نفس الوقت لجميع الاسواق وعدد m فاجمالى فائض الطلب يجب ان يساوى صفرا فى كل سوق :

$$E_j(p_1, \ldots, p_m) = 0 \qquad j = 1, \ldots, m \qquad (١٠_٩)$$

فشروط التوازن تكون نظام مكون من m معادلة محتوية على n متغير ولكن (٩ــ١٠) لاتحتوى على اكثر من $(m-1)$ من المعادلات المستقله•

ان شروط الميزانيه للمستهلكين جميعا ليست شروط توازن ولكنها متطابقات identities تتحقق لاى مجموعة من الاسعار ، وبتجميع جميع شروط الميزانيه المعطاه بالمعادلة (٩ــ٤) لجميع المستهلكين •

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} p_j E_{ij} = \sum_{j=1}^{m} p_j E_j = 0 \qquad (١١_٩)$$

حيث ان $E_j = \sum_{i=1}^{n} E_{ij}$ وهذا النمط الاجمالى لشروط الميزانيه ليس الا متطابقة تتحقق لاى مجموعة من الاسعار وهذه المتطابقة تسمى قانون فالراز *Walras' law* (بعض الاحيان ينطق قانون فالراز) وتتطلب شروط التوازن ان كل اجمالى فائض الطلب يساوى صفرا اذا كانت جميع الاسعار موجبة ، ومن الواضح انه اذا كانت $E_j = 0$، فان قيمة فائض الطلب لـ Q_j $(p_j E_j)$ يجب ايضا ان يساوى صفره فاذا كانت الاسواق الـ $(m-1)$ الاولية فى توازن فان اجمالى قيمة فائض طلباتهم تساوى صفر :

$$\sum_{j=1}^{m-1} p_j E_j = 0 \qquad (١٢_٩)$$

وبطرح (٩ــ١٢)من(٩ــ١١)

$$\sum_{j=1}^{m} p_jE_j - \sum_{j=1}^{m-1} p_jE_j = p_mE_m = 0$$

ويتبع من هذا ان $E_m = 0$ اذا كانت $p_m \neq 0.$ فاذا تحققت التوازن فى الاسواق لـ $(m-1)$فان التوازن سوف يتحقق فى السوق الـ m اليا .

ان توازن الاسواق المتعددة تصفه كاملا المعادلات الـ $(m-1)$ فى(٩ـ١٠) فاضافه المعادلة m والتى تعتمد على المعادلات الـ$(m-1)$ الاخرى سوف لايضيف اية معلومات جديدة . وبما ان معادلات (٩ـ١٠)تكون مستقلة وظيفيا ، فان مصفوفة جاكوب الخاصة بهم Jacobian تكون مطابقة لصفر ، ولايكون هناك حل فريد محلى لقيمة p_j ، (راجع الجزء A-2) ان عدم المقدرة على تحديد مستويات الاسعار البحته يجب ان لايكون نتيجة مفاجئة لو اننا تذكرنا ان المستهلكين راغبين فقط فى نسب المبادلة فى اقتصاد من نوع المقايضة .

وبما ان دوال فائض الطلب تكون متجانسه من الدرجة صفر فى الاسعار فان عدد المتغيرات يمكن تخفيضه الى $(m-1)$ وذلك بقسمة الاسعار البحته الـ m بسعر احد السلع المختارة بطريقة عشوائية ، فلو ان Q_1 وقع عليها الاختيار ، فان(٩ـ١٠)يمكن اعادة كتابتها كالتالى :

$$E_j = E_j\left(1, \frac{p_2}{p_1}, \ldots, \frac{p_m}{p_1}\right) \qquad j = 1, \ldots, m \qquad (١٣ـ٩)$$

فالمتغيرات فى (٩ـ٣) هى اسعار Q_j $(j \neq 1)$ بالنسبه لسعر $Q_1.$ بمعنى انها نسب المقايضة بالنسبه للسلعه $Q_1.$ فنحذف اى معادلة من (٩ـ١٣) نحصل على نظام مكون من$(m-1)$ معادلة وهذا النظام المكون من معادلات تفاضليه يكون له حل رياضى فريد بالنسبه بنسب الاسعار الـ$(m-1)$ هذا اذا لم تنمحى قيمة مصفوفة جاكوب فى حدود جوار صفر neighborhood. فهذا الحل الرياضى الفريد انما هو توازن لاسواق متعددة وذلك اذا احتوى على كميات ونسب اسعار حقيقية وغير سالبة .

ومن الممكن بناء انظمة اسواق متعددة محدده بحيث يكون لها حلول توازن ، وبالمثل يمكن بناء انظمة لايكون لها حلول توازن اما فى هذا الباب فان التركيز على الانظمه التى يكون لها حلول توازن . اما الشروط التى تتحقق اولا تتحقق بها التوازن فانها سوف تكون من موضوعات الباب العاشر .

فحالما تحدد نسب المقايضه للتوازن من(٩ـ١٣) فان مشتروات ومبيعات كل فرد يمكن تحديدها بالتعويض فى دوال فائض الطلب المفرده . وعلى كل حال ، فانه يمكن

تحديد توازن الاسواق المتعددة بطريقة مباشرة بدون اللجوء الى دوال فائض الطلب الاجمالي .فدوال الطلب المفرد تكون متجانسة من الدرجة صفر في الاسعار ويمكن كتابتها على نمط (٩ـ١٣)

$$E_{ij} = E_{ij}\left(1, \frac{p_2}{p_1}, \ldots, \frac{p_m}{p_1}\right) \qquad \begin{matrix} i = 1, \ldots, n \\ j = 1, \ldots, m \end{matrix} \qquad (٩ـ١٤)$$

والان نضيف شرط خلو السوق :

$$\sum_{i=1}^{n} E_{ij} = 0 \qquad j = 1, \ldots, m \qquad (٩ـ١٥)$$

فالنظام المكون من(٩ـ١٤) و(٩ـ١٥) يحتوى على $(mn + m)$ معادلة بحيث ان$(m - n)$ تمثل فائض الطلبات المفرد ، وان$(m - 1)$تمثل نسب المقايضة كمتغيرات .

وكما سبق فان النظام يكون معتمدا وظيفيا ولا يمكن حله لمستويات الاسعار البحته .

٩ ٢ تبادل السلعتين TWO-COMMODITY EXCHANGE

ان من الممكن توضيح اوجه مهمة جدا لتوازن الاسواق المتعدده وذلك من خلال الامثلة التي يتبادل فيها شخصين سلعتين ونعطى هنا امثله من حساب التفاضل والتكامل وامثلة من الهندسة .

مثال حساب التفاضل والتكامل : A Calculus Example

افترض ان الشخص I يمتلك 78 وحدة من Q_1 ولاشيء من Q_2, وان دالة منفعته هي :

$$U_1 = q_{11}q_{12} + 2q_{11} + 5q_{12}$$

وبتعويض $q_{11} = E_{11} + 78$ وكذلك $q_{12} = E_{12}$ في دالة منفعته ثم نكون الدالة :

$$V_1 = (E_{11} + 78)E_{12} + 2(E_{11} + 78) + 5E_{12} - \lambda(p_1E_{11} + p_2E_{12})$$

ضع الاشتقاقات الجزئيه لـ V_1 مساويه لصفر :

$$\frac{\partial V_1}{\partial E_{11}} = E_{12} + 2 - \lambda p_1 = 0$$

$$\frac{\partial V_1}{\partial E_{12}} = E_{11} + 83 - \lambda p_2 = 0$$

$$\frac{\partial V_1}{\partial \lambda} = -(p_1E_{11} + p_2E_{12}) = 0$$

ويستطيع القارىء من التحقق من ان شرط الدرجة الثانيه المقدم في الجزء (٢ـ٢) قد تحقق .

وبحذف λ وحل شروط الدرجة الاولى لقيم E_{11} وقيم E_{12}, فان دوال فائض الطلب

للشخص I تكون :

$$E_{11} = \frac{p_2}{p_1} - 41.5 \qquad E_{12} = 41.5\frac{p_1}{p_2} - 1$$

ويكون فائض طلباته بدلالة نسب سعر السلعة وتكون متجانسه من الدرجه صفر فى الاسعار ويتحقق شرط ميزانيته لاى مجموعة اسعار :

$$p_1\left(\frac{p_2}{p_1} - 41.5\right) + p_2\left(41.5\frac{p_1}{p_2} - 1\right) = 0$$

وتمتلك دوال فائض الطلب جميع المميزات العاديه • فاى زيادة فى p_1 بالنسبه لـ p_2 سوف يخفض E_{11} ويرفع E_{12}. وان اى زيادة فى p_2 بالنسبه لـ p_1 سوف يزيد E_{11} ويخفض E_{12}. •

افترض ان دالة المنفعة للشخص هى :

$$U_2 = q_{21}q_{22} + 4q_{21} + 2q_{22}$$

وان ممتلكاته مكونه من 164 وحدة من Q_2 ولاشىء من Q_1. فاشتقاق شبيه باشتقــاق الشخص I يعطى دوال فائض الطلبات :

$$E_{21} = 84\frac{p_2}{p_1} - 1 \qquad E_{22} = \frac{p_1}{p_2} - 84$$

ان شرط ميزانية II سوف يتحقق دائما ، وان فائض طلباته سوف يكون متجانسا مــن الدرجة صفر فى الاسعار •

وبتطبيق شرط خلو السوق :

$$E_1 = E_{11} + E_{21} = 85\frac{p_2}{p_1} - 42.5 = 0$$

$$E_2 = E_{12} + E_{22} = 42.5\frac{p_1}{p_2} - 85 = 0$$

فاى واحدة من هاتين المعادلتين كافيه لتحديد نسب المقايضة للتوازن فنحل المعادلة الاولى ، نجد ان $p_2/p_1 = 0.5$. وبحل الثانيه نجد ان $p_1/p_2 = 2$. فالحليين متطابقين

ففى حالة التوازن ، وحده واحده من Q_1 يمكن مبادلتها بوحدتين من Q_2. •

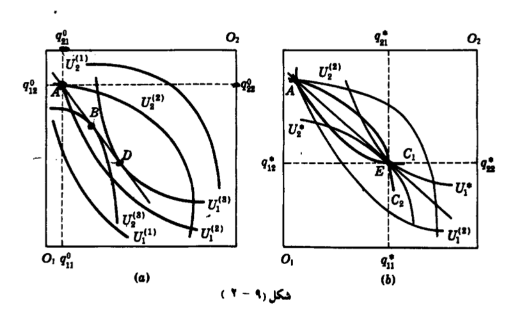
وبتعويض نسب اسعار التوازن فى دوال فائض الطلب المفرده •

$$E_{11} = -41 \qquad E_{12} = 82 \qquad E_{21} = 41 \qquad E_{22} = -82$$

فالشخص I يعطى الشخص II وحدة من Q_1 مقابل Q_2. وحدة من O_2 .

صندوق ادج ورث : The Edgeworth Box

يمثل صندوق ادج ورث الصورة الهندسيه لاقتصاد المقايضه البحته الذى يشتمل على شخصين يتبادلان سلعتين ان خارطة السواء indifference للشخص I تكون مصورة بالطريقة العادية بنقطه اصل O_1 فى الركن الجنوبى الغربى من الشكل (٩ــ٢) • فثلاثة من منحنيات السواء indifferencecurves ممثلة فى الشكل (٩ــ٢ ١) بحيث ان $U_1^{(1)} < U_1^{(2)} < U_1^{(3)}$ اما الرسم البيانى لمنحنيات السواء للشخص II فانها دورت 180 درجة بحيث ان نقطة اصلها O_2 تقع فى الركن الشمالى الشرقى من الرسم• وتقاس الكميات q_{21} ، q_{22} من اليمين الى الشمال ومن اعلى الى اسفل بالتوالى كلما تحرك الشخص بعيدا عن نقطة الاصل • فتزداد المنفعة كلما تحرك الى اسفل :
$U_2^{(1)} < U_2^{(2)} < U_2^{(3)}$ ولقد جمعنا بين منحنيات السواء لكلا الشخصين فى رسم بيانى واحد لتكون " صندوق " يكون عرضه مساويا لمجموع ما يمتلكه الشخص من السلعه Q_1 ويكون ارتفاعه مساويا لمجموع ما يمتلكه الشخصان من السلعه Q_2 وتصف كل نقطة داخله ضمن الصندوق او على حدوده توزيعا محددا للكميات المحدودة للسلعتين • فعلى سبيل المثال ، تصف نقطة الاصل Q_2 الحالة التى يمتلك فيها الشخص I كلا السلعتين •



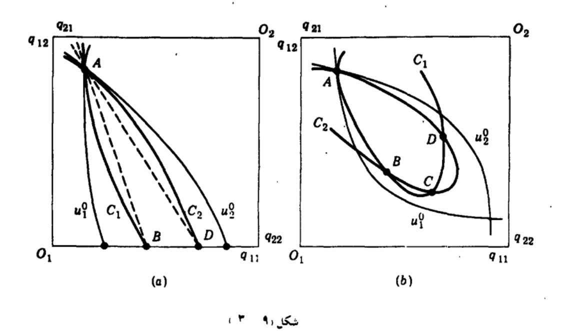
شكل (٩ - ٢)

اعتبر ان مايمتلكه الشخص I مكون من q_{11}^0 و q_{12}^0 وان مايمتلكه الشخص II مكون من q_{21}^0 و q_{22}^0 والتى تصفه النقطه A فى الشكل (٩ــ٢ ١) اما شرط الميزانية لكل واحد منهما فانه ممثل بخط مارا بنقطة A وبميل يساوى سالب نسبة الاسعار • اعتبر خط الميزانيــة المار بنقطتى B. و D. فالشخص I سوف يحصل على الحد الاعلى من منفعته بمبادلة Q_2 مكان Q_1 وذلك بالتحرك من A الى D حيث

ان RCS الخاص به يساوى نسبه الاسعار • وبالمثل فالشخص II سوف يحصل على الحد الاعلى من منفعته بمبادلة Q_1 مكان Q_2 وذلك بالتحرك من A الى B ونسبه الاسعار هذه لاتعطى توازن لاسواق متعددة• فإن RCS لكلا المستهلكين متساويين ولكن I يرغب فى Q_1 بكمية اكبر مما يرغب II فى بيعه ويرغب فى بيع اكثر Q_2 مما يرغب II فى شرائه •

ونعرف منحنى العرض offer curve للشخص I على انه المحل الهندسى لنقط الحصول على الحد الاعلى من المنفعة مثل نقطة D، والتى نحصل عليها كلما دورنا خط الميزانية حول A لنمثل نسب اسعار مختلفة لمنحنى العرض للشخص I من الشكل (٩ــ٢ب)، بالحرف C_1 فهو يمر عبر A ن A سوف تكون نقطه منفعة نمطى اذا كان نسبة الاسعار مساوية لميل منحنى السواء عند نقطة A فلو كان خط الميزانيه بميل اكثر حده فانه سوف يبيع Q_1 ويشترى Q_2، ولكن لو كان خط الميزانيه بميل اقل وحده فانه سوف يشترى Q_1 ويبيع Q_2، فمنحنى العرض يقع اعلى منحنى السواء الاولى $U_1^{(2)}$ ماعدا عند A حيث ان الاثنان يلتقيان • اما بالنسبه للشخص II فان منحنى عرضه هو C_2 وصمم بطريقه مماثله لـ C_1 اما نقطة E. على الشكل (٩ــ٢ب) حيث تقاطع C_1، و C_2، فانها تمثل توازن اسواق متعدده اما نسبة اسعار التوازن فانها تعطى بالميل السالب لخط الميزانية المار بنقطتى A، و E وتكون مستويات المنفعة فى حالة التوازن للشخص I و II هى U_1^* و U_2^* على التوالى • فالمستهلك I يستبدل $(q_{12}^0 - q_{12}^*)$ وحدة من Q_2 من المستهلك II مقابل $(q_{21}^0 - q_{21}^*)$ وحدة من Q_1 .

ان صندوق ادجورث فى الشكل (٩ــ٣ ا) يوضح حالة مزعجه قد تحدث حتى ولو تحققت افتراضات شبه ــ التقعر المنضبط • فما يمتلكه الشخصان يكون ممثلا بالنقطه A ويكون منحنى العرض للشخص I هو C_1 وللشخص II هو C_2 فلا توجد توازن فريد بتعريف تام للاسواق المتعددة لان مايمتلكه I من Q_1 سوف ينفذ قبل مساواة RCSs للمستهلكين • فمن الواضح انه من الافضل لكلا المستهلكين ان يستبدلا • فالافتراض (التخمين) المعقول " هنا هو ان الوضع النهائى سوف يقع فى مكان ما على الخط الممتد BD بسعر محدد بميلى الخطين المستقيمين AD و AB ويجب تقديم افتراضات اضافيه قبل اختيار اى نقطة توازن بعينها • فشكل (٩ــ٣ب) يوضح حالة يتحقق فيها افتراض شبه ــ التقعر المنضبط وتوجد ثلاث نقاط توازن بارزة هى D, C, B وقد يتحقق القارئ من انه لبعض نسب الاسعار، فان Q_2 سوف تكون بمثابة سلعة جيفن Giffen good راجع الجزء (٢ــ٥) للمستهلك I وان Q_1 بمثابة سلعة جيفن للمستهلك II .



شكل (٩ ٣)

٩ - ٣ الإنتاج والتبادل (المقايضة) PRODUCTION AND EXCHANGE

والان توسع تحاليل توازن الاسواق المتعدده يشمل الاقتصاد التى تكون فيه السلع تنتج وتتبادل معا • فما يمتلكه المستهلك يكون مكونا العوامل الاوليه مثل الارض وقوة العمل وبالاضافه فان جميع الارباح التى تكتسبها الوحدات الانتاجيه سوف توزع على المستهلكين • فالمستهلك يبيع عادة العوامل وتستخدم عوائدها مع مايحصل عليه من ارباح لشراء مايحتاجه من السلع • وقد يحتفظ بجزء مما يمتلكه لاستهلاكه الخاص• ومثال ذلك : قوة العمل فالمستهلك نادرا مايعرض للبيع قوته العمل كاملة فقد يحتفظ بجزء منها لاستهلاكه على شكل قضاء وقت فراغ (وقت غير مخصص للعمل) فالمستهلك الذى يمتلك عاملا من العوامل التى لاتعطيه اى متعة ، فانه سوف يعرض كل مايمتلكه من هذا العامل بغض النظر عن سعر السلعة او العامل • فبعض المستهلكين قد يبيع عاملا ويشترى اخر•

ومثال ذلك صاحب الارض الذى يوظف خدم محليين • فاصحاب رؤوس المال سوف يستخدمون العوامل والسلع المنتجه معا لانتاج السلع • لهذه السلع المنتجه سوف تكون مستخدمه كدواخل وكسلع استهلاكيه فى شكلها النهائى (١) •

---

(١) ان من الضرورى ان يميز ، بعض الاحيان السلع استهلاك الوسيط البحته pure intermediate goods والغير مرغوبه من المستهلكين. لانها تنتج ومن ثم تستخدم كدواخل inputs •

توازن المستهلك Equilibrium of the *i*th Consumer

يمتلك كل واحد من الـ n مستهلك كمية تتكون من واحد او اكثر من السلع الاولية وعددها s ونرمز لما يمتلكه المستهلك i بـ $q_{i1}^0, q_{i2}^0, \ldots, q_{is}^0$ فقد يبيع (ويشترى) بالاسعار السائده فى السوق $(p_1, p_2, \ldots, p_s)$ فهو يستخلص متعة من كميات العوامل الاوليه التى يحتفظ بها ومن الكميات $(m-s)$ للسلع المنتجه التى يشتريها .

$$U_i = U_i(q_{i1}, q_{i2}, \ldots, q_{im}) \qquad (٩\text{—}١٦)$$

حيث ان السلع المنتجه مرقمه من $(s+1)$ الى m .

فيكون فائض طلب المستهلك لاى عامل من العوامل يساوى الكمية التى يستهلك ناقصا الكمية الاوليه التى يمتلكها ، وان فائض طلبه لاى سلعة يساوى الكمية التى يستهلك :

$$\begin{aligned} E_{ij} &= q_{ij} - q_{ij}^0 \qquad j = 1, \ldots, s \\ E_{ij} &= q_{ij} \qquad\qquad j = s+1, \ldots, m \end{aligned} \qquad (٩\text{—}١٧)$$

ففائض الطلب لاى عامل قد يكون موجبا ، او سالبا ، او صفر ، ولكنه فى الغالب يكون سالبا لان المستهلك عادة يبيع العوامل من اجل شراء السلع . ففائض طلبه للسلع يجب ان يكون موجبا او صفر . فدخل المستهلك يساوى قيمة مايمتلكه من العوامل زائدا ما يكتسبه من الربح :

$$y_i = \sum_{j=1}^{s} p_j q_{ij}^0 + \sum_{k=s+1}^{m} \sum_{h=1}^{N_k} \theta_{ihk} \pi_{hk} \qquad (٩\text{—}١٨)$$

حيث ان N_k هو عدد الوحدات التى تنتج السلعة k وان π_{hk} هو الارباح للوحدة h التى تقوم بانتاج السلعة k وان $\theta_{ihk} \geqq 0$ المستهلك النسبى من هذه الارباح[١].

فقيمة العوامل والسلع التى يستهلكها يجب ان تساوى دخله :

$$y_i = \sum_{j=1}^{m} p_j q_{ij} \qquad (٩\text{—}١٩)$$

ونحصل على معادلة ميزانية المستهلك بطرح (٩—١٨) من (٩—١٩) ثم نعوض فى (٩—١٧) :

$$\sum_{j=1}^{m} p_j E_{ij} - \sum_{h=s+1}^{m} \sum_{k=1}^{N_k} \theta_{ihk} \pi_{hk} = 0 \qquad (٩\text{—}٢٠)$$

ويكون صافى قيمة فائض طلباته مساويا لما يكتسبه من الربح او الخسارة اذا كان سالبا فالمستهلك ، طبعا يميل الى الحصول على الحد الاعلى من المتعة تحت شرط ميزانيته

---

(١) لقد افترضنا ان كل وحدة من وحدات الانتاج سوف تقوم بانتاج سلعة واحدة والا فسنضطر الى تغيير طريقة الجمع فى المعادلة (٩—١٨) اذا فرضنا ان الوحدات تقوم بانتاج منتجات مشتركة .

فنحصل على الدالة التاليه :

$$Z_i = U_i(E_{i1} + q^0_{i1}, \ldots, E_{is} + q^0_{is}, E_{i,s+1}, \ldots, E_{im}) - \mu\left(\sum_{j=1}^{m} p_j E_{ij} - \sum_{h=s+1}^{m} \sum_{k=1}^{N_k} \theta_{ihk}\pi_{hk}\right)$$

وبوضع الاشتقاقات الجزئيه للدالة Z_i مساويه لصفر :

$$\frac{\partial Z_i}{\partial E_{ij}} = \frac{\partial U_i}{\partial E_{ij}} - \mu p_j = 0 \qquad j = 1, \ldots, m$$

(٩ــ٢١)

$$\frac{\partial Z_i}{\partial \mu} = -\left(\sum_{j=1}^{m} p_j E_{ij} - \sum_{h=s+1}^{m} \sum_{k=1}^{N_k} \theta_{ihk}\pi_{hk}\right) = 0$$

تتطلب شروط الدرجة الاولى بان يساوى المستهلك بين RCS لكل زوج من السلع ونسبة اسعارها • ولقد اثبتنا فى الجزء (٢ــ٦) بأن افتراض شبه ـ التقعر المنضبط حول منطقة ما سوف يضمن تحقيق شروط الدرجة الثانيه • وبالتالى يمكن الحصول على دوال فائض طلبات المستهلك بحل (٩ــ٢١) لقيم الـ m فائض طلب وذلك بدلالة مستويات الربح التى تستمد منها الفائدة وكذلك بدلالة الـ m سعر • ولقد أثبتنا (فيما يلى) أنه من الممكن جعل الأرباح بدلالة أسعار السلع والعوامل ولذا فانه يمكن جعل فائض طلباته بدلالة الاسعار فقط •

$$E_{ij} = E_{ij}(p_1, \ldots, p_m) \qquad j = 1, \ldots, m \qquad (٩ــ٢٢)$$

فالأرباح متجانسة من الدرجه الأولى بالنسبه للأسعار • ومن السهولة التأكد من أن فائض طلبات المستهلك تكون متجانسه من الدرجة صفر بالنسبه لأسعار جميع السلع والعوامل •

توازن الوحدة h من وحدات الصناعة j

Equilibrium of the hth Firm in the jth Industry

ان كل وحدة من وحدات الانتاج سوف تقوم بخلط الدواخل لانتاج سلعة واحدة فقط وذلك حسب القواعد الفنيه technical rules التى تمليها عليه دالة الانتاج [1]

$$\bar{q}_{hj} = f_{hj}(q^*_{hj1}, \ldots, q^*_{hjm})$$

حيث أن $\bar{q}_{hj}$ هو مستوى الخارج للوحدة h فى الصناعة j وأن q^*_{hjk} هى كمية السلعة k التى يستخدمها المنتج كداخل • فالعوامل والسلع$(m-s)$ تستخدم كلاهما كدواخل

فربح صاحب الوحدة الانتاجيه يتكون من ايراداته التنافسيه competitive revenue ناقصا تكلفة الدواخل :

---

(١) فبعض الأحيان تقدم الانتاج بالافتراض البديل الذى ينص على أن كل وحدة تنتج جميع السلع بالاشتراك •

$$\pi_{hj} = p_j f_{hj}(q^*_{hj1}, \ldots, q^*_{hjm}) - \sum_{k=1}^{m} p_k q^*_{hjk}$$

وبوضع الاشتقاقات الجزئية للربح بالنسبه لكل داخل مساويه لصفر :

$$\frac{\partial \pi_{hj}}{\partial q^*_{hjk}} = p_j \frac{\partial q_{hj}}{\partial q^*_{hjk}} - p_k = 0 \qquad k = 1, \ldots, m \qquad (٩\text{—}٢٣)$$

فصاحب الوحدة الانتاجيه سوف يستفيد من كل داخل الى الحد الذى يجعل قيمة انتاجه الحدى الفيزيائى marginal physical product مساويا لسعره • فلو كانت دالة الانتاج محدبه بانضباط فى منطقة ما فان شروط الدرجة الثانية سوف تتحقق فى تلك المنطقه ماعدا عند النقط المنعزلة (راجع الجزء A-3) •

تتطلب الشروط (٩—٢٣) بأن $\partial q_{hj}/\partial q^*_{hjj} = 1$ فاذا استخدم صاحب الوحدة الانتاجيه ماينتجه هو كداخل (مثل : الفلاح الذى يزرع القمح ومن ثم يستخدمه كحبوب) فانه سوف يستفيد منه للنقطة التى يساوى عندها الانتاج الحدى الفيزيائى الوحدة • ويمكن الحصول على دوال فائض طلب صاحب الوحدة الانتاجية بالنسبه لدواخله وذلك لمنطقة انتاج محدبه بانضباط منتظم بحل المعادلات m من (٩—٢٣) من أجل $q^*_{hjk} = E^*_{hjk}$:

$$E^*_{hjk} = E^*_{hjk}(p_1, \ldots, p_m) \qquad k = 1, \ldots, m \qquad (٩\text{—}٢٤)$$

ان كمية كل داخل يقوم بشرائها تكون بدلالة جميع الأسعار • وبما أنه أبدا لايعرض (يبيع) دواخل ، فانه فائض طلباته تكون دائما غير سالبه •

فاذا كانت الصناعة j تحتوى على عدد N_j من الوحدات المتطابقة فان اجمالى فائض طلباتها للداخل k ستساوى فائض طلب صاحب وحدة ما مضروبا فى عدد الوحدات ضمن اطار الصناعة :

$$E^*_{jk} = N_j E^*_{hjk}(p_1, \ldots, p_m) = E^*_{jk}(p_1, \ldots, p_m, N_j) \qquad (٩\text{—}٢٥)$$

فيكون فائض طلبات الصناعة لأى داخل بدلالة جميع الأسعار وعدد الوحدات الداخله ضمن اطاره •

يمكن الحصول على فائض طلب صاحب الوحدة لمنتجاته هو (أو عرضه لمنتجاته هو) بالتعويض بدوال فائض الطلب لدواخله (٩—٢٤) فى دالة انتاجه[1] وبوضع :

$$\bar{E}_{hj} = -f_{hj}[E^*_{hj1}(p_1, \ldots, p_m), \ldots, E^*_{hjm}(p_1, \ldots, p_m)]$$

أو بأكثر تبسيطا :

$$\bar{E}_{hj} = \bar{E}_{hj}(p_1, \ldots, p_m)$$

---

(١) لقد عرفنا بصورة منفصله دوال فائض طلب السلعة Q_j كناتج وكذلك كداخل • ومن الممكن دمج الاثنين معا كفائض طلب واحد بدون التأثير على التحاليل •

فيكون فائض متطلبات الصناعه ككل يساوى فائض طلب أحد ممثلى الوحدات مضروبا فى عدد الوحدات :

$$\bar{E}_j = N_j \bar{E}_{hj}(p_1, \ldots, p_m) = \bar{E}_j(p_1, \ldots, p_m, N_j) \quad (٩\text{—}٢٦)$$

ويعتمد فائض متطلبات الصناعة على أسعار جميع السلع وعدد الوحدات ضمن الصناعة ان فائض طلب صاحب الوحدة لمنتجاته ود واخله تكون متجانسه من الدرجة صفر فى جميع الاسعار • فلو أن جميع الاسعار تغيرت بالعامل $t > 0$ فان الربح سيصبح :

$$\pi_{hj} = tp_j f_{hj}(q^*_{hj1}, \ldots, q^*_{hjm}) - \sum_{k=1}^{m} tp_k q^*_{hjk}$$

وبوضع الاشتقاقات الجزئيه مساويه لصفر :

$$\frac{\partial \pi_{hj}}{\partial q^*_{hjk}} = tp_j \frac{\partial \bar{q}_{hj}}{\partial q^*_{hjk}} - tp_k = 0 \qquad k = 1, \ldots, m$$

أو أن

$$t\left(p_j \frac{\partial \bar{q}_{hj}}{\partial q^*_{hjk}} - p_k\right) = 0 \qquad k = 1, \ldots, m$$

وبما أن $t \neq 0$ فان

$$p_j \frac{\partial \bar{q}_{hj}}{\partial q^*_{hjk}} - p_k = 0 \qquad k = 1, \ldots, m$$

ويمكن وضع شروط الدرجة الأولى التى تحصلنا منها على فائض الطلب فى اطار شبيه بالاطار (٩—٢٣) وبما أن شروط الدرجة الثانية تظل غير متغيره وكذلك فان فائض الطلبات سوف لا يتأثر بالتغير النسبى فى جميع الاسعار .

توازن السوق : Market Equilibrium

ويمكن اجمالى دوال فائض الطلب للمستهلكين وأصحاب الوحدات الانتاجيه لكلا النوعين من السلع فيكون اجمالى فائض الطلب لأى عامل هو مجموع فائض الطلبات للمستهلكين الـ n فى (٩—٢٢) وللصناعات الـ$(m - s)$ على حساب الداخل (٩—٢٥) .

$$E_j = \sum_{i=1}^{n} E_{ij}(p_1, \ldots, p_m) + \sum_{k=s+1}^{m} E^*_{kj}(p_1, \ldots, p_m, N_k) \qquad j = 1, \ldots, s \quad (٩\text{—}٢٧)$$

أما اجمالى فائض طلب سلعة ما فانه يكون مجموع فائض طلبات الـ n مستهلك (٩—٢٢) والـ$(m - s)$ صناعة على حساب الداخل (٩—٢٥) ومنتجى هذه الداخل (٩—٢٦):

$$E_j = \sum_{i=1}^{n} E_{ij}(p_1, \ldots, p_m) + \sum_{k=s+1}^{m} E^*_{kj}(p_1, \ldots, p_m, N_k) + \bar{E}_j(p_1, \ldots, p_m, N_j) \qquad j = s+1, \ldots, m \quad (٩\text{—}٢٨)$$

ويمكن تبسيط اجمالى فائض الطلب فى (٩ـ٢٧) و (٩ـ٢٨) كالتالى :

$$E_j = E_j(p_1, \ldots, p_m, N_{s+1}, \ldots, N_m) \qquad j = 1, \ldots, m$$

ان فائض الطلب لكل سلعة يكون بدلالة الـ m سعر وعدد الوحدات ضمن الـ$(m - s)$ الصناعات المنتجه •

لقد افترضنا أنه يمكن تحديد سعر التوازن على المدى القصير للـ m سوق المعتبرة فى عزلة عن الـ$(m - 1)$ سوق الأخرى وذلك بوضع اجمالى فائض الطلب للسلع تحت الاعتبار مساويا لصفر ويمكن معاملة على المدى القصير عدد الوحدات وكذلك الـ$(m - 1)$ سعر للسلع الأخرى وكذلك عدد الوحدات ضمن الـ$(m - s - 1)$ صناعة الأخرى،كمؤشرات أمـــا المتعة (المنفعة) والانتاج ، ودوال فائض الطلب فاننا نعرفها لفترة زمنيه أطـول فى تحاليل المدى البعيد •

وبالاضافة فان عدد الوحدات ضمن الصناعة تعتبر متغيرا فى تحديد التوازن علـى المدى الطويل لسوق السلع • ففائض الطلب والربح يوضع مساويا لصفر ومن ثم نحـــل المعادلتين الناتجتين للحصول على الربح وعدد الوحدات فأسعار التوازن على المدى القصير والطويل تكون غير سالبه وتولد كميات استهلاك وانتاج ضمن المنطقه المعرف فيها دوال فائض الطلب •

قانون فالراس Walras' Law

وبوضع ربح الوحدة h فى الصناعة j بدلالة فائض الطلبات واعادة ترتيب الحدود :

$$p_j\bar{E}_{hj} + \sum_{k=1}^{m} p_k E^*_{hjk} + \pi_{hj} = 0 \qquad (٩ـ٢٩)$$

وتساوى صافى قيمة فائض طلبات الوحدة سالب ربحها • وبجمع (٩ـ٢٠) لجميـــع المستهلكين وجمع (٩ـ٢٩) لجميع المنتجين نتحصل على النتيجة :

$$\sum_{j=1}^{m} p_j E_j = 0$$

ولهذا فان قانون يتحقق كمطابقة identity لأى مجموعة أسعار فى نظام المقايضـــة والانتاج ووجود أرباح موجبه لايوءثر على هذه النتيجه مجموع الأرباح تظهر على شكل حد سالب فى اجمالى (٩ـ٢٠) وكحد موجب فى اجمالى (٩ـ٢٩) •

توازن الأسواق المتعددة . Multimarket Equilibrium

يتطلب توازن الاسواق المتعددة بأن يكون كل سوق خاليا cleared وأن يكون الربح مساويا لصفر فى كل صناعة [١] .

$$E_j(p_1, \ldots, p_m, N_{s+1}, \ldots, N_m) = 0 \qquad j = 1, \ldots, m$$
$$\pi_j(p_1, \ldots, p_m) = 0 \qquad j = s+1, \ldots, m \qquad (٩_٣٠)$$

حيث أن π_j هى ربح وحدة انتاجيه ممثلة للصناعة j وللمرة الثانية يتسبب قانون فالراس فى النتيجة التى تجعل اعتماد وظيفى بين فائض الطلبات ولا يمكن حل (٩_٣٠) لمستويات السعر البحته •

وتعرف للمرة الثانيه التوازن عن طريق الاسعار النسبيه لاعن طريق الاسعار البحته وبما أن فائض متطلبات كل مستهلك ومنتج تكون متجانسه من الدرجه صفر فى الاسعار، فان اجمالى فائض المتطلبات يكون متجانسا من الدرجه صفر فى الاسعار • فأرباح كل صاحب وحدة انتاجيه تكون متجانسه من الدرجة الأولى فى الاسعار • فلو ضاعفنا الاسعار فان مستويات منتجات ودواخل الوحدة الانتاجية سوف تظل بدون تغير ، ولكن مجموع ايراداته ومجموع تكلفتة ومن ثم ربحه سوف يتضاعف ولكن لو أن توازنا على المدى الطويل قد تحقق لمجموعة من الاسعار فان النظام سوف يظل فى توازن حتى لو تغيرت جميع الاسعار بنفس النسبه • فمضاعفة جميع الاسعار سوف يترك فائض الطلبات مساويا لصفر • ولكن ايرادات وتكلفة الوحدة الانتاجيه سوف يتضاعف غير أن مستويات الربح ستظل مساويه لصفر ، وسوف لا يكون هناك حافزا لأى وحده انتاجيه جديدة لدخول الصناعة •

ويمكن خفض عدد المتغيرات فى (٩_٣٠) بواحد وذلك بقسمة الـ m سعر بحت بسعر السلعة المختارة عشوائيا فلو أن Q_1 هى السلعة المختارة فانه يمكن اعادة كتابة (٩_٣٠) على النحو التالى :

$$E_j\left(1, \frac{p_2}{p_1}, \cdots, \frac{p_m}{p_1}, N_{s+1}, \ldots N_m\right) = 0 \qquad j = 1, \ldots, m$$
$$\pi_j\left(1, \frac{p_2}{p_1}, \cdots, \frac{p_m}{p_1}\right) = 0 \qquad j = s+1, \ldots, m \qquad (٩_٣١)$$

ولقد افترضنا أن هذا النظام يحتوى على $(2m - s - 1)$ من المعادلات المستقله

---

(١) لقد حذفنا معادلات الربح وافترضنا أن عدد الوحدات المنتجه قد حدد مسبقا لحالة تحاليل توازن الاسواق المتعددة على المدى القصير •

والتى يمكن حلها لقيم التوازن لل $(m-1)$ نسبة مقايضة بالنسبه Q_1 وكذلك لل $(m-s)$ وحدة انتاجية وهذه القيم التوازنيه للمتغيرات تكون جميعا غير سالبه .

وحالما تحدد نسب المقايضه فى حالة التوازن وكذلك عدد الوحدات فأنه يمكـــن حساب فائض الطلبات لكل مستهلك ومالك بتعويض قيمها فى دوال فائض الطلبات المفرده فأى حل توازن على المدى الطويل سوف يحقق الشروط التاليه :

(١) أن كل مستهلك سوف يحاول الحصول على الحد الأعلى من المتعه .
(٢) وأن كل مالك سوف يعمل على الحصول على الحد الأقصى من الربح .
(٣) وأن كل سوق سوف يكون خاليا .
(٤) وأن كل مالك سوف يكسب صفرا من الربح .

وسوف تكون قيم توازن مستويات الانتاج والاستهلاك الفرديه ضمن المناطق المعـروف فيها دوال فائض الطلب الفرديه .

٩ ٤ وحدة المقايضة والنقود : THE NUMÉRAIRE AND MONEY

لقد أنشأنا توازن الاسواق المتعددة لاقتصاديات من نوع المقايضه التى لا توجد فيها نقود متداولة حيث أن سلعا وعواملا بودلت من أجل سلع وعوامل أخرى ، وتمت عمليـات المبادلة هذه بوصف نسب المقايضه بالكامل ولقد قمنا بحل مثل هذه الانظمة لل $(m-1)$ نسبة مقايضة وذلك بالنسبة الى (أو بالرجوع الى) سلعة أختيرت بطريقه عشوائيه ، تسمى عامة بوحدة المقايضه (أو المبادلة) numéraire فأى مجموعة أسعار بحته تؤدى الى نسب المقايضه التوازنيه تكون حلا توازنيا فلو وجد مثل هذا الحل ، فانه سوف يوجد عـددا لاحصر له .

ان من الممكن تقديم عددا من أنواع مختلفه من النقود فى اطار نظام توازن عام . فمن الممكن اختيار سلعة ما كمعيار للقيمه ومن ثم تخدم كنقود بحيث ان جميع الأسعار سـوف يعبر عنها فى حدود وحداتها ويمكن أيضا انشاء النقود كوحدة حساب محرده بحيـث تخدم كمعيار قيمة ولكنها غير قابلة للتداول ويمكن فى بعض الظروف تقديم النقود الورقيـه المتداولة .

وحدة المقايضة : The Numéraire

ان لكل m سلعة يوجد m^2 نسبة مقايضه اذا أخذنا سلعتين فى وقت واحد

فمن ضمن هذه ال m توجد متطابقات تنص على أن نسبة المقايضة لسلعة $p_j/p_k (j, k = 1, \ldots, m)$ ما على نفسها سوف تساوي الوحده ، $j = k$. $p_j/p_k = 1$ أما ال m^2 نسبة مقايضة فانهـا غير مستقلة • فاذا اعتبرنا المتطابقة وال $(m-1)$ نسبة مقايضة بحيث أن Q_1 تخدم كوحدة مقايضة فأن ال $(m-1)$ نسب مقايضة والمتطابقات الأخرى يمكن اشتقاقها من هذه :

$$\frac{p_j}{p_k} = \frac{p_j}{p_1} : \frac{p_k}{p_1} \qquad j, k = 1, \ldots, m \qquad (٩\text{—}٣٢)$$

تخيل أن Q_1 تمثل كمثرا ، و Q_2 تمثل البرتقال ، و Q_3 تمثل التفاح وأن برتقالتين تكون مقابل كمثرا واحدة $(p_2/p_1 = 0.5)$ وأن تفاحه تكون مقابل كمثرتين $(p_3/p_1 = 2)$ وبالاستفادة من (٩—٣٢) فأن أربعة برتقالات سوف تكون مقابل تفاحه واحده $p_3/p_2 = 4$.

وسوف تعطى مجموعة نسب المقايضة كاملة بطريقة مباشرة أو غير مباشرة وذلك عن طريق ال $(m-1)$ نسبة مقايضة وكذلك المتطابقة لوحدة المقايضة •

ويمكن تغيير وحدة المقايضة من Q_1 الى Q_k وذلك بقسمة نسب المقايضة والمتطابقـه للسلعة Q_1 بالمقدار p_k/p_1 :

$$\frac{1}{p_k/p_1}\left(1, \frac{p_2}{p_1}, \ldots, \frac{p_k}{p_1}, \ldots, \frac{p_m}{p_1}\right) = \left(\frac{p_1}{p_k}, \frac{p_2}{p_k}, \ldots, 1, \ldots, \frac{p_m}{p_k}\right)$$

فنسب المقايضه سوف لا تتأثر بهذه التحويله • فاختيار وحدة المقايضة تتم بطريقـه عشوائية محضه •

ويمكن لوحدة المقايضة أن تخدم كمعيار للقيمة فبوضع سعرها مطابقا للوحدة ، فـان نسب المقايضه سوف تصبح $p_j/p_1 = p_j$. ولا تتأثر نسب المقايضه التوازنيه بهذه التحويله •

ويمكن التعبير عن سعر التوازن لكل سلعه بعدد وحدات وحدة المقايضه التى تدفع عند المقايضة للحصول على وحدة واحدة من تلك السلعه • فسعر البرتقال يصبح نصـف كمثرا لكل برتقاله ، وسعر التفاح اثنين كمثرا لكل تفاحة • فسعر التفاح يكون أربعـة أضعاف سعر البرتقال ، وأن تفاحه واحده لاتزال مقابل أربعة برتقالات فى حالة التوازن فبذلك أصبحت وحدة المقايضة نقودا بالمفهوم أن وحداتها تخدم كمعيار للقيمة ولكنهـا لاتخدم كخازن للقيمة لأنها تكون مرغوبه فقط كعامل انتاجى أو سلعة استهلاكيه على نفس نمط السلع الأخرى • فأى سلعة سوف تخدم كمعيار قيمة بهذا المعنى •

فوضع الأسعار باستخدام سلعة ما مثل الكمثرا ليس من الممارسة الشائعة فالأسـعار توضع عادة بأستخدام وحدات نقدية مثل الريال • فيمكن دمج نقود المحاسبه An accounting money ضمن اطار نظام توازن عام • ليس هناك سبب يمنع من جعل سعر وحدة المقايضة مساويه للوحدة • فقد يمكن وضعها مساويه لـ $2, \sqrt{2}, 25, 200$ مليون وهذا

سوف لا يؤثر على نسب المقايضة التوازنية فيمكن تقديم نقود المحاسبه وذلك بوضع سعر وحدة المقايضة (أو أى سلعة أخرى) مساويه لعدد محدد من الوحدات النقدية • وبعد ذلك يمكن اشتقاق الأسعار النقدية للسلع الأخرى ، فلو أن Q_1 هى وحدة المقايضه وأن p_1 وضعت تساوى β من الريالات ، فأن السعر الريالى للسلعة Q_k (p_k) هو :

$$p_k = \beta \frac{p_k}{p_1} \qquad k = 2, \ldots, m$$

فلو أن سعر الكمثرا وضع مساويا لريالين فأن سعر البرتقاله سوف يكون ريالا واحدا وأن سعر التفاحة سوف يكون أربعة ريالات • ففى هذه الحالة تخدم النقود فقط كوحدة مجرده للحساب ولكنها لا توجد بالمعنى الحسى، فالسلع لا تزال تتبادل بسلع أخرى • فلا أحد يحتفظ بالنقود ، ولا أحد يرغب فى الحفاظ على النقود • فنقود المحاسبة يخدم كمعيار وليس كمخزن للقيمة [1] •

ان من المربح فى بعض الأوقات تطبيع الأسعار normalize prices وذلك بتعريف وحدة حساب مثل $\Sigma_{i=1}^{m} p_i = 1.$ ففى هذه الحاله سوف يكون من الأفضل تكوين مركب من جميع العوامل والسلع، وليس سلعة واحده ، ليخدم كقاعدة تقييم • فالتعريف المركب يتجنب المشاكل التى تنتج فى حالة أن لو كانت وحدة المقايضة المختارة مسبقا (سواء كانت عاملا أو سلعة) سلعة حرة (سلعة بدون مقابل) free good راجع الجزء ١٠ ـ ١

التوازن النقدى : Monetary Equilibrium

ان نقود السلع Commodity money ونقود المحاسبه accounting money تكون مختلفه تماما عن نقود المداوله circulating money التى تخدم كمخزن للقيمه فاقتصاديو القرن التاسع عشر من الأقتصاديين قد قسموا الاقتصاد الى قطاعيه وذلك بالنسبة لتحديد سعر التوازن : القطاع الحقيقى real sector والذى تتحدد فيه نسب المقايضة ، والقطاع النقدى monetary sector والتى تتحدد فيه أسعار النقود البحته absolute money prices وذلك عن طريق كمية النقود الموجوده فالقطاع الحقيقى قد وضعناه فى الأجزاء من (٩ ـ ١) الى (٩ ـ ٣) • وواجبنا الان هو اضافة القطاع النقدى للتحاليل الحاليه • ومن أجل التبسيط فأن التحاليل سوف تشمل حالة المقايضه البحته بالرغم من أنها وبسهولة يمكن توسيعها لتغطية الانتاج والمقايضه •

---

(١) أن افتراض أن النقود سوف تخدم كوحدة حساب سوف يكون مفهوما ضمنا فى تحاليل المستهلك والمالك • فيمكن التعبير عن دخل المستهلك بوحدات نقدية ، ولكنه سوف يصرف جميع دخله ولا يرغب فى الاحتفاظ بأى نقود ومالك الوحدة يرغب فى الحصول على الحد الأعلى من الربح النقدى ، ولكنه لا يرغب فى الحصول على الحد الأعلى من الربح النقدى ولكنه لا يرغب فى الاحتفاظ بالنقود فاذا كسب ربحا موجبا فانه سوف يصرفه بدورة كمستهلك •

افترض الان أن المستهلكين الـ n يمتلكون أيضا كمية من النقود الورقية نرمز لها بالرمز السفلى $(m+1)$: $(q^0_{1,m+1},\ldots,q^0_{n,m+1})$ فهذه النقود الورقيه سوف تخدم كمخـــزن للقيمة ولكنها لاتدخل ضمن اطار دوال المتعه (المنفعة) ونعرف فائض طلب المستهلك i للنقود الورقية على أساس أنه الكميه التى يرغب فى الحفاظ عليها ناقصا مايمتلكه مبدئيا :

$$E_{i,m+1} = q_{i,m+1} - q^0_{i,m+1} \qquad (٩\text{—}٣٣)$$

ويكون فائض طلبه موجبا اذا اضاف الى الكميه التى يمتلكها من البدايه ويكون سالبا اذا خفض من الكميه فيجب على ذلك اعادة تعريف شرط ميزانية المستهلك (٩ــ٤) ليشمل على النقود :

$$\sum_{j=1}^{m+1} p_j E_{ij} = 0 \qquad (٩\text{—}٣٤)$$

حيث أن p_j يمثل سعر السلعة j أما سعر النقود p_{m+1} فانه يساوى الوحدة حسب التعريف فالمستهلك يستطيع استبدال النقود مكان السلع أو السلع مكان النقود .

فلو كان فائض طلب المستهلك للنقود موجبا فأن قيمة السلع التى يبيعها ستكون قيمة السلع التى يشتريها وبهذا يكون مبادلا سلع من أجل النقود .

وبما أن النقود لاتدخل ضمن دالة متعته فان فائض طلبه للنقود لايمكن تقريـــره بقواعد الحصول على الحد الأقصى من المتعة . فمن المعتاد الافتراض بأن المستهلك يجد من المريح له الاحتفاظ بالنقود من أجل تسهيل صفقات الحصول على الســـلع افترض أن المستهلك يرغب فى الاحتفاظ بكمية من النقود تكون عبارة عن نسبة محدده من القيمة النقدية لما يمتلكه من السلع بادئ الأمر :

$$q_{i,m+1} = \alpha_i \sum_{j=1}^{m} p_j q^0_{ij} \qquad (٩\text{—}٣٥)$$

حيث أن ثابت . وبتعويض (٩ــ٣٥) فى (٩ــ٣٣) :

$$E_{i,m+1} = \alpha_i \sum_{j=1}^{m} p_j q^0_{ij} - q^0_{i,m+1} \qquad (٩\text{—}٣٦)$$

ونتحصل على اجمالى فائض طلبه للنقود بتجميع (٩ــ٣٦) لجميع المستهلكين m :

$$E_{m+1} = \alpha \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} p_j q^0_{ij} - \sum_{i=1}^{n} q^0_{i,m+1} = E_{m+1}(p_1,\ldots,p_m) \qquad (٩\text{—}٣٧)$$

افترض أن $\alpha_i = \alpha$ لكل $i=1,\ldots,n$. وهذا سوف لايؤدى الى فقد أى شئ مهم . فلو أن مايمتلكه مبدئيا من السلع والنقود كانت ثابته فأن فائض الطلب للنقود سوف يكـــون بدلالة أسعار السلع الـ m .

ونحدد دوال فائض الطلب للسلع m بطريقة الحصول على الحد الأعلى من المتعـــة

(المنفعة) لكل مستهلك تحت شرط الميزانية بما فى ذلك النقود وبحل شروط الدرجة الأولى من أجل الحصول على دوال فائض الطلب المنفرده ثم التجميع لجميع المستهلكين ويكون هناك توازن عام آذا كان فائض الطلب لكل سلعة ونقود تساوى صفرا :

$$E_j(p_1, \ldots, p_m) = 0 \qquad j = 1, \ldots, m+1 \qquad (٩\text{—}٣٨)$$

وهذه المعادلة تعطى نظاما مكونا من $(m+1)$ من المعادلات التى تحتوى على m متغير وهى أسعار السلع ـ فبواسطة قانون فالراس نجد ان الاعتماد الوظيفى موجود ضمن دوال فائض الطلب الـ $(m+1)$ فاذا كانت أسواق السلع m فى توازن فأن سوق النقود لابد وأن يكون فى توازن أيضا بمعنى أن المستهلكين ككل ليس لديهم الرغبه فى التبادل بين النقود والسلع فكمية النقود التى يرغب المستهلك فى الحفاظ عليها هى الكميه الموجودة ولقد افترضنا أن (٩ــ٣٨) تحتوى على m من المعادلات المستقلة التى يمكن حلها لأسعار النقود فى حالة التوازن وذلك للسلع m •

ان فائض طلبات السلع والنقود ليس متجانسا من الدرجة صفر فى أسعار السلع • فلو أن جميع الأسعار زادت بالعامل $t>0$، فان فائض الطلب للنقود (٩ــ٣٧) سيصبح :

$$E_{m+1} = \alpha \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} t p_j q_{ij}^0 - \sum_{i=1}^{n} q_{i,m+1}^0 \qquad (٩\text{—}٣٩)$$

ويكون الاشتقاق الجزئى للمعادلة (٩ــ٣٩) بالنسبه للعامل t هى :

$$\frac{\partial E_{m+1}}{\partial t} = \alpha \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} p_j q_{ij}^0 > 0$$

فأى زيادة نسبية فى أسعار السلع سوف يزيد من فائض الطلب على النقود فلو كان النظام فى توازن قبل زيادة الأسعار فأن المستهلكين سوف يرغبون فى آستبدال السلع بالنقود وذلك من أجل معادلة الكمية النقدية بالقيمة النقدية لما يمتلكوه من سلع عند البداية ولكن لن يوجد فائض طلب سالب للسلع بالمقابل • فأى تغير نسبى فى سعر السلع التوازنى سوف يخرج النظام ككل من حالة التوازن •

ان فائض الطلب للسلع والنقود يكون متجانسا من الدرجه صفر فى أسعار السلع وفى كميات النقود التى بدأ بها ، ويصبح فائض الطلب للنقود كالتالى :

$$E_{m+1} = \alpha \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} t p_j q_{ij}^0 - \sum_{i=1}^{n} t q_{i,m+1}^0$$

واشتقاقها يكون :

$$\frac{\partial E_{m+1}}{\partial t} = \alpha \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} p_j q_{ij}^0 - \sum_{i=1}^{n} q_{i,m+1}^0$$

وهذا يساوى صفر آذا كان سوق النقود فى توازن قبل تغير الأسعار وظل كمية النقود

لكل مستهلك فى العلاقة المطلوبه مع قيمة ماعنده من السلع وبهذا فانه سوف لا يرغب فى مبادلة السلع بالنقود أو النقود بالسلع •

أن من الممكن اثبات أن أى تغير فى كمية النقود لكل مستهلك بالكميه t سوف ينتج عنه تغير فى سعر النقود لكل سلعة بنفس كمية t ولكنه سوف يترك القطاع الحقيقى بدون تأثير فلو كان هناك توازن ومن ثم حدث زيادة فى كمية النقود لكل مستهلك بالعامل t, فأن كل مستهلك سوف تكون لدية الرغبه فى أبدال السلع بالنقود وكنتيجة لذلك فأن أسعار السلع سوف تزداد حتى لاتزداد كميات النقود الموجودة عن الكميات التى فى حوزة المستهلكين •

وسوف يعود التوازن عندما تزداد قيم جميع السلع الموجوده بالعامل t :

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} p_j q_{ij}^0 = t\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} p_j q_{ij}^0 \qquad (٩_٤٠)$$

حيث أن p_j هى سعر السلعة j بعد وجود التوازن فالزيادات النسبيه فى جميع أسعار السلع : $p_j = tp_j \ (j = 1, \ldots, m)$
سوف يحقق (٩_٤٠) ولكن (٩_٤٠) سوف تتحقق بأى مجموعة أسعار أخرى أعتبر مجموعة تغيرات غير نسبيه فى السعر بحيث تحقق (٩_٤٠) فسوف يتبع هذا أن $p_h = up_h$ وأن $p_k = vp_k$ حيث أن $u > t > v$ لبعض قيم h و k وتصبح نسب المقايضه بين Q_h و Q_k كالتالى : $up_h/vp_k > p_h/p_k$

فسعر Q_h ارتفاع نسبة الى سعر Q_k وسوف يرغب المستهلكون فى ابدال Q_h بالسلعه Q_k فلو كان النظام فى توازن عند نسبة المقايضة الاولية فان نسبة المقايضة الجديدة سوف ينتج عنها الى اجمالى موجب لفائض الطلب للسلعة Q_k وينتج عنها ايضا آجمالى سالب لفائض الطلب على Q_h ويكون اجمالى فائض الطلبات لجميع السلع مساويا لصفر اذا كان فقط اذا كان $p_h/p_k = p_h/p_k$ for $h, k = 1, \ldots, m$

وهذا موافقا (ومتمشيا مع) للتوازن النقدى أذا كان وفقط اذا كان :
$p_j = tp_j \ (j = 1, \ldots, m)$ فتقسيم تحديد توازن السعر قد اكتمل الآن وتكون نسب المقايضة التوازنيه قد تحددت بدوال المتعه للمستهلك وكذلك القيم الحقيقيه لما يمتلكونه أولا وتتقرر أسعار النقود بكمية النقود •

ومن المحتمل والممكن عقديم النقود الورقية المتداولة ضمن اطار نظام التوازن العام الساكن static الغير حركى ولكن بصورة اصطناعيه artificial فالمعادله ٩_٣٩ تنظم نوعا من السلوك المنطقى رغم أنه غير رياضى ، الغير متمشيا مع عملية الحصول على

الحد الأعلى من المنفعة (المتعه) فالمستهلك يرغب فى الحفاظ على كمية من النقـــود لا يستفيد منها بأى منفعه أو متعه غير أنه يصرفها على السلع التى يستفيد منها ويحقق بها متعته ومنفعته أن من الصعب وجود دوافع للحفاظ على النقود فى النظام الغيرحركى الذى ليس له أى علاقه بالوقت السابق أو اللاحق • فمصاعب النقود لاتوجد الا فى النظام الحركى فقط الذى يكون فيه السلوك مقيدا عبر الزمن •

النقود فى دالة المتعة (المنفعة) Money in the Utility Function

ان وضع النقود بطريقة مباشرة فى دالة المنفعه سوف يعطينا بديلا للمعادلة ٩ــ٣٥ والتعليل هو أن كميات النقود تعطى متعه (منفعة) وذلك بتسهيل عملية المبادلــــة • فيمكن كتابة شروط الدرجة الأولى للمستهلك i كالتالى :

$$\frac{U_{ij}}{U_{i,m+1}} = p_j \qquad j = 1, \ldots, m$$

$$\sum_{j=1}^{m} p_j(q_{ij} - q_{ij}^0) + (q_{i,m+1} - q_{i,m+1}^0) = 0 \qquad (٩ــ٤١)$$

حيث أن Q_{m+1} تمثل النقود ولكن بسعر الوحدة فأى زيادة فى السعر مع ثبات كمية النقود الأوليه سوف ينتج عنه مبادلة السلع من أجل النقود •

نفترض أن أسعار جميع السلع والنقود التى يمتلكها المستهلك بادئ ذى بدء قـــد تغيرت بنسبة $t>0$ فتصبح شروط الدرجة الأولى :

$$\frac{U_{ij}}{U_{i,m+1}} = tp_j \qquad j = 1, \ldots, m$$

$$\sum_{j=1}^{m} tp_j(q_{ij} - q_{ij}^0) + (q_{i,m+1} - tq_{i,m+1}^0) = 0 \qquad (٩ــ٤٢)$$

فيمكن فصل الاقتصاد الى قطاعين حقيقى ونقدى هذا أذا كانت القيم للمتغير q_{ij} $(j = 1, \ldots, m)$ تحقق (٩ــ٤١) وأن t مضروبه فى $q_{i,m+1}$ التى تحقق (٩ــ٤١) سوف تحقق (٩ــ٤٢) • وبالمثل يمكن القيام بعملية الفصل أذا كانت دوال فائض الطلب للسلع والنقود متجانسه من الدرجه صفر ومن الدرجة الأولى بالتوالى وذلك بالنسبه لأســــعار السلع وما يمتلكه من نقود فأى تغير فيما يمتلكه من نقود بنفس النسبه لجميع المستهلكيـــن سوف ينتج عنه تغيرات فى كميات النقود المرغوبه وفى أسعار السلع بنفس النسبه وسوف يترك مستويات أستهلاك السلعه المرغوبه من غير تغيير •

أن عملية الفصل غير ممكنه عادة ولكن هناك بعض الحالات التى يكون فيها الفصل ممكنا

فلو أن RCS الخاص بالمعادلة (٩ـ٤١) والمعادلة (٩ـ٤٢) تغيرا بالنسبه للنقـود المحتفظة ، فان عملية الفصل ستكون ممكنه • ففى مثل هذه الحاله فان كميات السلع التى تحقق (٩ـ٤١) سوف تحقق أيضا (٩ـ٤٢) مع تغير فى كمية النقود المحفوظة بالنسبه t. ومثال ذلك دالة المنفعة التى تستخدم دائما :

$$U_i = q_{i1}^{a_1} q_{i2}^{a_2} \cdots q_{im}^{a_m} q_{i,m+1}$$

حيث أن RCS الخاص بها سوف يكون متناسبا مع كمية النقود المحفوظه :

$$\frac{U_{ij}}{U_{i,m+1}} = \frac{a_j q_{i,m+1}}{q_{ij}} \qquad j = 1, \ldots, m$$

ويمكن للقارىء من التحقق بأن دوال فائض الطلب تعطى التجانس المناسب • وسوف تتحقق النتائج للمستهلك بالنسبه لاجمالى فائض الطلب اذا كان كل RCS للمستهلك متناسبا الى كمية النقود التى يحتفظ بها • وتغير كمية النقود التى يمتلكها مبدئيا بنفس النسبه •

٩ - ٥ ملخص ما سبق SUMMARY

يسمح تحليل توازن الاسواق المتعددة بتعيين مجموعة متوافقة من الاسعار لكـل السلع • وفى نظام التبادل البحت، يمنح الافراد بمخزونات من السلع • ويكون كـل فرد حرف ان يشترى او يبيع السلع باسعار سائدة ومعرضه لقيود الميزانيه ، والتى تنص علـى ان قيمة مبيعاته يجب ان تتساوى مع قيمة مشترواته • ويمكن اشتقاق دالة الطلب الزائـد للفرد من شروط الدرجه الأولى لتعظيم الفائدة • ونحصل على الدالة الكليه بجمـع الدوال المستقله لكل سلعه • ويكون مجموع الزيادة الكليه للطلب مضروبا فى الاسعـار مساويا تماما للصفر • وينتج هذا من قيود ميزانية الافراد ويعرف بقانون والراس •ويتكون دوال كل الافراد ، وبالتالى الدالة الكليه ، متجانسه ومن الدرجه صفر فى الاسعـار • ويتحدد سلوك المستهلك بنسب التبادل اكثر منه بالاسعار المطلقه • ويتطلب تـوازن الاسواق المتعددة ان تكون زيادة الطلب لكل سلعه مساويه للصفر • وتكون m مـن زيادات الطلب مرتبطه داليا كنتيجه لقانون والراس ، ويمكن التعبير عن حل الاتـزان بدلالة $((m-1))$ من نسب التبادل للسلع بالنسبه لوحدة مقايضه اعتباريه نختارها •

ويقدم الانتاج فى المرحله الثانيه من التحليل • ونفترض ان منح المستهلكين تتكون من العوامل الاوليه والتى يبيعونها عادة للمقاولين لكى يكونوا قادرين على شراء السلع المنتجه • ويستقبل المستهلك اجزاءا مقدرة من الارباح ويخسر المستحق بواسـطة وحدات الانتاج • وتشتق دوال الطلب الزائد للأفراد للسلع والعوامل من شروطه ذات الدرجه الاولى لتعظيم الربح او (الفائدة) • ويستعمل كل مقاول كل من العوامـل

والسلع كدخول لانتاج سلعه واحدة ، ويحصل المقاول على دوال الطلب الزائد لدخله باحلال قيم المدخولات فى دالة انتاجه . وتكون دوال الطلب الزائد للمقاول متجانسه ايضا وذات الدرجه صفر فى السعر . ونحصل على الدوال الكليه للطلب الزائد لكل عامل ولكل سلعه بجمع الدوال المستقله لكل المستهلكين ولكل المقاولين . ويكون قانون والراس قائما ايضا للدوال الكليه . ونتقدم بافتراض متماثل . تتضح الزيادة الكليه للطلب دوال فى الاسعار وعدد وحدات الانتاج فى كل صناعه .

يمكن تعيين نسبه لتبادل من كل زوج من السلع من نسب التبادل بالنسبه لوحدة المقايضه . ويمكن ان تعمل وحدة المقايضه كنقود من ناحية القيمه القياسيه . فيمكن وضع قيمتها كوحدة ونعبر عن كل الاسعار الاخرى بدلالة هذه الوحدة . ومن ناحيه اخرى يمكن معادلة الاسعار بوضع مجموعها مساويا للوحدة . ويمكن استخدام النقود الحسابيه التجريديه كقيمة قياسيه . ويمكن تقديم الاوراق الماليه المتداوله ، وسوف تحدد قيمتها اسعارا مطلقه فى نظام تبادلى بحت اذا ما افترضنا ان المستهلكين سوف يحتفظون برصيد من المال مساو لنصيبهم من قيمة ارباحهم فى بيع السلع . ولن تتحقق هذه النتيجه عامه اذا ما ادخلت النقود مباشرة فى دالة الفائدة . وسوف نتحقق فى الحالة الخاصه التى تكون فيها قيمة RCS للمال لكل وحده من التبادل السلعى مقاسه بالنسبه لما يحتفظ به المستهلك من مال .

EXERCISES

9-1 Consider a two-person, two-commodity, pure-exchange, competitive economy. The consumers' utility functions are $U_1 = q_{11}q_{12} + 12q_{11} + 3q_{12}$ and $U_2 = q_{21}q_{22} + 8q_{21} + 9q_{22}$. Consumer I has initial endowments of 8 and 30 units of Q_1 and Q_2 respectively; II has endowments of 10 units of each commodity. Determine excess demand functions for the two consumers. Determine an equilibrium price ratio for this economy.

9-2 Construct offer curves as mathematical functions from the first-order conditions for the two consumers described in Exercise 9-1. Show that the equilibrium derived in Exercise 9-1 satisfies both offer curves.

9-3 Derive excess demand functions for the inputs and output of a representative firm with the production function $\bar{q}_{kj} = (q^*_{kj1})^\alpha (q^*_{kj2})^\beta$ where $\alpha, \beta > 0$ and $\alpha + \beta < 1$.

9-4 Consider a two-person, two-commodity, pure-exchange economy with paper money. The utility functions are $U_1 = q_{11}q_{12}^{0.5}$ and $U_2 = q_{21}q_{22}^{0.5}$. Consumer I has initial endowments of 30 units of Q_1, 5 units of Q_2, and 43 units of money; II has respective endowments of 20, 10, and 2. Each of the consumers desires to hold a money stock equal to one-fifth of the value of her initial commodity endowment. Determine equilibrium money prices for Q_1 and Q_2. Show that the equilibrium prices would triple if the initial money stocks of I and II were increased to 129 and 6 respectively.

9-5 Reformulate the monetary analysis centering upon (9-35) in terms of a composite commodity and money.

SELECTED REFERENCES

Allen, R. G. D.: *Mathematical Economics* (London: Macmillan, 1956). Multimarket equilibrium is covered in chap. 10. The necessary mathematical concepts beyond the calculus are developed in the text.

Arrow, K. J., and F. H. Hahn: *General Competitive Analysis* (San Francisco: Holden-Day, 1971). Advanced mathematics is used to provide a comprehensive account of multimarket equilibrium.

Kuenne, Robert E.: *The Theory of General Economic Equilibrium* (Princeton, N.J.: Princeton University Press, 1963). A detailed treatise using fairly simple mathematics.

Quirk, James, and Rubin Saposnik: *Introduction to General Equilibrium Theory and Welfare Economics* (New York: McGraw-Hill, 1968). Basic concepts are covered in the first two chapters. Simplified set-theoretic mathematics is used.

Varian, Hal P.: *Microeconomics* (New York: Norton, 1978). Chap. 6 covers general equilibrium theory. Simplified modern mathematics is used.

Walras, Léon: *Elements of Pure Economics*, trans. by William Jaffé (Homewood, Ill.: Irwin, 1954). The original statement of multimarket equilibrium theory.

الفصل العاشر

مواضيع فى توازن الأسواق المتعددة

TOPICS IN MULTIMARKET EQUILIBRIUM

لقد افترضنا فى الباب التاسع وجود توازن مناسب للاسواق المتعدده ولكن هـذا الافتراض للتسهيل حيث ان مجرد تكون نظام اسواق متعددة لايعطى اى ضمانات لوجود حل توازنى • فبعض الانظمة لايكون لها حل رياضى • ولكن البعض الاخر يكون لها •• حيث ان وجود الحل الرياضى غير كافى • فالاقتصاد يضع حدود على القيم المقبولة للمتغيرات• فالاسعار يجب ان تعطى بالاعداد الحقيقية الغير سالبة(1) • وبالاضافى فان مستويات استهلاك كل مستهلك ومستويات الدواخل والخوارج لكل وحدة انتاجية يجب ان يكون غير سالبا فالحل الرياضى الذى يحتوى على مستويات استهلاك سالبه لايعطى اى معنى اقتصادى وهذا على سبيل المثال •

يحتوى الجزء (١٠ـ١) على نقاش حول وجود توازن للاسواق المتعدده ثم توسع النقاش من شروط الثبات (استقرار). الحركى والغير حركى ليغطى انظمة الاسواق المتعددة فى الجزء (١٠ـ٢) اما الجزء (١٠ـ٣) فانه يناقش انفراد التوازن uniqueness of equilibrium ويحتوى الجزء الاخير(١٠ـ٤) على نظام الدواخل والخوارج input-output للاسواق المتعددة وكذلك على دوال انتاجها الخطيه •

---

(1) فاذا كان سعر السلعة سالبا ، فان قوة الشراء سوف تتحول من البائع الى المشترى بدلا من المشترى الى البائع • فالاسعار السالبه لاتكون دائما فارغة المعنى او غير معقولة • فحصول المستهلك على مايسمى بالسلعه القدم dispommodity مثل القمائم سوف يخفض من مستوى سلعته وسوف يكون راغبا فى الدفع لازالتها • ولقد ازلنا احتمال معقولية الاسعار السالبه بتركيز الانتباه على السلعة المثيلة (القرينه) للسلعة العدم• فالمستهلك يفترض فيه انه سوف يشترى خدمات ازالة القمائم بدلا من بيع القمائم ونعتبر ان عمال جمع القمائم يكون موجبا ويساوى فى قيمته المطلقه للسعر السالب للقمائم•

١٠ - ١ وجود (قيام) التوازن EXISTENCE OF EQUILIBRIUM

يمكن اعتبار التساؤل حول قيام(وجود) حل مقبول من وجهتين مختلفتين فقد يرغب شخص ما فى تحديد ما اذا (او لم يكن) هناك نظام اسواق متعددة محدد مطبق عمليا وله حل توازنى • وقد يرغب شخص اخر على وجه اكثر عمومية وشمولا فى اثبات نظرية وجود existence theorem تنص على وجود (قيام) حلول توازنيه لجميع انظمة الاسواق ، المتعددة والتى تحقق عددا من الافتراضات العامة •

يبدء الفصل هذا بمناقشة وجود مجموعات محددة من دوال فائض الطلب • ومن ثم فوجه الانتباه الى المشكله الاكثر عموما وهى وجود نظام تبادل وانتاج من نوع المدى القصير والذى قدمناه فى الفصل (٩-٣) اولاء وضعنا محظورات على دوال الانتاج والمنفعة المنفردة والتى تضمن وجود (قيام) دوال فائض طلب اجمالى مناسبه • وبعد هذا نقدم الطرق الفنيه الرياضيه التى ترتكز عليها نظرية النقطه الثابته لبروور • وهذه النظريه Brouwer's fixed-point theorem تستخدم بعد ذلك لاثبات وجود توازن الاسواق المتعددة لجميع الانظمه التى تحتوى على دوال الانتاج والمنفعة التى تتمشى مع الانضباطات المنصوص عليها • واخيرا وضعنا الاطار العام بالخطوط العريضه لبعض نظريات الوجود المتقدمه والمبنيه على محظورات اكثر عموما •

حلول لبعض الأنظمة المحددة : Solutions for Particular Systems

يوجد حل من الدرجة الاولى ومحلى للـ N معادلة تفاضليه المحتويه على N متغير هذا اذا كانت مصفوفة جاكوب Jacobian لم تضمحل فى حوار صغير (راجع الفصل A-2) فالنظام المحتوى على m معادلة والذى تحصلنا عليه بوضع فائض الطلبات مساويا لصفر لا يمكن حله للقيم المطلقة للـ m سعر • بما ان اجمالى شروط الميزانيه تتحقق دائما فان فائض الطلبات يكون معتمدا على الدوال وتضمحل مصفوفة جاكوب الخاصة بها تطبيقيا• فعدم وجود حل محلى وحيد للاسعار المطلقة(البحته) يكون له معنا من الناحية الاقتصاديه الا ان فائض الطلبات متجانسه من الدرجه صفر فى جميع الاسعار •
فبوضع $p_1 = 1$ وحذف معادلة فائض الطلب للسلعة Q_1 فان النظام سوف يخفض الى $(m-1)$معادلة فى$(m-1)$سعر متغير فحتى الان ، افترضنا ان هذه المعادلات تكون مستقله وانه يوجد حل من الدرجه الاولى univalent solution للنظام المخفض وهذا الافتراض ليس بالحقيقة ضروريا فاذا اعتبرنا النظام المخفض والمكون من ثلاثة سلع الاتى :

$$E_2 = -2p_2 - 4p_3 + 10 = 0$$
$$E_3 = -3p_2 - 6p_3 + 15 = 0$$

فان مصفوفة جاكوب لهذا النظام سوف تضمحل تطبيقيا ولا يمكن حله لقيم وحده للسعرين p_3 و p_2 وتكون دوال فائض الطلب للسلعتين Q_2 و Q_3 غير مستقلة ويكون الاعتماد الدالى فى هذه الحاله هو $\bar{E}_3 = 1.5E_2$ فالمجتمع ككل يطلب ويعرض دائما السلعتين Q_2 و Q_3 ولكن بنسبة ثابته فاى مجموعة من القيم للسعرين p_2 و p_3 تحقق $p_2 = 5 - 2p_3$ سوف ينتج عنه توازن للاسواق المتعددة • والامثله على هذا تكون $p_2 = 1,\ p_3 = 2$ وكذلك $p_2 = 3,\ p_3 = 1$ ففى هذه الحاله ينص اختبار جاكوب على انه لا يوجد حل محلى من الدرجة الاولى ولكنه لا يعطى اى مساعدة فى التحديد بان هناك حلول اخرى موجودة بالفعل •

فالنظام الذى ينطبق عليه اختبار جاكوب يكون له حلول رياضيه محليه وحيده ولكن قد يحتوى بعض هذه الحلول على اسعار سالبه او يتطلب مستويات انتاج واستهلاك سالبه لبعض المشاركين فى السوق ، ولا يكون بالطبع مقبولا لتوازن لاسواق متعددة فكل نظام عددى لاسواق متعددة يجب ان يعامل على انفراد اولا ، نطبق شرط جاكوب بعدم الاضمحلال لتحديد ما اذا وجد حل رياضى محلى وحيد • فاذا وجد واحدا فيجب واحدا فيجب المجهولة لحل النظام واختيار حل (او حلول) له من وجهة نظر قبول او عدم قبول هذه الحلول من الوجهة الاقتصاديه • فلو ان مصفوفة جاكوب اضمحلت فيجب تطبيق ما يمكن تطبيقه باى طريقة تظهر مناسبه فى الظروف الراهنه لتحديد ما اذا وجدت حلول توازنيه ام لا •

نظرية النقطة الثابتة لبروور : Brouwer's Fixed-Point Theorem

ان طريقة الحل المقترحه لانظمة معينه لا تساعد كثيرا فى أعتبارات وجود الحلول لانظمة الاسواق المحدده التى لم تطبق عمليا ولا للانظمة التى تحتوى دوال فائض الطلب فيها على التواءات kinks يكون الاشتقاق عندها غير معروفا • ففى هذه الحالات يكون من الضرورى اثبات نظرية الوجود والتى تنص على ان جميع أنظمة الاسواق المتعددة المحققة للاقتراضات المنصوص عليها سوف يكون لها حلول توازنيه وتعتمد اغلب اثباتات الوجود على نظام او أخر من النظريات الرياضيه تسمى نظريات النقطه الثابته فنظرية بروور هى احدى هذه النظريات الرياضيه والتى هى اقلها صعوبة والمستخدمه فى فى الاقتصاد وسناقش فيما يلى الطريقة الرياضيه المبنيه عليها هذه النظريه •

أن القاعدة التى تقوم بتطبيق نقطة بنقطة فى الفضاء البعدى النونى او النونى

او مجموعة القواعد التى تنسب نقطة فى الفضاء البعدى النوانى بنقطه اخرى فى نفس الفضاء • أما أذا أفترضنا ان (x_1, x_2) تمثل نقطه فى الفضاء البعدى التربيعى ، وأن (x'_1, x'_2) تمثل النقطة المطابقه لها • فالقاعدتين $x'_1 = x_1 + x_2$ و $x'_2 = x_1^2 x_2$ ، يعطيان مثالا للمطابقه *mapping* فى الفضاء البعدى التربيعى two-dimensional space. فيمكن وضع x'_1 و x'_2 بدلالة x_1 ، x_2. ويمكن كتابة المطابقة فى الفضاء البعدى النونى عامه كالتالى :

$$x'_i = f_i(x_1, \ldots, x_n) \qquad i = 1, \ldots, n$$

او بكتابتها بطريقة أكثر ضغطا : $x' = F(x)$ حيث أن $x = (x_1, \ldots, x_n)$ ، $x' = (x'_1, \ldots, x'_n)$ وهذا مشابها للطريقة التى تمثل لها بالدوال ماعدا ان x و x' هنا يمثلان نقطتين بأحداثيات نونيه بدلا من أعدادا منفرده فالنقطه x' تسمى صورة *image* النقطه x وتكون المطابقة "متصله" أذا كانت كل دالة من الدوال $f_i(x)$ $(i = 1, \ldots, n)$ التى تكونها متصله أيضا •

فقد تعرف المطابقة لبعض المجموعات الجزئيه للنقط subset of points فى فضائها الاحداثى coordinate space فمثلا المطابقة $F(x)$ قد تعرف فقط للنقاط الواقعة على الدائرة التى يكون مركزها عند نقطة الاصل ونصف قطرها يساوى الوحدة ، بمعنى انها للنقاط التى تكون احداثياتها تحقق $x_1^2 + x_2^2 = 1$ وتكون المطابقة "ذاتيه" *into itself* اذا كانت نقاط المطابقه تقع ايضا فى مجموعة النقاط التى عرفت لها المطابقة فالدوال التاليه تعطى مثالا لمطابقة مجموعة من النقاط الواقعة على الدائرة التى نصف قطرها الواحدة على ذاتها : (١)

$$x'_1 = \frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} \qquad x'_2 = \frac{x_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}$$

تعرف مجموعة النقاط بانها "محدبه" convex اذا كانت كل نقطة على قطعة الخط المستقيم الواصل بين اى نقطتين فى المجموعه تنتمى الى نفس المجموعه ، فمجموعة النقاط المكونه من محيط الدائرة لا يكون محدبا لان قطعة الخط المستقيم الواصله بين نقطتين محددتين فى المجموعة تحتوى على نقاط داخل الدائرة وهذه النقاط ليست فى المجموعة المعتبرة • أما مجموعة النقط المكونه من محيط ود واخل الدائرة فأنها تكون محدبة •

ونعرف مجموعة النقاط فى الفضاء البعدى النونى بأنها "محددة من أعلى *bounded from above*" أذا وجدت كمية متجهة vector بأعداد نونيه محددة $x^* = (x_1^*, \ldots, x_n^*)$ بحيث أن $x_i^* \geq x_i$ لجميع قيم $x = (x_1, \ldots, x_n)$ فى المجموعة وتعرف المجموعة بأنها

---

(١) فلو أن $F(x)$ كانت معرفة لجميع النقط فى الفضاء البعدى التربيعى فأن المطابقة سوف تحمل الفضاء البعدى التربيعى الى الدائرة ذات نصف القطر المساوى للوحدة ولا تكون مطابقة "ذاتية" •

" محددة من أسفل " bounded from below أذا وجدت مجموعة أرقام نونيه محدودة x^0 بحيث أن $x_i^0 \leq x_i$ لجميع قيم x_i في المجموعة فالمجموعة المحدد bounded set تكون محدده من أعلى ومن اسفل • فمجموعة النقاط المكونه لمحيط الدائرة تكون محددة ولكن مجموعة النقاط المكونه للربع الموجب في الفضاء الاحداثي غير محددة •

وتعرف مجموعة النقاط بأنها " مغلقة " closed وذلك عندما تكون كل نقطة من نقاط المتاليه اللامنتهيه المتقاربه convergent infinitesequence أيضا في المجموعة وتكون نقطة النهاية limit point لهذه المتاليه أيضا في المجموعة[1] فمجموعة النقاط المعرفه بـ $0 < x < 1$ ليست مغلقه لان كل نقطه في المتاليه اللامنتهية $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots, 1/n$ تكون في المجموعة ، ولكن نهاية المتاليه ، هي صفر ، ليست في المجموعة • ولكن المجموعة $0 \leq x \leq 1$ تكون مغلقه •

تنص نظرية النقطة الثابته لبروور على ان للمطابقة المتصله للمجموعة المغلقهوالمحددة والمحدبه الذاتيه نقطة ثابته بمعنى أنه أذا كانت $F(x)$ هي المطابقه فانه يوجد نقطة x^* في المجموعة نعرف عليها المطابقة بحيث $x^* = F(x^*)$. فعلى الاقل نطابق نقطة واحدة على نفسها (ذاتية التطابق) أعتبر التطابق $F(x)$ الموضح على الشكل (١٠-١) كمثال فالتطابق (المطابقة) يكون معروفا في الفترة $0 \leq x \leq 1$ والتي تكون مغلقة ومحددة ومحدبة المجموعة على الخط الحقيقي real line وكذلك فأن التطابق يكون متصلا أيضاولذلك فانه يجب أن يكون هناك نقطة واحدة على الاقل بحيث أن الرسم البياني لـ $F(x)$ يتقاطع مع خط 45. المار بنقطة الأصل • فنقطة A في الشكل تكون مثل هذا التقاطع بالخاصيه التاليه $x^* = F(x^*)$ •

والآن نقدم أثباتا توضيحيا للوجود existence بأستخدام نظرية النقطة الثابتة لبروور وذلك لنظام الاسواق المتعددة من نوعية المدى القصير والذى طورناه في الفصل (٩-٣) ففي هذا الاطار ، تعنى " بالمدى القصير " عدد الوحدات الانتاجيه في كل صناعه قد تحدد مسبقا وأن الارباح لكل وحده أنتاجيه لوحدها لايحتاج أن يكون مساويا لصفر • فالاثبات يأتي على مرحلتين :

أولا : أثبات وجود دوال فائض الطلب الأجمالية بخواص مناسبه •
ثانيا : أثبات وجود أسعار توازن تحقق هذه الدوال •

---

(١) لقد اعطينا في الفصل (٥-٧) تعريفا لمجموعة النقاط المغلقة مختلفا عن هذا التعريف ولكنه مطابقا له •

الحد الأعلى من المنفعة (المتعه) فالمستهلك يرغب فى الحفاظ على كمية من النقـــود لايستفيد منها بأى منفعه أو متعه غير أنه يصرفها على السلع التى يستفيد منها ويحقق بها متعته ومنفعته أن من الصعب وجود دوافع للحفاظ على النقود فى النظام الغيرحركى الذى ليس له أى علاقه بالوقت السابق أو اللاحق • فصاعب النقود لاتوجد الا فى النظام الحركى فقط الذي يكون فيه السلوك مقيدا عبر الزمن •

النقود فى دالة المتعة (المنفعة) Money in the Utility Function

ان وضع النقود بطريقة مباشرة فى دالة المنفعه سوف يعطينا بديلا للمعادلة ٩ـ٣٥ والتعليل هو أن كميات النقود تعطى متعه (منفعة) وذلك بتسهيل عملية المبادلـــة• فيمكن كتابة شروط الدرجة الأولى للمستهلك i كالتالى :

$$\frac{U_{ij}}{U_{i,m+1}} = p_j \qquad j = 1, \dots, m$$

$$\sum_{j=1}^{m} p_j(q_{ij} - q^0_{ij}) + (q_{i,m+1} - q^0_{i,m+1}) = 0 \qquad (٩ـ٤١)$$

حيث أن Q_{m+1} تمثل النقود ولكن بسعر الوحدة فأى زيادة فى السعر مع ثبات كمية النقود الأوليه سوف ينتج عنه مبادلة السلع من أجل النقود •

نفترض أن أسعار جميع السلع والنقود التى يمتلكها المستهلك بادئ ذى بدء قـــد تغيرت بنسبة $t > 0$ فتصبح شروط الدرجة الأولى :

$$\frac{U_{ij}}{U_{i,m+1}} = tp_j \qquad j = 1, \dots, m$$

$$\sum_{j=1}^{m} tp_j(q_{ij} - q^0_{ij}) + (q_{i,m+1} - tq^0_{i,m+1}) = 0 \qquad (٩ـ٤٢)$$

فيمكن فصل الاقتصاد الى قطاعين حقيقى ونقدى هذا أذا كانت القيم للمتغير q_{ij} $(j = 1, \dots, m)$ تحقق (٩ـ٤١) وأن t مضروبه فى $q_{i,m+1}$ التى تحقق (٩ـ٤١) سوف تحقق (٩ـ٤٢) • وبالمثل يمكن القيام بعملية الفصل أذا كانت دوال فائض الطلب للسلع والنقود متجانسه من الدرجه صفر ومن الدرجة الأولى بالتوالى وذلك بالنسبه لأســــعار السلع ومايمتلكه من نقود فأى تغير فيما يمتلكه من نقود بنفس النسبه لجميع المستهلكيـــن سوف ينتج عنه تغيرات فى كميات النقود المرغوبه وفى أسعار السلع بنفس النسبه وسوف يترك مستويات أستهلاك السلعه المرغوبه من غير تغيير •

أن عملية الفصل غير ممكنه عادة ولكن هناك بعض الحالات التى يكون فيها الفصل ممكنا

فلو أن RCS الخاص بالمعادلة (٩ـ١ ٤) والمعادلة (٩ـ٢ ٤) تغيرا بالنسبه للنقـــود المحتفظة ، فان عملية الفصل ستكون ممكنه • ففي مثل هذه الحاله فان كميات السلع التى تحقق (٩ـ١ ٤) سوف تحقق أيضا (٩ـ٢ ٤) مع تغير فى كمية النقود المحفوظة بالنســـبه i. ومثال ذلك دالة المنفعة التى تستخدم دائما :

$$U_i = q_{i1}^{\alpha_1} q_{i2}^{\alpha_2} \cdots q_{im}^{\alpha_m} q_{i,m+1}$$

حيث أن RCS الخاص بها سوف يكون متناسبا مع كمية النقود المحفوظه :

$$\frac{U_{ij}}{U_{i,m+1}} = \frac{\alpha_j q_{i,m+1}}{q_{ij}} \qquad j = 1, \ldots, m$$

ويمكن للقارئ من التحقق بأن دوال فائض الطلب تعطى التجانس المناسب • وسوف تتحقق النتائج للمستهلك بالنسبه لاجمالى فائض الطلب اذا كان كل RCS للمســـتهلك متناسبا الى كمية النقود التى يحتفظ بها • وتغير كمية النقود التى يمتلكها مبدئيا بنفس النسبه •

٩ - ٥ ملخص ما سبق SUMMARY

يسمح تحليل توازن الاسواق المتعددة بتعيين مجموعة متوافقة من الاسعار لكـــل السلع • وفى نظام التبادل البحت يمنح الافراد بمخزونات من السلع • ويكون كـــل فرد حرف ان يشترى او يبيع السلع باسعار سائدة ومعرضه لقيود الميزانيه ، والتى تنص علـــى ان قيمة مبيعاته يجب ان تتساوى مع قيمة مشترواته • ويمكن اشتقاق دالة الطلب الزائـــد للفرد من شروط الدرجه الأولى لتعظيم الفائدة • ونحصل على الدالة الكليه بجمـــــع الدوال المستقله لكل سلعه • ويكون مجموع الزيادة الكليه للطلب مضروبا فى الاســـعار مساويا تماما للصفر • وينتج هذا من قيود ميزانية الافراد ويعرف بقانون والراس •ويكون دوال كل الافراد ، وبالتالى الدالة الكليه ، متجانسه ومن الدرجه صفر فى الاســـعار • ويتحدد سلوك المستهلك بنسب التبادل اكثر منه بالاسعار المطلقه • ويتطلب تـــوازن الاسواق المتعددة ان تكون زيادة الطلب لكل سلعه مساويه للصفر • وتكون m مــــن زيادات الطلب مرتبطه داليا كنتيجه لقانون والراس ، ويمكن التعبير عن حل الاتـــزان بدلالة $((m - 1))$ من نسب التبادل للسلع بالنسبه لوحدة مقايضه اعتباريه مختارها •

ويقدم الانتاج فى المرحله الثانيه من التحليل • ونفترض ان منح المستهلكين تتكون من العوامل الاوليه والتى يبيعونها عادة للمقاولين لكى يكونوا قادرين على شراء السلع المنتجه • ويستقبل المستهلك اجزاءا مقدرة من الارباح ويخسر المستحق بواســــطة وحدات الانتاج • وتشتق دوال الطلب الزائد للأفراد للسلع والعوامل من شروطه ذات الدرجه الاولى لتعظيم الربح او (الفائدة) • ويستعمل كل مقاول كل من العوامـــل

بحيث أن سلعة اوليه $k_j \ (j = 1, \ldots, s)$, سوف تفوق أجمالي مايمتلكه المستهلك وبحيث ان السلعة المنتجه $k_j \ (j = s+1, \ldots, m)$, سوف تفوق الناتج الاقصى للسلعه Q_j الذى يمكن تامينه أذا جندت جميع السلع الاوليه التى يمتلكها الاقتصاد لانتاج Q_j •

والان نركب مجموعة دوال فائض طلب غير حقيقية (زائفة) pseudo بأفتـــراض ان المستهلك i سوف يحصل على الحد الاقصى من المنفعة تحت شرط ميزانيته والمتطلبات الاضافيه الاخرى أن $E_{ij} \leq k_j \ (j = 1, \ldots, m)$ ومجال هذه الدوال هو مجموعة الاسعار المطبعة فى (١٠ـ٢) وهذه الدوال الغير حقيقيه مثل الدوال التقليديه (١٠ـ١) لجميع نقط الاسعار التى تحقق :

$$E_{ij}(p_1, \ldots, p_m) \leq k_j \qquad j = 1, \ldots, m$$

ولكن هذه اللامتساويه (المتباينات) لا تتحقق لجميع النقاط مجموعة الاسعار المطبعـة • فواحدة او اكثر من هذه المتباينات سوف لاتتحقق اذا كان واحدا او اكثر من الاسعار اما صفر او صغير بدرجة كافيه لتوليد فائض طلبات اكبر من الحد الاعلى المطابق •

افترض ان u من الحدود العليا تكون من المتباينات بدون علامة التساوى (متباينـة منضبطه strict equalities ثم اعد ترقيم السلع بحيث ان $E_{ij} = k_j \ (j = 1, \ldots, u)$ نعوض بهذه المتباينات ثم نكون دالة لاقرناج :

$$Z_i = U_i(k_1, \ldots, k_u, E_{i,u+1}, \ldots, E_{im}) - \mu\left(\sum_{j=1}^{u} p_j k_j + \sum_{j=u+1}^{m} p_j E_{ij} - \sum_{k=s+1}^{m}\sum_{h=1}^{N_k} \theta_{ihk}\pi_{hk}\right)$$

ضع الاشتقاقات الجزئيه $(m-u+1)$ لهذه الدالة مساويه لصفر :

$$\frac{\partial Z_i}{\partial E_{ij}} = U_j - \mu p_j = 0 \qquad j = u+1, \ldots, m$$

$$\frac{\partial Z_i}{\partial \mu} = -\left(\sum_{j=1}^{u} p_j k_j + \sum_{j=u+1}^{m} p_j E_{ij} - \sum_{k=s+1}^{m}\sum_{h=1}^{N_k} \theta_{ihk}\pi_{hk}\right) = 0$$

حيث ان $U_j = \partial U_i / \partial E_{ij}$ وان مصفوفة جاكوب لهذا النظام هى كالتالى :

$$\mathscr{H} = \begin{vmatrix} U_{u+1,u+1} & \cdots & U_{u+1,m} & -p_{u+1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ U_{m,u+1} & \cdots & U_{mm} & -p_m \\ -p_{u+1} & \cdots & -p_m & 0 \end{vmatrix}$$

حيث ان $U_{jh} = \partial^2 U_i / \partial E_{ij} \partial E_{ih}$ ويتكوين $p_j > 0 \ (j = u+1, \ldots, m)$ فان شرط شبهـ التقعر المنضبط لدالة المنفعة سوف يضمن ان القيم الصغرى الرئيسيه للمصفوفه $\mathscr{H}$ وهم يمثلون مجموعه جزئيه من ع سوف يتبادلوا فى الاشارات وبهذا فان دوال فائض الطلب المحددة

موجوده على افتراض ان u لفائض الطلبات تساوى حدودهم العليا • وهذه الـــدوال المحددة هى دوال فائض الطلب الزائفه لجميع نقط السعر والتى من اجلها لاتكون القيم التى تولدها لل $(m-u)$ فائض طلبات غير محظورة اكبر من حدودهم العليا •

ان دوال فائض الطلب التقليديه (١٠ـ١) تغطى الحاله $u=0$ وهذا المؤشــــر u قد يفترض قيم من صفر الى $(m-1)$ فالافتراضات التى تغطى دالة المنفعة وتكويــن جميع k_{ij} لاتضم الحالة التى تكون فيها الحدود العليا ذات فعاليه ، بمعـــنى ان $u=m$ فيوجد $m!/(m-u)!u!$ من المجاميع (١) المحتمله للحدود العليا m والـــتى تكون فيها الحدود العليا u ذات فعاليه • فيكون اجمالى عدد المجموعات دوال فائض الطلب المحددة (L) لجميع المجاميع المحتمله هى :

$$L=\sum_{u=1}^{m-1}\frac{m!}{(m-u)!u!}=2^m-1$$

فالرقم L قد يكون كبير جدا ولكن له نهايه ومحدد • ونمثل دوال فائض الطلـــب المحدده الزائفه للمستهلك i كالتالى :

$$E_{ij}=\hat{E}_{ij}(p_1,\ldots,p_m) \qquad j=1,\ldots,m \tag{١٠ـ٣}$$

وتتكون من المجموعات L لدوال فائض الطلب المحدده • اما الدوال الزائفه فانهـــا لاتعطى من مجموعة منفرده من المعادلات المنفرده m كماكان متبعا فى معظم الحالات حتى الان • فهم ياتون من المجموعات L لكل واحده من المعادلات المنفرده m وكذلك من القواعد التى تحدد اى من المجموعات يكون مناسبا لكل نقطه سعر• ويمكن الاثبـــات بالطرق المتقدمه ان دوال فائض الطلب الزائفه :

(١) لها مجموعة اسعار مطبعة (١٠ـ٢) تكون هى مجالها •

(٢) انها ذات قيمة منفرده بمعنى انه اذا كان هناك اكثر من مجموعة محققه من دوال فائض الطلب لنقطه سعر ، فان كل واحد من هذه المجموعات المحققه ســـوف يعطى قيم متطابقه ل E_{ij} عند تلك النقطه •

(٣) وانها متصله ولكن ليس لها اشتقاقات جزئيه من الدرجه الاولى والثانيه وذلك على وجه العموم • وبما ان المجموعات L لدوال فائض الطلب المحدده تحقق شرط ميزانية المستهلك فان الدوال الزائفه سوف تحققها هى ايضا •

ولكن بناء هذه الدوال المزيفه يمثل مطلبا صعبا حتى ولو لاعداد صغيرة نسبيا من السلع

---

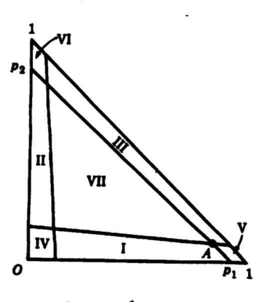
(١) ان الرقم $n!$ ويقرأ عاملى n يتكون من ناتج ضرب الاعداد الصحيحة واحد الـــى $1\cdot2\cdot3\cdots(n-1)n$. وبالتعريف فان $0!=1$ •

ولحسن الحظ • فان بنا* هذه الدوال الزائفه ليس بالضرورى فيكفى ان نعرف انها توجد وان نعرف خواصها ومميزاتها *

ان تجزئه السعر المبسط price simplex لدوال فائض الطلب الزائفه تكون موضحة على الشكل (١٠ــ٢) فالسعر المبسط يكون ممثلا بالمثلث فى الفضا* p_1p_2 وتكون قيمة p_3 معطاه ضمنا بالمتطابقه identity $p_3 = 1 - p_1 - p_2$ اما نقطة الاصل فهى (0, 0, 1) ويكون الوتر هو المحل الهندسى للنقاط التى يكون عندها $p_3 = 0$ وتكون الثلاثه اسعار موجبه للنقاط فى داخل المثلث •

فاذا كان هناك ثلاثة سلع فانه يوجد سبعة $(2^3 - 1)$ مجموعات من دوال فائض الطلب المحدده • وتقسم الخطوط قرب المحاور axes والوتر المبسط الى سبعة مساحات مطابقة للسبعة مجموعات وتكون الحدود الفعاله لهذه المساحات السبعه هى كالتالى :

المساحات	الحدود الفعاله
I	k_2
II	k_1
III	k_3
IV	k_1, k_2
V	k_2, k_3
VI	k_1, k_3
VII	لاشيء



شكل (١٠ - ٢)

وينعكس اتصال الدوال الزائفه بالحدود التى تعطى اى مجموعة منها او اكثر فائض طلبات مماثل فنقطة A تمثل حاله شاذه extreme case ونادرة حيث ان المجموعات المطابقة VII V, III, I تعطى نفس مستويات فائض الطلب • ولكن الحدود لاتحتاج لان ، تكون خطيه كما هو موضحا على الشكل (١٠ــ٢) (راجع تمرين ١٠ــ٦) •

اما طريقة بناء دوال فائض الطلب للوحده الانتاجيه فان يشبه للطريقة التى استخدمت فى حالة المستهلك ، فصاحب المال فى الوحده h فى الصناعة j يستخدم السلع n كدواخل لانتاج السلعة j فهو يبيع منتجاته ويشترى دواخله فى اسواق متنافسه وباسعار غير سالبه وتعرف دالة انتاجه للدواخل الغير سالبه ولمستويات الانتاج ، ونفترض انها محدبة بالانضباط •

وان انتاجها الحدى يكون موجبا • ونمثل لمستوى انتاج الوحده h فى الصناعه j بالرمز $\bar{q}_{hj}$ كما هو فى السابق ، ونمثل لكمية السلعة k التى تستخدم كداخل بالرمز q^*_{hk}•

ونطبق الافتراض الداخلى التالى : $\bar{q}_{hj}=0$ اذا كانت $q^*_{hk}=0$ لبعض k وتكون $\bar{q}_{hj}>0$ اذا كانت $q^*_{hk}>0$ لجميع k باضافة $\lim \bar{q}_{hj}/q^*_{hk}=+\infty$ وذلك كلما اقتربت q^*_{hk} من الصفر (بمعنى ان $q^*_{hk}\to 0$) وان $\lim \bar{q}_{hj}/q^*_{hk}=0$ كلما اقتربت q^*_{hk} من مالانهاية الموجبه $q^*_{hk}\to+\infty$ وتضمن المحظورات التى وضعت على دالة الانتاج تحقيق شروط الدرجة الاولى والثانيه لجميع النقاط داخل المبسط simplex بمعنى انه لجميع الاسعار الموجبه ، وكذلك تضمن وجود دوال فائض الطلب التقليديه لهذا المجال على النمط :

$$E^*_{hk}=E^*_{hk}(p_1,\ldots,p_m) \qquad k=1,\ldots,m \qquad (١٠ــ٤)$$
$$\bar{E}_{hj}=\bar{E}_{hj}(p_1,\ldots,p_m)$$

وتتطلب هذه المحظورات ايضا مدى لـ $E^*_{hk}>0\ (k=1,\ldots,m)$ وكذلك لـ $\bar{E}_{hj}<0$

ان الدوال التقليديه (١٠ــ٤) لاتضمن بطريق مباشر الاسعار صفر • فالدوال الزائفه لفائض الطلب قد عرفت للمنتجين على افتراض انهم سوف يحصلون على الحد الاعلى من الربح تحت المحظورات الاضافيه التاليه :

$$E^*_{hu}=q^*_{hu}\le k_u \quad (u=1,\ldots,m)$$

ولم يوضع اى حد مباشر على مستوى انتاجه •وافترض ان مستويات الدواخل والانتاج تكون مساويه لصفر اذا كان سعر الناتج يساوى صفر :

$$p_j=0 \text{ هواذا كان } \bar{q}_{hj}=q^*_{h1}=\cdots=q^*_{hm}=0$$

يمكن تعريف دوال فائض الطلب المحدده لكل مجموعه محتمله للحدود العليا الفعاله وذلك بتعويض $q^*_{hu}=k_u$ المناسب فى معادلة ربح الوحده المنتجه وتحديد القيم

المظمى بدلالة اسعار مستويات الداخل المتبقيه وبدلالة مستوى الانتاج ونرمز لـدوال فائض الطلب المزيفه للوحده j في الصناعة h كالتالي :

$$E^*_{hk} = \hat{E}^*_{hk}(p_1, \ldots, p_m) \qquad k = 1, \ldots, m \qquad (٥_١٠)$$

$$\hat{E}_{hl} = \hat{E}_{hl}(p_1, \ldots, p_m)$$

وتتكون هذه الدوال المحددة وعلى نمط حالة المستهلك ، فانه يمكن اثبات ان :

(١) مجموعة الاسعار المطبعة تمثل محال الدوال الزائفه •

(٢) وانها ذات قيمة منفرده •

(٣) وانها متصله •

ويمكن باستخدام الطرق المتقدمة اثبات ان الربح الاقصى للوحدة الانتاجية يكون موجبا اذا كان سعر الناتج موجبا ويكون ربحه صفرا اذا كان سعر الناتج صفرا وتظهر اهمية هذه من شقين • اولا ، تعني انه ليس هناك من وحده تنتج بربح سالب • ثانيـــا ، تعني ان كل مستهلك سوف يكون لديه دخلا موجبا اذ كان اى من الاسعار موجبـــا فكل مستهلك يكون لديه كمية موجبه من كل سلعة اوليه وسوف يكون لديه دخل موجب اذا كان سعر اى سلعة اوليه موجبا • فلو ان جميع اسعار السلع الاوليه صفرا ، فـــان المستهلك سوف يكون لديه دخلا من الارباح اذا كان اى واحد من اسعار الناتـــــج موجبا • وهذا ناتجا من الافتراض الذى ينص على ان لكل مستهلك نصيب من الربح من على الاقل واحدة من الوحدات الانتاجيه في كل صناعه •

ويمكن الحصول على دوال فائض الطلب الاجمالي التقليديه للمحال $p_k > 0 (k = 1, \ldots, m)$, وهي :

$$E_j = E_j(p_1, \ldots, p_m) \qquad j = 1, \ldots, m \qquad (٦_١٠)$$

وذلك بتجميع الدوال التقليديه لكل مستهلك ومنتج والمعطاه بالمعادلة(١٠ــ١) و (١٠ــ٤) على التوالي • ويمكن ايضا الحصول على دوال فائض الطلب الاجماليه الزائفه والتي تكون مجموعة الاسعار المطبعه محالها وهي :

$$E_j = \hat{E}_j(p_1, \ldots, p_m) \qquad j = 1, \ldots, m \qquad (٧_١٠)$$

وذلك من الدوال الزائفه للمستهلكين والمنتجين المعطاة بالمعادلات في(١٠ــ ٣) و (١٠ــ٥) على التوالي •

فلكل نقطه سعر تعطى الدوال الزائفه الاجماليه مجموع فائض الطلبات المعلى من الدوال المحددة المناسبه لكل مستهلك ومنتج ويتبع اتصال كلا المجموعتين من الدوال من اتصال الدوال المنفرده المطابقة لها • وتحقق كل مجموعة من مجموعات الدوال الاجماليه قانون فالراس ومن الخواص المهمة للدوال الاجماليه الزائفه من وجهة نظر وجودها هو ان E

يكون موجبا وحدد اذا كانت $p_j = 0$.

وجود أسعار توازن :[١] Existence of Equilibrium Prices[1]

يوجد عموما توازن للاسواق المتعدده اذا كان هناك مجموعة واحدة على الاقل من نقاط الاسعار المطبعة بحيث ان :

$j = 1, \ldots, m$ $E_j = 0$ اذا كان $p_j > 0$ $E_j \leq 0$ اذا كان $p_j = 0$ ولتسهيل عملية الرموز ، نستعمل الرمز التالي ليدل على نقطه ما في مجموعة الاسعار المطبعة $p = (p_1, \ldots, p_m)$ فمجموعة الاسعار المطبعة تكون مغلقة ومحددة ومحدبه . فاذا كانت $m = 2$ فانه يكون خطا ممتدا من $(1,0)$ الى $(0,1)$ اذا كانت $m = 3$ فانه يكون مثلثا .

ونواصل اثبات الوجود بابتكار تطابق ذاتي mapping intoself مناسب لمجموعة الاسعار المطبعة ، مظهرين انها تحتوي على نقطة ثابته ، ثم موضحين ان هذه النقطه الثابته تعرف توازن للاسواق المتعددة .

نعرف الدوال m بالتالي :

$$g_j(\mathbf{p}) = \max\,[p_j + \hat{E}_j(\mathbf{p}), 0.5p_j] > 0 \qquad j = 1, \ldots, m \qquad (١٠-٨)$$

وبما انه من (١٠-٢) الاسعار لايمكن ان تكون سالبا ، وبما ان الاسعار الصفرية تتطلب فائض طلب موجب ، فانه يتبع من هذا ان جميع دوال (١٠-٨) يكون لها قيم موجبة .ضع :

$$h(\mathbf{p}) = \sum_{j=1}^{m} g_j(\mathbf{p}) > 0 \qquad (١٠-٩)$$

بما ان $h(\mathbf{p})$ تكون دائما موجبه ، فان القسمه بها يكون مسموحا به نعرف الان دوال جديده عددها m كالتالي :

$$f_j(\mathbf{p}) = \frac{g_j(\mathbf{p})}{h(\mathbf{p})} > 0 \qquad j = 1, \ldots, m \qquad (١٠-١٠)$$

فهذه الدوال تعرف تطابق اسعار متصل . واتصال هذا التطابق يتبع من اتصال (١٠-٨) و (١٠-٩) وبما ان :

$$\sum_{j=1}^{m} f_j(\mathbf{p}) = \frac{\sum_{j=1}^{m} g_j(\mathbf{p})}{h(\mathbf{p})} = 1$$

باستخدام (١٠-٩) فان صور النقاط تحقق تعاريف مجموعة الاسعار المطبعة ، وان (١٠-١٠) تطابق هذه المجموعة على نفسها (تطابقا ذاتيا) وينبع من نظريه النقطه الثابته لبروور ان مجموعة الاسعار المطبعة تحتوي على نقطة واحده على الاقل وهي $\mathbf{p}^*$ بحيث ان :

$$p_j^* = f_j(\mathbf{p}^*) = \frac{g_j(\mathbf{p}^*)}{h(\mathbf{p}^*)} > 0 \qquad j = 1, \ldots, m \qquad (١٠_١١)$$

ان جميع عناصر $\mathbf{p}^*$ تكون موجبه لان (١٠_١١) عبارة عن حالة خاصة من(١٠_١٠) ويتبقى ان نثبت ان جميع فائض الطلبات تساوى صفر عند النقطه المعرفه بالمعادلـــــه (١٠_١١) قبل ان نستنتج ان مثل هذه النقطه يمثل توازن اسواق متعددة •

ان كل $g_j(\mathbf{p}^*)$ يكون على الاقل بكبر $0.5p_j^*$ فلو ان كل واحدة مـــن $g_j(\mathbf{p}^*)$ تساوى $0.5p_j^*$ فان مجموع $h(\mathbf{p}^*)$ سوف يساوى 0.5 كما اثبتناه عن طريق(١٠_٨) و(١٠_٢) فلو ان اى من $g_j(\mathbf{p}^*)$ تفوق $0.5p_j^*$ فان $h(\mathbf{p}^*)$ سوف تفوق 0.5 فاذا كانت جميع $g_j(\mathbf{p}^*) = 0.5p_j^*$ فانه يتبع من (١٠_٨)ان جميع $\hat{E}_j(\mathbf{p}^*) < 0$ وهذا يتطلب ان $\Sigma_{j=1}^m p_j^* \hat{E}_j(\mathbf{p}^*) < 0$

والذى يتعارض مع قانون فالراس • وبهذا فانـــه ليس من الحقيقه بمكان ان : $g_j(\mathbf{p}^*) = 0.5p_j^*$ لجميع j افترض انه صحيح لبعض j فانه اذا مـــــــن (١٠_١١) :

$$p_j^* = \frac{g_j(\mathbf{p}^*)}{h(\mathbf{p}^*)} = \frac{0.5p_j^*}{h(\mathbf{p}^*)} < p_j^*$$

بما ان $h(\mathbf{p}^*) > 0.5$ ولكن هذا ايضا يمثل تعارضا • فاذا يتبع من (١٠_٨) ومـــن (١٠_١١) ان:

$$p_j^* = \frac{p_j^* + \hat{E}_j(\mathbf{p}^*)}{h(\mathbf{p}^*)} \qquad j = 1, \ldots, m \qquad (١٠_١٢)$$

نبضرب طرفى المعادلة j فى (١٠ =_١٢) بالمقدار $\hat{E}_j(\mathbf{p}^*)$ ثم اضافة المعادله m الناتجة :

$$\sum_{j=1}^{m} p_j^* \hat{E}_j(\mathbf{p}^*) = \frac{\sum_{j=1}^{m} p_j^* \hat{E}_j(\mathbf{p}^*) + \sum_{j=1}^{m} [\hat{E}_j(\mathbf{p}^*)]^2}{h(\mathbf{p}^*)}.$$

وينبع من قانون فالراس ان الجانب الايسر والحد الاول فى المقام على الجانب الايمن يكون مساويا لصفر • ولهذا فان :

$$\sum_{j=1}^{m} [\hat{E}_j(\mathbf{p}^*)]^2 = 0$$

وبما ان حاصل جمع مربعين يساوى صفرا فقط اذا كان كل حد يساوى صفر ، فـــــان $\hat{E}_j(\mathbf{p}^*) = 0$ لجميع j وان النقطه الثابته $\mathbf{p}^*$ تكون مجموعة اسعار توازن لاسواق متعددة • وبما ان جميع اسعار التوازن تكون موجبه فان (١٠_٦) تعطى اجمـــــالى فائض الطلبات ، وان (١٠_١) و(١٠_٤) تعطى فائض الطلبات المنفرد [١] • ويكون

---

(١)لقد عرفنا k_i بان تكون بدرجة كبيرة جدا لتكون متوافقة مع ما يمطكه الاقتصاد والنتيجه هى ان ليس هناك ولا واحد من فائض الطلب المحدد فعال فى التوازن •فاسعار التوازن تقع فى مساحات مثل المساحه VII على الشكل(١٠_٢)•

مستوى الاستهلاك لكل سلعة من قبل كل مستهلك موجبا ومحدد • وتكون كذلك مستويات الداخل والمنتجات لكل منتج موجبه ومحدده •

ولقد بذل مجهود جبار في تعريف فائض الطلبات الزائف للاسعار الصفرية ليكتشف فقط ان المحظورات التي وضعت على دوال الانتاج والمنفعة الفرديه تولد دائما اسعار توازن موجبه • ولكن لولا اننا لم نضيف حالة الاسعار الصفريه فانه لم يكن من الممكن تعريف تطابق لمجموعة الاسعار المطبعه المغلقه (١٠-٢) ، وان نظريه النقطه الثابته لبروور لا يمكن تطبيقها •

إثباتات متقدمة للوجود : Advanced Existence Proofs

لقد اثبتنا الوجود لاقتصاد تنافس تكون فيه دوال الانتاج ودوال المنفعة المنفرده متصلة ويكون لها اشتقاقات جزئيه متواصله من الدرجه الاولى والثانيه وانها تخضع لمحظورات منصوص عليها • وهذا الاثبات مثل غيره من اثباتات الوجود اعتمد على اساسه على شروط الكفايه sufficiency وليس على شروط الضروره necessity فكل الانظمة التي تحقق المحظورات يحون لها نقاط توازن ولكن يوجد هناك بعض الانظمه التي لها نقاط توازن لا تحقق هذه المحظورات بعدد كبير من المؤلفين وظف الرياضيات المتقدمه لصياغة اثباتات الوجود والمبنيه على محظورات عامه ضعيفه (١) •

ان من احد الاثباتات الاكثر كمالا والاقل خطرا تلك التي اسسها المؤلف Gerard Debreu وسوف نلخصها هنا بطريقة تقريبيه والتحاليل تكون بدلالة مجموعات النقاط بدلا من الدوال • ولاثبات الوجود استفاد دبرو من نظريه النقطه الثابته لكاكوتاني Kakutani والتي تعمم نظريه بروور من تطابق نقطة على نقطه الى تطابق نقطه على مجموعة • ولقد عرف مجموعة الاستهلاك للمستهلك i بانها حصيلة جميع النقاط الممكنة لممثله لمستويات استهلاك السلعة (ارقام غير سالبه) وكذلك للمتلكات المبدئيه (ارقام غير موجبه) ولقد افترض ان كل مجموعة استهلاك للمستهلك تكون :

(١) مغلقه ومحدبه ، ومحددة من اسفل •

(٢) ان لا تحتوي على نقطة تشبع •

(٣) وانها تحتوي على مجموعة اقل من (بدون المساواة) ما يمتلكه المستهلك مبدئيا •

---

(٢) راجع كتاب Rubin Saposnik, James Quirk بعنوان : *Introduction to General Equilibrium Theory and Welfare Economics* (New York: McGraw-Hill, 1968), chap. 3.

[3] *Theory of Value* (New York: Wiley, 1959).

وتعتمد الافتراضات عن مايفضله المستهلك على الرتب ranks ولاتحتاج مجموعة الاستهلاك العظمى للمستهلك من ان تكون فريدة •

يسمح للوحدة الانتاجيه من انتاج اكثر من سلعة واحدة ، ونصف الناتج بارقام موجبه والداخل بارقام سالبه • ونفترض ان كل وحدة قد تظل عاطله (بدون عمل) غيرمستخدمه اى داخل اما افتراضات ديبرو المتبقيه عن الانتاج فانها تغطى الاقتصاد وككل بدلا من الوحدات المفرده • ونعرف مجموعة الانتاج الاجماليه على انها جميع الخليط المحتمل للدواخل والنواتج للاقتصاد ككل ونفترض ان مجموعة الانتاج الاجماليه تكون مغلقه ومحدبه ولهذا فان زيادة الغله (او زيادة العائدات increasing returns غير ممكنه للاقتصاد ، ولكنها تكون ممكنه للوحدات المنفرده •وتسمح بالتصرف الحر لدواخل Free disposal ونفترض ان الانتاج غير قابل للعمليه العكسيه اى ان الدواخل لايمكن انتاجها باستخدام النواتج فجميع الاقتصاديات التنافسيه والتى تحقق افتراضات ديبرو يكون لها واحد واكثر من نقاط التوازن •

١٠ - ٣ ثبات (استقرار) التوازن STABILITY OF EQUILIBRIUM

فحالما نثبت وجود التوازن ، قد يسال البعض تحت اى شروط سوف يعود النظام لنقطة التوازن بعد حدوث اضطرابات وكذلك تحت اى شروط سوف يكون للنظام نقطه توازن واحده فقط • ويمكن التصريح باقوال معقوله عن استقرار ووحدانية النظام وذلك للانظمة التى تمتثل للافتراضات العامه والمعتبره فى الفصل السابق •مع انه يمكن القول قليلا عن الانظمه التى تمتثل للافتراضات الضعيفه نسبيا الخاصه باثبات الوجود لديبرو • وحيث ان تحاليل الاستقرار تمدنا بالخطوط العريضة لتحاليل الوحدانيه uniqueness فاننا نبدء اولا بالاستقرار •

لقد اهملنا فى الفصل (٦ ـ ٨) تاثيرات الاضطرابات فى احد الاسواق الاخرى وذلك تمشيا مع افتراضات تحاليل التوازن الجزئيه اما تحاليل التوازن العامة فانها تاخذ فى الاعتبار طبيعة تداخل جميع الاسواق •• فغائض الطلب لاى سلعة يكون بدلالة اسعار جميع السلع ، وكذلك اى اضطراب فى احد الاسواق سوف يحل بالتوازن فى اسواق اخرى • فاستقرار احد الاسواق سوف يعتمد على التعديلات التى تحدث بعد حصول الاضطرابات فى الاسواق الاخرى فالشروط الحركيه والغير حركيه static and dynamic للاستقرار فى احد الاسواق سوف يوسع ليشمل نظام الاسواق المتعدده فى الفصل الحالى • وتسمى الشروط الغير حركيه عادة بشروط هكس *Hicksian* تشريفا للرجل الذى اسسها • ونستخدم فى هذا الفصل ايضا الافتراضات السلوكيه لفالراز (راجع الفصل ٦ ـ ٨) •

الاستقرار الغير حركي : Static Stability

دع Q_1 تستخدم كوحدة مقايضه ثم ضع سعرها مطابقا تماما للوحده فشـرط الاستقرار لنظام السوق الثنائي يكون هو نفس الشرط لنظام السوق المنفرد • فيوجـد معادلة واحدة فقط مستقله ويجد ايضا سعرا متغيرا واحدا فقط $E_1 = E_1(p_2)$ وكذلك $E_2 = E_2(p_2)$ وسوف يتحقق شرط الميزانيه الاجمالي دائما قانون فالراس $E_1 + p_2E_2 = 0$ فارخا• شرط توازن Q_2 بحيث ان $E_2 \neq 0$ يتطلب بالضرورة ارخا• شرط التـوازن للسلعه Q_1 بحيث ان :

$dE_1 + p_2\, dE_2 = 0.$ وعلى هذا فالاشتقاقين dE_1/dp_2 فالتفاضلين dE_1 و dE_2 و dE_2/dp_2 يجب ان يكونا باشارتين مختلفتين ماعدى في الحاله البديهيه والـتي تكون فيها كلا الاشتقاقين صفرا ويكون التوازن مستقرا حسب افتراض فالراس الغير حركـي اذا كانت ($dE_1/dp_2 > 0$ (او مايكافوء، اذا كانت $dE_2/dp_2 < 0$ فاذا اعيـد التوازن في سوق Q_2 فان التوازن سوف يعود اليا في سوق وحدة المقايضه Q_1 اى انه اذا كانت $E_2 = 0$ فان E_1 يجب ان تساوى صفرا ايضا وتظهر المشاكل الخاصه باستقرار الاسواق المتعددة فقط للانظمه التي تحتوى على سوقين • او اكثر من الاسواق المتداخله• فلو ان $\partial E_k/\partial p_j \neq 0$ فان اى ازاحة للتوازن سوق Q_j سوف يتسبب في ازاحـة التوازن في سوق Q_k ويتطلب استقرار فالراس للسوق المنعزل بان يـكون $\partial E_j/\partial p_j < 0$ حيث ان $\partial E_j/\partial p_j$ تكون اشتقاق جزئي وان جميع الاسعار الاخرى يفترض فيهـا ان تظل بدون تغيير • ويجب الاستفاده من الاشتقاق الكامل dE_j/dp_j وذلك ضمـن تحاليل الاسواق المتعددة وقد تحسب قيمتها تحت عدد من الافتراضات البديله الخاصه بالتعديلات في الاسواق الاخرى فاحد الاحتمالات هو ان نفترض ان التوازن قد يعود في جميع الاسواق ماعدى في سوق Q_j وسوق وحدة المقايضه •[1] فقد توجد تشكيـلات مختلفه لعملية التعديلات في الاسعار ماعدا في حالة عدم المرونه الكاملة حيث ان ليـس سوقا من الاسواق الاخرى $(m - 2)$ قابلا للتعديل وكذلك حالة المرونه الكاملة حيث ان جميع الاسواق تكون قابله للتعديل • فقد نتخيل عامة وجود نظام يحتوى على اسعـار جامدة M "rigid prices" لاتتغير عن قيم التوازن المبدئيه خلال الفترة المعتبره حيث ان M قد تكون اى عدد من واحد الى $(m - 1)$ وسوف يكون سعر وحدة المقايضه جامد دائما نتيجة لهذا التعريف •

ان من اشد الشروط التوازن صرامة ودقة لسوق $Q_j\ (j \neq 1)$ يتطلب بان يكـون

---

(١) وبما ان اجمالي شرط الميزانيه يتحقق دائما ، فان $p_jE_j + E_1 = 0$ اذا كانت Q_1 هي وحدة المقايضه • وتعطى انتهاك حرمة شرط التوازن لوحدة المقايضه • والركود الضروري للسماح لفائض الطلب على Q_j من ان يكون بقيم غير صفريه •

الاشتقاق الكامل dE_j/dp_j سالبا لجميع الخليط للاسعار الجامده والمرنه • ويكون السوق للسلعه Q_j مستقرا تماما حسب تعريف هيكز اذا كانت $dE_j/dp_j < 0$ تحت الشروط التاليه :

(١) اذا كانت جميع الاسعار $(m-1)$ ماعدا p_j جامدة •

(٢) اذا كانت $(m-2)$ من الاسعار جامدة ولكن p_k ، p_h مرنين وقابلين للتعديل بحيث ان $E_h = 0$ وان $E_k = 0$ وهكذا حتى الحالة الاخيرة التى تكون جميع الاسعار فيها لجميع السلع مرنة ماعدا سعر وحدة المقايضه ويكون النظام ككل مستقرتماما اذا كانت الاسواق $(m-1)$ للسلع ماعدا سلعةوحدة المقايضه مستقرة تماما •

تعطى المعادلة التاليه دوال فائض الطلب لمجموعة وعدد m من السلع :

$$E_j = E_j(p_2, \ldots, p_m) \qquad j = 2, \ldots, m \qquad (١٠\text{—}١٣)$$

ولقد حذفنا دالة فائض طلب وحدة المقايضه لانه من الممكن اشتقاقها من المعادلات $(m-1)$ الاخرى، ويمكن الحصول على التاثيرات التى تتركها التغيرات فى الاسعار على فائض الطلبات وذلك بحساب التفاضل الكامل للمعادلة (١٠—١٣)

$$\begin{aligned} dE_2 &= b_{22}\ dp_2 + b_{23}\ dp_3 + \cdots + b_{2m}\ dp_m \\ dE_3 &= b_{32}\ dp_2 + b_{33}\ dp_3 + \cdots + b_{3m}\ dp_m \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ dE_m &= b_{m2}\, dp_2 + b_{m3}\, dp_3 + \cdots + b_{mm}\ dp_m \end{aligned} \qquad (١٠\text{—}١٤)$$

حيث ان $b_{jk} = \partial E_j/\partial p_k$ وبما انه يمكن افتراض ان b_{jk} قد تكون ثابته فى حوار صغير حول نقطة التوازن فان (١٠ — ١٤) سوف تكون نظاما مؤلفا من $(m-1)$ معادلات خطيه انيه محتويه على $(m-1)$ من المتغيرات $(dp_2, \ldots, dp_m)$ ومعاملات (١٠—١٤) تكون مصفوفة جاكوب من $E_2, \ldots, E_m$ وذلك بالنسبه للاسعار $p_2, \ldots, p_m$ •

اعتبر الان الحاله التى تزحزحت فيها نقطة التوازن فى سوق Q_j وان جميع الاسعار الاخرى تكون جامدة وبتعويض $dp_k = 0$ للقيم $k = 2, \ldots, m$ $j = k$ فى (١٠—١٤) فتصبح المعادلة $(j-1)$ الاولى هى [١] :

$$dE_j = b_{jj}\, dp_j$$

---

(١) ان زحزحت التوازن فى سوق Q_j سوف يتسبب فى زحزحت جميع التوازن فى الاسواق الاخرى فتصبح المعادلات الاخرى لـ (١٠—١٤) : $dE_k = b_{kj}\, dp_j$ وبما اننا افترضنا ان الاسعار الاخرى تكون جامدة فان هذه الزحزحات سوف لايكون لها معقول ذو اثر رجعى على فائض طلب Q_h وسوف يستمر تحقيق فائض الطلبات الغير صفرى فى الاسواق الاخرى •

وبالقسمه على dp_j نحصل على الشرط الاول للاستقرار التام لسوق Q_j :

$$\frac{dE_j}{dp_j} = b_{jj} < 0 \qquad (١٠ـ١٥)$$

ان شرط (١٠ـ١٥) يكون مطابقا لطلب الاستقرار للسوق المنعزله • اما الاستقرار التام فانه يتطلب ان تتحقق (١٠ـ١٥) لجميع $j = 2, \ldots, m,$ وعلى هذا فان الشرط الاول للاستقرار التام يتطلب الاستقرار المنعزل لكل سوق فى النظام •

والان اعتبر الحالة التى تزحزحت فيها التوازن فى سوق Q_j وان p_h قد تعدلت وان جميع الاسعار الاخرى تكون جامدة وبتعويض $dE_h = 0$ و $dp_k = 0$ $k \neq j, h$ فى(١٠ـ١٤) فتصبح المعادلتان لـ Q_j ، Q_h كالتالى :

$$dE_j = b_{jj}\, dp_j + b_{jh}\, dp_h$$
$$0 = b_{hj}\, dp_j + b_{hh}\, dp_h$$

وباستخدام قاعدة كريمر Cramer's rule لايجاد قيمة dp_j :

$$dp_j = \frac{\begin{vmatrix} dE_j & b_{jh} \\ 0 & b_{hh} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} b_{jj} & b_{jh} \\ b_{hj} & b_{hh} \end{vmatrix}} = dE_j \frac{b_{hh}}{\begin{vmatrix} b_{jj} & b_{jh} \\ b_{hj} & b_{hh} \end{vmatrix}}$$

وبالقسمه بالحد الثابت على اليمين وبالقسمه ايضا بـ dp_j فيصبح الشرط الثانى للاستقرار التام لسوق Q_j كالتالى :

$$\frac{dE_j}{dp_j} = \frac{\begin{vmatrix} b_{jj} & b_{jh} \\ b_{hj} & b_{hh} \end{vmatrix}}{b_{hh}} < 0 \qquad (١٠ـ١٦)$$

ويتطلب الاستقرار التام لسوق Q_h امام مقام(١٠ـ١٦) يكون سالبا ولذا فان الاستقرار التام للنظام ككل يتطلب بان يكون مقام (١٠ـ١٦) موجبا •

واخيرا اعتبر الحالة التى يكون التوازن فيها قد زحزح فى سوق Q_j وان p_h ، p_i قد تعدلا وان الاسعار $(m-4)$ جامدة وبتعويض $dE_h = dE_i = 0$ وكذلك $dp_k = 0$ للاسعار الاخرى $(m-4)$ فى (٥ـ٥٨) فتصبح المعادلات المناسبه كالتالى:

$$dE_j = b_{jj}\ dp_j + b_{jh}\ dp_h + b_{ji}\ dp_i$$
$$0 = b_{hj}\, dp_j + b_{hh}\, dp_h + b_{hi}\, dp_i$$
$$0 = b_{ij}\ dp_j + b_{ih}\ dp_h + b_{ii}\ dp_i$$

وباستخدام قاعدة كريمر للحل لقيم dp_j •

$$dp_j = \begin{vmatrix} dE_j & b_{jh} & b_{ji} \\ 0 & b_{hh} & b_{hi} \\ 0 & b_{ih} & b_{ii} \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} b_{jj} & b_{jh} & b_{ji} \\ b_{hj} & b_{hh} & b_{hi} \\ b_{ij} & b_{ih} & b_{ii} \end{vmatrix}$$

ويفك مربوط المقام بالعمود الاول ثم الحل لقيم dE_j/dp_j فيصبح الشرط التالـــــث للاستقرار التام في سوق Q_j :

$$\frac{dE_j}{dp_j} = \begin{vmatrix} b_{jj} & b_{jh} & b_{ji} \\ b_{hj} & b_{hh} & b_{hi} \\ b_{ij} & b_{ih} & b_{ii} \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} b_{hh} & b_{hi} \\ b_{ih} & b_{ii} \end{vmatrix} < 0 \qquad (١٠\text{—}١٧)$$

وبوضع $h = j$ ، $i = h$ في المتطلب (١٠ــ١٦) فان الاستقرار الكامــل لسوق Q_h ســوف يتطلب بان يكون (مقام(١٠ــ١٧) موجبا ولذا فـان الاستقرار التام للنظام ككل يتطلـب بان يكون بسط (١٠ــ١٧) سالبا •

اما النظام ككل فان الاستقرار التام يتطلب بان تكون مرتبه order محددة جاكـــوب Jacobian determinants هي $[1,2,3,\ldots,(m-1)]$

$$b_{jj}, \begin{vmatrix} b_{jj} & b_{jh} \\ b_{hj} & b_{hh} \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} b_{jj} & b_{jh} & b_{ji} \\ b_{hj} & b_{hh} & b_{hi} \\ b_{ij} & b_{ih} & b_{ii} \end{vmatrix}, \ldots$$

بحيث انها تكون تبادليه اشاراتها: سالبهوموجبه لجميع قيم $j, h, i, \ldots$ وتعتبر شروط الاستقرار التام اشد من انها ضروريه لاعتبارات اغلبيه انظمه الاسواق المتعددة • فلو ان النظام لم يحتوى على اسعار جامدة ، فان القيمة النسبيه الوحيده لـ dE_j/dp_j يتم حسابها على افتراض ان الاسواق الاخرى $(m-2)$ سوف تتعدل• وباتباع نظام الحساب المشار اليه سابقا فان سوق Q_2 سوف يكون مستقرا اذا كان :

$$\frac{dE_2}{dp_2} = \frac{\mathcal{B}}{\mathcal{B}_{22}} < 0 \qquad (١٠\text{—}١٨)$$

حيث ان $\mathcal{B}$ تمثل محددة جاكوب للنظام المتكامل المعنى بالمعادلة (١٠ــ١٤) وان $\mathcal{B}_{22}$ تمثل مفاعل cofactor b_{22} اما مفهوم هيكز فان النظام ككل يكون في حالة استقرار غيــر تام imperfectly stable (اذا تحقق شرط في (١٠ــ١٨) لجميع السلع ماعدا وحـــــدة المقايضه) • وانه لمن المشوق ان نلاحظ ان الاستقرار الغير تام لا يتطلب بالضــرورة الاستقرار المعزول لكل سوق •

مثـــال : اعتبر دوال فائض الطلب التاليه للانظمة المكونه من ثلاث سلع :

$$\begin{array}{lll}
(1) & E_2 = -2p_2 + 3p_3 - 5 & E_3 = 4p_2 - 8p_3 + 16 \\
(2) & E_2 = 2p_2 - 3p_3 + 5 & E_3 = -4p_2 + 4p_3 - 4 \\
(3) & E_2 = 2p_2 + 3p_3 - 13 & E_3 = 4p_2 - 8p_3 + 16
\end{array}$$

بحيث ان سعرى التوازن لكل الانظمه الثلاثه هما $p_2 = 2$ $p_3 = 3$ فنظام(١) يحقـــق جميع شروط الاستقرار الكامل :

$$\frac{dE_2}{dp_2}=\frac{\partial E_2}{\partial p_2}=-2<0 \qquad \frac{dE_2}{dp_2}=\frac{\begin{vmatrix}-2 & 3\\ 4 & -8\end{vmatrix}}{-8}=-0.5<0$$

$$\frac{dE_3}{dp_3}=\frac{\partial E_3}{\partial p_3}=-8<0 \qquad \frac{dE_3}{dp_3}=\frac{\begin{vmatrix}-2 & 3\\ 4 & -8\end{vmatrix}}{-2}=-2<0$$

اما نظام(٢) فقد فشل في تحقيق شروط الاستقرار الكامل ، ولكنه يحقق شروط الاستقرار الغير كامل :

$$\frac{dE_2}{dp_2}=\frac{\begin{vmatrix}2 & -3\\ -4 & 4\end{vmatrix}}{4}=-1<0 \qquad \frac{dE_3}{dp_3}=\frac{\begin{vmatrix}2 & -3\\ -4 & 4\end{vmatrix}}{2}=-2<0$$

ويكون سوقي Q_2 و Q_3 غير مستقرين عندما نعتبرهما في حالة انعزال ، ولكن النظام ككل يعتبر مستقرا اذا تعدل كلا السعرين • ونظام(٣) فشل في تحقيق الشروط سواء كان للاستقرار الكامل او الغير كامل •

الاستقرار الحركي Dynamic Stability

ان شروط الاستقرار الحركي لنظام الاسواق المتعددة التي تكون فيها عملية التعديل مستمرة تمثل تعميما لشروط الاستقرار الحركي لسوق فردي بحيث تكون فيه عملية التعديل متواصله كما وضحنا في الفصل(٦ــ٨) فلقد استعرضنا خصوصات قوانين تغير الاسعار بكل وضوح ، ثم قمنا بفحص ممرات (مجاري paths) الزمن للاسعار وذلك بعد حدوث الاضطرابات مباشرة • وقد نقدم هنا انواع مختلفه لعمليات التعديل الحركيه وذلك لوصف سلوك المشاركين في الانظمه تحت الاعتبار وعموما فان توازن الاسواق المتعددة ويكون مستقرا حركيا اذا كان كل سعر يقترب من مستوى توازن عبر الزمن وذلك بعد حدوث اضطرابات بسيطه مباشره ، بمعنى انه اذا كان :

$$\lim_{t\to\infty} p_{jt} = p_{je} \qquad j=2,\ldots,m$$

حيث ان p_{jt} تمثل سعر Q_j عند الزمن t وان p_{je} تمثل السعر التوازني للسلعة Q_j •

لنفترض الان ان السلعه الاولى من الـ m سلعه تكون هي وحده المقايضه فتكون معادلات التعديل الحركي كالتالي :

$$\frac{dp_j}{dt}=k_jE_j(p_2,\ldots,p_m) \qquad j=2,\ldots,m \qquad (١٠ـ١٩)$$

حيث ان $k_j>0$ تمثل سرعة تعديل العوامل لنفترض ان الوحدات قد عرفت بحيث ان جميع k_j تكون مساويه للوحدة •

فبتفاضل التام لدالة فائض الطلب الـ j نحصل على :

$$dE_j = \sum_{k=2}^{m} \frac{\partial E_j}{\partial p_k} dp_k \qquad j = 2, \ldots, m$$

ويمكن الحصول على مايشابه تقريب (٦ــ٢٣) للسوق المفرد بابدال التفاضلين dE_j dp_k بالانحرافات deviations من قيمتي التوازن $E_j - E_{jo}$ و $p_k - p_{ko}$:

$$E_j = \sum_{k=2}^{m} \frac{\partial E_j}{\partial p_k}(p_k - p_{ko}) \qquad j = 2, \ldots, m \qquad (١٠ــ٢٠)$$

لان $E_{jo} = 0$ وبالتعويض من (١٠ــ٢٠) في (١٠ــ١٩) ،

$$\frac{dp_j}{dt} = b_{j2}p_2 + \cdots + b_{jm}p_m + c_j \qquad j = 2, \ldots, m \qquad (١٠ــ٢١)$$

حيث ان c_j تمثل الثوابت التي تعتمد على قيم التوازن للاسعار ولقد تاكدت خواص الاستقرار المحلي للمعادلة (١٠ــ١٩) من اختبار وفحص الحل لهذا النظام المكون المعادلات التفاضليه الخطيه الاتيه ويكون حل (١٠ــ٢١) على النمط التالي (١) (راجع الفصل A-6) .

$$p_j = a_{j2}e^{\lambda_2 t} + \cdots + a_{jm}e^{\lambda_m t} + p_{jo} \qquad j = 2, \ldots, m \qquad (١٠ــ٢٢)$$

حيث ان a_{jk} يمثل العوامل التي تعتمد على الشروط الاوليه ، وان λ_k تمثل الجزور الـ $(m-1)$ لمتعددة الحدود polynomial المعطاه بـ :

$$\begin{vmatrix} b_{22}-\lambda & \cdots & b_{2m} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{m2} & \cdots & b_{mm}-\lambda \end{vmatrix} = \beta_{m-1}\lambda^{m-1} + \cdots + \beta_1\lambda + \beta_0 = 0 \qquad (١٠ــ٢٣)$$

وسوف تقترب ممرات الوقت من قيمهم التوازنيه p_k اذا كان كل واحد من $(m-1)$ جزر roots للمعادلة (١٠ــ٢٣) سالبا او ان له جزئا حقيقيا سالبا . وعلى العموم فان استقرار هيكز ليس بضروريا ولا كافيا للاستقرار الحركي في حالة التعديل المستمر المتواصل ولقد استخدمت رياضيات متقدمه لاثبات النظريات عن الشروط التي يجب ان تتوفر في (١٠ــ١٩) لتكون مستقره وكذلك الشروط التي يكون تحتها استقرار هيكز مطابقا للاستقرار الحركي (١) وتنص احد النظريات الهامة على ان يكون النظام مستقرا محليا ويكون ايضا مستقرا حسب هيكز اذا كانت جميع السلع بدائل اجماليه منضبطه منضبطه strict gross substitutes اي ان $b_{ii} < 0$ لجميع i وان $b_{ij} > 0$ لجميع $j \neq i$.

وسوف نثبت فيما يلي هذه النظريه في حالة وجود ثلاثة سلع ٠ تتطلب استقرار هيكز بان :

$$b_{22} < 0 \qquad b_{33} < 0 \qquad b_{22}b_{33} - b_{23}b_{32} > 0 \qquad (١٠ــ٢٤)$$

---

(١) ان نمط (١٠ــ٢٢) يتطلب تعديلا طفيفا اذا تطابق اثنان او اكثر من الجزور ولكن شرط الاستقرار المحلي يظل بدون تغيير .

وتتبع المتباينتين الاولين من (١٠ــ٢٤) من خاصية بدائل الجطــــة gross substitutability وبتفاضل شرط الميزانيه الاجمالى تفاضلا كاملا

$$dE_1 + p_2\,dE_2 + E_2\,dp_2 + p_3\,dE_3 + E_3\,dp_3 = 0$$

الان ، د ع $dp_3 = 0$ ومن ثم د ع $dp_2 = 0$:

$$b_{12} + p_2 b_{22} + E_2 + p_3 b_{32} = 0$$
$$b_{13} + p_2 b_{23} + p_3 b_{33} + E_3 = 0$$

فعند التوازن تكون $E_2 = E_3 = 0$:

$$p_2 b_{22} + p_3 b_{32} = -b_{12} < 0$$
$$p_2 b_{23} + p_3 b_{33} = -b_{13} < 0$$

وكذلك $-p_2 b_{22} > p_3 b_{32}$ و $-p_3 b_{33} > p_2 b_{23}$

وبما ان طرفى هذه المتباينات الايمن موجبه بالافتراض فان الحدود الاربعة جميعا تكون موجبه وان حاصل ضربهم هو :

$$p_2 p_3 b_{22} b_{33} > p_2 p_3 b_{23} b_{32}$$

وهذا يكون المتباينه الثالثه من(١٠ــ٢٤) ولذا فان خاصية بدائل الجمله تؤول الــى استقرار هيكز .

فى حالة وجود الثلاثه سلع تكون متعددة الحدود للمعادلة(١٠ــ٢٣) كالتالى :

$$\lambda^2 + \beta_1\lambda + \beta_0 = \lambda^2 - (b_{22} + b_{33})\lambda + (b_{22}b_{33} - b_{23}b_{32}) = 0$$

وبما ان β_1 و β_0 موجبتان ، فان الجزرين يكونا سالبين اذا كانا حقيقيين او ان يكون لهما اجزاء حقيقيه سالبه اذا كانت من الاعداد المركبه complex ونعرف النظــام بانه مستقرا استقرارا شاملا *globally stable* اذا استطاع أن يعود لوضع التوازن بعد حدوث اضطراب سواء كان بســيطا ام لا . ومن الممكن توسيع تحليل الاستقرار الشامــل للتوازن الوحيد وذلك باستخدام دالة ليابونوف Liapunov function (راجع الفصل ٦ــ٨) ليشمل انظمه الاسواق المتعدده ونعرف دالة ليابونوف $V(t)$ بانها مربع مسافه الاسعار من قيمهم التوازنيه :

$$V(t) = \sum_{j=1}^{m} [p_j - p_{je}]^2 \qquad (١٠ــ٢٥)$$

وهذه الدالة تمتلك الخواص التاليه لصفر اذا كانت جميع الاسعار عند قيمهم التوازنيــــه وتكون موجبه اذا كانت احد الاسعار او اكثر غير موجبا فيكون النظام فى استقرار شامــــل اذا كان : $dV(t)/dt < 0$ وذلك عندما تكون $p_j \neq p_{je}$ لبعض j .

ونوضح التحاليل باثبات النظريه التاليه : اى انظام يمتلك توازن وحيد ويحقق بديهيــة التفضيل الموضح *revealed preference* فى الاجمالى فانه يكون مستقرا استقرارا شامــلا

وبتفاضل (١٠ــ٢٥) وبتعويض $dp_j/dt = E_j$ من (١٠ــ١٩) ثم تطبيق قانون فالراس

$$\frac{dV(t)}{dt} = 2\sum_{j=1}^{m}(p_j - p_{j^*})\frac{dp_j}{dt} = 2\sum_{j=1}^{m}(p_j - p_{j^*})E_j = -2\sum_{j=1}^{m}p_{j^*}E_j \qquad (١٠\text{ــ}٢٦)$$

وباستخدام فائض الطلبات نجد ان البديهيه الضعيفه Weak axiom تنص على:

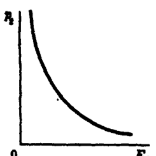
$$\sum_{j=1}^{m}p_{j^*}E_{j^*} < \sum_{j=1}^{m}p_{j^*}E_j$$
$$\sum_{j=1}^{m}p_jE_{j^*} \leq \sum_{j=1}^{m}p_jE_j \qquad (١٠\text{ــ}٢٧)$$

حيث ان p_j تمثل الاسعار بشرط ان $p_j \neq p_{j^*}$ لواحد او اكثر من j وان E_j تمثل فائض الطلبات المطابقة لهذه الاسعار • فاذا نظرنا الى الطرف الايسر من التعبير الاول فى (١٠ــ٢٧) نجد انه يساوى صفر الان $E_{j^*} = 0$ لجميع j وان الطرف الايمن يساوى صفرا بتطبيق فالراس ولهذا فان المساواة تتحقق للتعبير الاول ، ويكون التعبير الثانى محققا فالجانب الايسر من التعبير الثانى فى (١٠ــ٢٧) ايضا يساوى صفر وعلى هذا فان $\Sigma_{j=1}^{m} p_{j^*}E_j > 0$ وان مشتقه derivative (١٠ــ٢٦) تكون سالبه لذا فان النظام سوف يكون فى استقرار شامل •

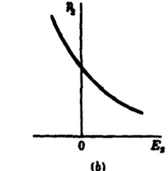
١٠ – ٣ وحدانية التوازن : UNIQUENESS OF EQUILIBRIUM

ان معظم اثباتات الوجود تنص على ان لانظمة الاسواق المتعددة نقطة واحدة او اكثر من نقط التوازن بينما تنص اثباتات الوحدانيه على المجموعات الجزئيه للانظمة التى تحقق اثباتات الوجود يكون لها نقاط توازن وحيدة • ومن الممكن توسيع اغلبية الملاحظات عن وحدانية السوق المفرده فى الفصل (٦ــ٧) لتشمل انظمة الاسواق المتعددة • وعموما اذا كانت المشتقه الكامله dE_j/dp_j $(j = 2, \ldots, m)$ لاتغير اشارتها ولا تساوى صفرا لاى قيمة من قيم p_j فانه لايمكن وجود اكثر من نقطه توازن واحدة فقط • وهذا شرط كفايه وليس شرط يوضح الشكل (١٠ــ٣) حالات مختلفه ومنوعه للانظمه ذات السلعتين •

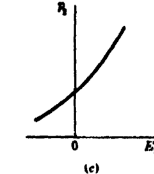
ففى الشكل (١٠ــ٣ ا) تكون $dE_2/dp_2 < 0$ فى كل مكان ولكن لايوجد نقطه توازن واعتبار الوحدانيه هنا ليس له اى معنى • وهذه الحاله تركز الاهتمام على انه يجب ان يكون هناك اثبات وجود قبل اثبات وحدانية اما فى الشكل (١٠ــ٣ب) فان $dE_2/dp_2 < 0$ فى كل مكان ، وتوجد نقطة توازن وحيدة وتكون مستقرة استقرارا شاملا وفى الشكل (١٠ــ٣جـ) نجد ان $dE_2/dp_2 > 0$ فى كل مكان وتوجد نقطه توازن وحيدة ولكنها غير مستقرة وحالات مثل هذا تكون محدودة البحث فيها لانها غير مستقرة اما



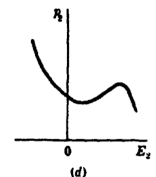
(a)



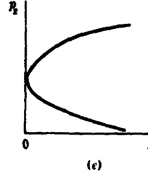
(b)



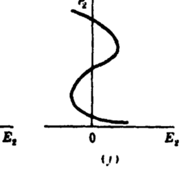
(c)



(d)



(e)



(f)

شكل (١٠ ـ ٣)

الحالتان الموضحان فى الشكلين (د) و(هـ) فان لهما نقطتى توازن وحيده ، ولكنهما لايحققا الشرط dE_2/dp_2 اما فى الشكل (١٠ ـ ٣ و) فان الشرط لاينطبق وتوجد نقاط متعددة للتوازن .

ويتطلب استقرار هيكز (راجع المعادلات من (١٠ ـ ١٥) الى (١٠ ـ ١٨) بان يكون $dE_j/dp_j < 0$ لجميع j فى جوار نقطه التوازن فالنظام الذى يحقق شروط هيكز للاستقرار فى كل مكان يكون له توازن وحيد . ونهائيا وحيدا ولهذا فان اثبات الوحدانيه يجب ان يسبق اثبات استقرار هيكز فى كل مكان ولقد اثبتنا فى جزء من الفصل السابق ان خاصة البدائل الاجماليه لنظام ذو ثلاثة سلع يتطلب استقرار هيكز فى كل مكان، وعليه فان خاصيه البدائل الاجماليه لنظام الثلاثة سلع يتطلب وجود نقطة توازن وحيده وهذه النظريه يمكن تعميمها لتشمل m من السلع .

فلو ان البديهية الخفيفة (١٠ ـ ٢٧) تحققت لفائض الطلبات الاجمالى فان الوحدانيه سوف تتبع بديهيا ويكون الاثبات بطريقة المناقضة contradiction افترض انه توجد نقطتى

توازن ثم قيم (١٠ــ٢٧) لهذه النقطتين فالعلاقة الاولى من (١٠ــ٢٧) تتحقق لان $E_k = E_j = 0$ ولنفس السبب فان كلا الحدين في العلاقه الثانيه من (١٠ــ٢٧) يكونا مساويين لصفر ثم تصبح $0 < 0$ وهذه هي المناقضه ٠

١٠ - ٤ نموذج المدخلات والمخرجات THE INPUT-OUTPUT MODEL

ان نموذج المدخلات والمخرجات ، ويسمى بعض الاحيان بنموذج ليونتوف نسبـــه لمبتدعه W. W. Leontief يمدنا بتحليل للاسواق المتعدده بتركيز على الناحيـــــه التجريبيه الاختباريه ٠ وتختـــلف افتراضات الاساسـية عن الافتراضات حتى الان ٠فلقد حذفت دوال المنفعة وعوضت طلبات المستهلك كحاجة من الخارج بدون اعتبارا واضحـا لتوازن المستهلكين على انفراد [1] وتكون هنا الصناعه بدلا من الوحدة الانتاجية هـي وحدة الانتاج فكل صناعه تستعمل نشاطا انتاجيا خطيا مفرد لانتاج مخرج output واحد منفرد ٠ فكلا المخرجات المنتجه والعوامل الغير منتجه تخدم كدواخل inputs وهذه الافتراضات تسمح بتحديد نقاط التوازن من حلول المعادلات الخطيه الاتيـه ٠ وتتحدد المؤشرات لهذه المعادلات بالطريقة التجريبيه والاختباريه ٠

تحديد المخرجات :- Output Determination

افترض قيام اقتصاد له عدد m من السلع المنتجه وعدد n من العوامل الغير منتجه ويعطى نشاط الانتاج الخطى (راجع الفصل ٥ــ٦) للصناعة j $(j = 1, \ldots, m)$ كميات ادنى لنوعي الداخلين الضروري لضمان وحدة واحدة من السلعة j: $a_{ij} \geqq 0$ $(i = 1, \ldots, m)$ وذلك للــــدواخل المنتجه و $b_{ij} \geqq 0$ $(i = 1, \ldots, n)$ للعوامل فيكون المخـــرج للصناعه i ، q_i قد امتص بالاستخدامات الصناعات المتداخله وباستخدامـــــات الاستهلاكيه النهائيه y_i :

$$q_i = a_{i1}q_1 + a_{i2}q_2 + \cdots + a_{im}q_m + y_i \qquad i = 1, \ldots, m$$

وبتحريك متغيرات الخوارج الى الجانب الايسر ، فان معادلات تناسب الدواخــــــل والخوارج قد تكتب كالتالي :

---

(١) ان نظام الدواخل والخوارج المفتوح يحتوى على قطاع خارجي واحد او اكثر وهـذه القطاعات تكون داخليه في النظام المغلق فمعظم التحـاليل مركزة على الانظمـــة المفتوحة ، والوصف في هذا الكتاب يكون مركز عليهـا ايضا فالقارئ المهتم بخـــواص النظام المغلق عليه ان يراجع :

Wassily W. Leontief, *The Structure of American Economy, 1919–1939* (2d ed., New York: Oxford, 1951).

$$\begin{aligned} (1-a_{11})q_1 - a_{12}q_2 - \cdots - a_{1m}q_m &= y_1 \\ -a_{21}q_1 + (1-a_{22})q_2 - \cdots - a_{2m}q_m &= y_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ -a_{m1}q_1 - a_{m2}q_2 - \cdots + (1-a_{mm})q_m &= y_m \end{aligned} \qquad (١٠\text{—}٢٨)$$

وتكون كمية كل سلعه متوفرة للاستهلاك النهائى مساويه لاجمالى الخوارج ناقصا متطلبات الدواخل للاستخدام بين الصناعات •

ويمكن استخدام قاعدة كريمر لوضع مستويات الخارج بدلالة مستويات الاستهلاك النهائيه هذا اذا كانت محددة العوامل (١٠ـ٢٨) $\mathscr{A}$ غير مساويه لصفر :

$$\begin{aligned} q_1 &= \beta_{11}y_1 + \beta_{12}y_2 + \cdots + \beta_{1m}y_m \\ q_2 &= \beta_{21}y_1 + \beta_{22}y_2 + \cdots + \beta_{2m}y_m \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ q_m &= \beta_{m1}y_1 + \beta_{m2}y_2 + \cdots + \beta_{mm}y_m \end{aligned} \qquad (١٠\text{—}٢٩)$$

حيث ان $\beta_{ij} = \mathscr{A}_{ji}/\mathscr{A}$ تمثل المفاعل cofactor للعنصر فى الصف j والعمود i للمحددة (١٠ـ٢٨) وان $\mathscr{A}_{ij}$ مقسومة بالمحدودة A وتوفر (١٠ـ٢٩) حلا عاما لنظام الدواخل والخوارج (١٠ـ٢٨) هذا اذا $q_i \geqq 0$ $(i=1,\ldots,m)$ واذا كان $y_i \geqq 0$ $(i=1,\ldots,m)$ فشرط الكفايه والضرورة للمعادلة(١٠ـ٢٩) لكى يكون حلا عاما هو ان تكون $(i,j=1,\ldots,m)$ ونعتبر فيما يلى شروط الوجـــود بالنسبه لـ a_{ij} ولكن فى الوقت الراهن سوف نركز على الانظمة التى تكون (١٠ـ٢٩) حلا عاما لها •

يعطى العامل β_{ij} ، $i \neq j$ المتطلبات المباشرة والغير مباشرة للدواخل للسلعة i والضروريه لامداد وحدة واحده من الاستهلاك النهائيه للسلعه j فالمتطلـــــب المباشر هو a_{ij} • اما المتطلبات الغير مباشرة فتكون دواخل لـ i والضروريه لانتـاج الدواخل الضروريه للسلع m من اجل j وكذلك الدواخل الضرورية لانتاج هـــذه الدواخل ، وهكذا • وينبع من هذا ان $\beta_{ij} \geqq a_{ij}$ ويعطى العامل β_{jj} المتطلبات المباشرة والغير مباشرة للداخل من اجل j لتغطى وحدة الاستهـــلاك النهائى وينبع من هذا ان $\beta_{jj} \geqq 1 + a_{jj}$ ويمكن تحديد متطلبات العوامل بسهوله من متطلبات الخوارج :

$$x_i = b_{i1}q_1 + b_{i2}q_2 + \cdots + b_{im}q_m \qquad i = 1,\ldots,n$$

حيث ان x_i هى كمية العامل الغير منتج i والمستخدم كداخل وبالتعويض من أجل q_j من (١٠ـ٢٩) •

$$x_i = \gamma_{i1}y_1 + \gamma_{i2}y_2 + \cdots + \gamma_{im}y_m \qquad i \quad 1,\ldots,n \qquad (١٠\text{—}٣٠)$$

حيث ان :
$$\gamma_{ij} = \sum_{h=1}^{m} b_{ih}\beta_{hj} = 0 \qquad \begin{matrix} i = 1, \dots, n \\ j = 1, \dots, m \end{matrix} \qquad (١٠_٣١)$$

وتتبع عدم سلبية γ_{ij} من عدم سلبية b_{ih} و β_{hj} ويعطى العامل γ_{ij} كمية العامل i والضرورية لانتاج الكميات من السلع m التى تعد الوحدة النهائية للاستهلاك من السلعة j بطريقة مباشرة وغير مباشرة ٠

قابلية التحلل أو التقسيم : Decomposability

يكون نظام الدواخل والخوارج قابلا للتقسيم أذا احتوى على واحد او أكثر من المجموعات الذاتيه self- sufficient المكونه من اقل من m من الصناعات لكل واحد من هذه المجموعات الذاتيه فالصناعات الموجودة ضمن اى مجموعة ذاتية لاتتطلب دواخل من الصناعات خارج مجموعتها فمستويات الخوارج للصناعات خارج المجموعة الذاتيه تكون مستقله عن مستويات الخوارج والاستهلاك النهائى للصناعات ضمن المجموعة ٠ ويحتوى نظام الخمس صناعات التالى مجموعتان ذاتيتان :

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ 0 & 0 & a_{43} & a_{44} & a_{45} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_{55} \end{bmatrix} \qquad (١٠_٣٢)$$

حيث ان المعاملات المذكورة تكون موجبه فالصناعتين 1 و 2 تكونا مجموعتين ذاتيتين ويتحصلا على الدواخل فيما بينهما ، وليس من الثلاثة الصناعات الاخرى وسوف لاتتأثر مستويات الخوارج للصناعات 3 ,4 ,5 بمستويات الاستهلاك النهائى وخوارج الصناعتين 1 و 2 وتكون الصناعات 1 ,2 ,3 ,4 مجموعة ذاتيه اخرى لاتتطلب دواخل من الصناعة 5 فيكون مستوى خارج 5 مستقلا عن مستويات الخوارج والاستهلاك النهائى للصناعات 3 ، 4 وكذلك الصناعتين 1 ، 2 ٠

يمكن لاى نظام دواخل وخوارج حله بطريقة التجزئه solved by parts فلو ان معاملات (١٠_٣٢) ادخلت ضمن معادلات (١٠_٢٨) فانه يمكن حل المعادلة الخامسة لقيم q_5 فقد يمكن حل المعادلتين الثالثة والرابعة لقيمتى q_3 q_4 وبالمثل اذا اعطينا q_3 ، q_4 ، q_5 فاننا قد نحل المعادلتين الاوليتين لقيمتى q_1 و q_2 ٠

وعموما فان المعامل β_{ij} فى (١٠_٢٩) سوف يكون مساويا لصفر اذا كان وفقط اذا

كانت if and only if الصناعة i خارج نطاق المجموعة الذاتية التى تحتوى على الصناعة j وتكون مصفوفة المتطلبات المباشرة والغير مباشرة والمطابقة لـ (١٠ـ٣٢) كالتالى :

$$\begin{bmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} & \beta_{13} & \beta_{14} & \beta_{15} \\ \beta_{21} & \beta_{22} & \beta_{23} & \beta_{24} & \beta_{25} \\ 0 & 0 & \beta_{33} & \beta_{34} & \beta_{35} \\ 0 & 0 & \beta_{43} & \beta_{44} & \beta_{45} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \beta_{55} \end{bmatrix}$$

حيث ان المعاملات المذكورة تكون موجبه فالنظام الغير قابل للتقسيم *indecomposable* لايحتوى على مجموعات ذاتيه ولذا فأن جميع β_{ij} تكون موجبه •

نعرف نظام الداخل والخوارج بأنه نظام قابل للتقسيم التام *completely decomposable* أذا دخلت كل صناعة ضمن مجموعة ذاتيه أقل من الصناعات m فعلى سبيل المثال :

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{34} \\ 0 & 0 & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}$$

فالصناعتين 1 ، 2 تؤمن فقط داخلهما فيما بينهما وكذلك 3 ، 4 تؤمنان داخلهما فيما بينهما ويمكن تحديد مستويات الخوارج لكل مجموعة بغض النظر عن مستويات الاستهلاك النهائية والخوارج للاخرين • فاذا كان النظام قابل للتقسيم التام ، فان $\beta_{ij} > 0$ و i ، j فى نفس المجموعة الذاتيه وأن $\beta_{ij} = 0$ و i ، j فى مجموعات مختلفة •

الوجـوه : Existence

ان مجرد تكوين نظام الداخل والخوارج لايضمن ان يكون له حلا عاما بحيـــث أن $q_i \geqq 0$ $(i = 1, \ldots, m)$ لجميع $y_i \geqq 0$ $(i = 1, \ldots, m)$ ونقدم هنا مجموعتان متكافئتان ولكنهما مختلفتان ، ومن شروط الكفاية والضرورة لوجود حل عام • فشروط هوكنز ـ سايمن[١] Hawkins-Simon تتطـلب أن جميع الحدود الصغرى للمعامل للمعادلـــة (١٠ـ٢٨) بأن :

---

(١) راجع :

David Hawkins and Herbert A. Simon, "Note: Some Conditions of Macroeconomic Stability," *Econometrica*, vol. 17 (July–October, 1949), pp. 245–248.

$$1-a_{11}>0, \begin{vmatrix} 1-a_{11} & -a_{12} \\ -a_{21} & 1-a_{22} \end{vmatrix} >0, \ldots, \begin{vmatrix} 1-a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ -a_{m1} & \cdots & 1-a_{mm} \end{vmatrix} >0 \qquad (١٠\text{ـ}٣٣)$$

وتتطلب المتباينات الاولى والتاليه لها للمعادلة (١٠ـ٣٣) أن : $a_{ii}<1$ $(i=1,\ldots,m)$ فلو ان $a_{ii}\geq 1$ لبعض i فان واحد أو أكثر من وحدات i سوف يطلب منه أنتاج وحدة واحدة من i فلايمكن ضمان خوارج صافيه تحت هذه الظروف • ويتطلب الشرط الاخير من (١٠ـ٣٣) بان تكون المحددة (١٠ـ٢٨) موجبه •

هناك مجموعة مكافئة لشروط الكفايه والضرورة لوجود حل عام والتي تركز على مجموعات الاعمدة لمعاملات الداخل وهذه الشروط تتطلب وجود مجموعة من الاعداد $d_j>0$ $(j=1,\ldots,m)$ بحيث ان :

$$\sum_{i=1}^{m} d_i a_{ij} \leq d_j \qquad j=1,\ldots,m \qquad (١٠\text{ـ}٣٤)$$

ويجب ان تتحقق المتباينه البحته (بدون المساواة) لمجموعة واحده او اكثر من المجموعات الذاتيه للصناعات•[1] واما اذا كان النظام غير قابل للتقسيم ، فانه يجب ان تتحقق المتباينه البحته لصناعة واحدة فقط •

تحديد الدخل والسعر : Price and Income Determination

وبتطبيق شرط التنافس والذى يساوى بين السعر ووحدة التكلفه لكل صناعة :

$$p_j = a_{1j}p_1+\cdots+a_{mj}p_m+b_{1j}r_1+\cdots+b_{nj}r_n \qquad j=1,\ldots,m$$

حيث ان : p_i $(i=1,\ldots,m)$ وان : r_i $(i=1,\ldots,n)$ هما أسعار السلع والعوامل على التوالى • وباعادة تنظيم الحدود :

$$\begin{aligned} (1-a_{11})p_1 - \quad a_{21}p_2 - \cdots - \quad a_{m1}p_m &= v_1 \\ -a_{12}p_1 + (1-a_{22})p_2 - \cdots - \quad a_{m2}p_m &= v_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \\ -a_{1m}p_1 - \quad a_{2m}p_2 - \cdots + (1-a_{mm})p_m &= v_m \end{aligned} \qquad (١٠\text{ـ}٣٥)$$

حيث أن :

$$v_j = b_{1j}r_1 + b_{2j}r_2 + \cdots + b_{nj}r_n \qquad j=1,\ldots,m \qquad (١٠\text{ـ}٣٦)$$

---

(١) راجع الاثبات الذى اعطاه :

Lionel McKenzie, "Matrices with Dominant Diagonals and Economic Theory," in K. J. Arrow, S. Karlin, and P. Suppes (eds.), *Mathematical Methods in the Social Sciences, 1959* (Stanford, Calif.: Stanford University Press, 1960), p. 50.

تمثل القيمة المضافه *value added* لكل وحدة من وحدات الخارج j ان شعاع **array** المعاملات على يسار (١٠ـ٣٥) هو نفسه الشعاع على يسار (١٠ـ٢٨) ما عدا ان الصفوف والاعمدة قد تبودلت فالقيم المحددة للشعاعين تكون متساوية ويكون الفاعل للعنصر فى الصف i والعمود j (من احد الشعاعين مساويا لفاعل العنصر فى الصف j والعمود i) للشعاع الاخر ويكون حل (١٠ـ٣٥) لجميع p_j هو :

$$
\begin{aligned}
p_1 &= \beta_{11}v_1 + \beta_{21}v_2 + \cdots + \beta_{m1}v_m \\
p_2 &= \beta_{12}v_1 + \beta_{22}v_2 + \cdots + \beta_{m2}v_m \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
p_m &= \beta_{1m}v_1 + \beta_{2m}v_2 + \cdots + \beta_{mm}v_m
\end{aligned}
\qquad (١٠ـ٣٧)
$$

حيث أن β_{ij} تكون مثل المعاملات فى (١٠ـ٢٩) مع تبادل الصفوف والأعمدة فلو كانت (١٠ـ٢٩) حلا عاما لـ (١٠ـ٢٨) مع $\beta_{ij} \geqq 0$ $(i, j = 1, \ldots, m)$. فأنه يتبع من ذلك أن (١٠ـ٣٧) تكون حلا عاما لـ (١٠ـ٣٥) أى أن $p_j \geqq 0$ $(j = 1, \ldots, m)$ لجميع $r_i \geqq 0$ $(i = 1, \ldots, n)$

وبالتعويض من (١٠ـ٣٦) و (١٠ـ٣١) فانه يمكن كتابه (١٠ـ٣٧) كالتالى :

$$p_j = \gamma_{1j}r_1 + \gamma_{2j}r_2 + \cdots + \gamma_{nj}r_n \qquad j = 1, \ldots, m \qquad (١٠ـ٣٨)$$

أن سعر كل سلعة يساوى قيمة العوامل التى دخلت فى أنتاجه سواء بطريقة مباشرة أم غير مباشرة فلو كانت (١٠ـ٣٧) حلا عاما ، فأن الشرط الكافى والضرورى بأن تكون جميع أسعار السلع موجبه هو أن يكون واحدا على الاقل من العوامل بسعر موجبا متطلبا لأنتاج واحدا أو أكثر من السلع فى كل مجموعة ذاتية . فالنظام الغير قابل للتقسيم يحتوى على المتطلبات الاقل بأن واحدا من العوامل على الاقل يكون بسعر موجب ذلك لأنتاج أحد السلع على الاقل .

فلو أن لنظاما للدواخل والخوارج عاملا واحدا غير منتج فأن سعره قد يوضع مساويا للوحدة وأن (١٠ـ٣٨) قد تحل لأسعار السلع المنتجه بوحدات العوامل فلو أن نظاما ماكان له عاملا واحدا أو أكثر ، فأننا نتطلب معلومات أضافيه لتحديد r_h ومن ثم p_j .

أن الدخل أذا وزن بسعر السوق فأنه سيساوى قيمة مستويات الاستهلاك النهائيـة وبالتعويض أولا من (١٠ـ٣٨) ثم من (١٠ـ٣٠) .

$$\sum_{j=1}^{m} p_j y_j = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} r_i \gamma_{ij} y_j = \sum_{i=1}^{n} r_i x_i$$

فالدخل بوزن سعر السوق يساوى الدخل بوزن تكلفة العامل أو نضعها بصيغة أخرى أن مدفوعات العامل **factor** سوف تستنفذ قيمة صافى الخارج .

نظرية التعويض The Substitution Theorem

اذا كان لنظام الداخل والخوارج حلا عاما ، فأن مستويات الداخل المنتجة والعوامل سوف تتقرر بطريقة وحيدة لاى مجموعة معينة لمتطلبات الاستهلاك النهائى فلا توجد اى فرصة للتعويض بين الداخل • ولقد اثبتنا فى الفصل (٥ـ٦) ان نوعا ما من تعويض الداخل يكون ممكنا فى حالة أنتاج سلعة ما وذلك اذا كان هناك متوفرا اكثرمن نشاط خطى • ويمكن توسيع نموذج الداخل والخوارج ليشمل نشاطات الانتاج المتعددة لكل سلعة • ولا نفقد اى شئ مهم ، اذا أفترضنا ان لكل صناعة نفس الرقم، للنشاطات الانتاجيه الخطيه • فنضع a_{ij}^{k} لتمثل كمية السلعة i المطلوبه لانتاج وحدة واحده من السلعه j باستخدام النشاط k وتضع كذلك q_{j}^{k} لتمثل مستوى الناتج للنشاط k للسلعة j ، ويقترح وجود نشاطات متعدده بان مجموعة معينه للطلبات النهائية قد تنفذ بمجموعات بديلة من مستويات الداخل المنتجه والعوامل •

فاذا كان الاقتصاد ما عاملا نادرا واحدا فقط ، فانه يرغب فى الحصول على الحد الادنى من كمية ذلك العامل x والضرورى لمواجهة متطلبات استهلاكه النهائيه، وهذه المسالة فى عملية الحصول على الحد الاعلى قد توضع ضمن اطار البرمجه الخطيه (راجع الفصل ٥ـ٧) على النحو التالى :

نختار مستويات خوارج غير سالبه $q_{j}^{k} \geqq 0$ $(k = 1, \ldots, u;)$ $(j = 1, \ldots, m)$

بحيث انها تعطى الحد الادنى لـ

$$x = \sum_{k=1}^{u} \sum_{j=1}^{m} b_{j}^{k} q_{j}^{k} \qquad (١٠ـ٣٩)$$

حيث ان b_{j}^{k} هى متطلب وحدة العامل للنشاط k للسلعه j تحت الشروط التى تنص على ان صافى خارج كل سلعة يكون كافيا لمواجهة متطلبات استهلاكها النهائى :

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^{u} [(1 - a_{11}^{k})q_{1}^{k} - a_{12}^{k}q_{2}^{k} - \cdots - a_{1m}^{k}q_{m}^{k}] \geqq y_1 \\
&\sum_{k=1}^{u} [-a_{21}^{k}q_{1}^{k} + (1 - a_{22}^{k})q_{2}^{k} - \cdots - a_{2m}^{k}q_{m}^{k}] \geqq y_2 \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
&\sum_{k=1}^{u} [-a_{m1}^{k}q_{1}^{k} - a_{m2}^{k}q_{2}^{k} - \cdots + (1 - a_{mm}^{k})q_{m}^{k}] \geqq y_m
\end{aligned} \qquad (١٠ـ٤٠)$$

ولنفترض ان $y_i > 0$ $(i = 1, \ldots, m)$.

ان كل مجموعة من النشاطات m واحده لكل سلعة ، والمسحوبه من الانشطه um المتوفرة تكون نظام داخل وخوارج حيث انه يوجد u^m من هذه الانظمه • فكل نظام يحتوى على حل عام (افترض وجود واحد على الاقل) يعطى حلا مرئيا للمعادلة(١٠ـ٤٠) فكل

حل لهذه المعادلة يجب ان يكون له نشاطا واحدا على الاقل لكل سلعة لانه قد حدد خارجا صافيا موجبا لكل واحدة منها وتنص احدى نظريات البرمجه الخطيه الهامه (راجع الفصل ٥ــ٧) على ان الحد الاقصى للنظام المحتوى على m من الضوابط لايحتاج أن يحتوى على اكثر من m من النشاطات عند المستويات الموجبه • فمن الممكن الاستنتاج بان هناك اكثر من واحد من انظمة الدواخل والخوارج القصوى •

أن نظام البرمجه الثنائى (المزدوج dual [1]) للمعادلتين (١٠ــ٣٩)و(١٠ــ٤٠) يتكون من ايجاد قيم لـ $p_i \geqq 0 \quad (i = 1, \ldots, m)$ تمكن النظام من الحصول على الحد الاعلى من :

$$I = \sum_{i=1}^{m} p_i y_i \qquad (١٠ــ٤١)$$

وذلك تحت الشروط التاليه :

$$\begin{array}{l} (1 - a^1_{11})p_1 - a^1_{21}p_2 - \cdots - a^1_{m1}p_m \leqq b^1_1 \\ -a^1_{21}p_1 + (1 - a^1_{22})p_2 - \cdots - a^1_{m2}p_m \leqq b^1_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ -a^1_{1m}p_1 - a^1_{2m}p_2 - \cdots + (1 - a^1_{mm})p_m \leqq b^1_m \\ (1 - a^2_{11})p_1 - a^2_{21}p_2 - \cdots - a^2_{m1}p_m \leqq b^2_1 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ -a^u_{1m}p_1 - a^u_{2m}p_2 - \cdots + (1 - a^u_{mm})p_m \leqq b^u_m \end{array} \qquad (١٠ــ٤٢)$$

فالمتغيرات الازدواجيه هى اسعار الـ m سلعة مقاسة بوحدات العوامل فباعادة تنظيم الحدود يمكن لنا اعادة كتابة الشروط فى (١٠ــ٤٢) على النمط التالى :

$$p_j \leqq \sum_{i=1}^{m} a^k_{ij} p_i + b^k_j \qquad k = 1, \ldots, u \qquad j = 1, \ldots, m$$

وهذا هو الشرط المألوف والذى ينص على ان وحدة الايراد (بوحدات العوامل) تكون اقل من او مساوية لتكلفة الوحدة (بوحدات العوامل) لكل واحدة من نشاطات الانتاج الخطيه • وتضمن لنا نظرية الازدواجيه فى (١٠ــ٤٢) بان شرط التنافس الذى يساوى لين السعر والتكلفه لكل نشاط معمول به عند المستوى الموجب فى نظام الدواخل والخوارج الاقصى ، وان (٥ــ٤٦) يضمن المساواة بين القيم العظمى للدخل بتكلفة العامل (١٠ــ٣٩) والدخل بقيمة السوق (١٠ــ٤١) •

---

(١) ان النظام البدائى (١٠ــ٣٩) و (١٠ــ٤٠) يكون على نفس نمط النظام الثنائى العام المعطى بالمعادلتين (٥ــ٣٧) و(٥ــ٣٨) وأن النظام الثنائى(١٠ــ٤٠) و (١٠ــ٤٢) يكونا على نفس نمط النظام المبدئى العام والمعطى بـ (٥ــ٣١) و (٥ــ٣٢) ان نظريات الازدواجيه للبرمجه الخطيه تكون متماثلة symmetric وتتحقق بغض النظر عن تصنيف النظامين كبدائى وثنائى •

فتقديم احتمال التعويض يقود الى اسئلة حول ثبات معاملات الداخل والخوارج التجريبية فهل سوف تظل المعاملات عند القيم الملاحظة سنويا بينما تتغير متطلبات الاستهلاك النهائية من قيمهم السنويه ؟ •• وتجيب نظرية التعويض لنماذج الداخل والخوارج بالايجاب وعلى وجه التحديد فانها تنص على أن نظام الداخل والخوارج هو النظام الامثل لجميع $y_i \geqq 0$ $(i = 1, \ldots, m)$ اذا كان هو النظام الامثل لأى مجموعة محددة من مجموعات قيم y_i وتتبع هذه النظرية وبسهولة من خاصية المؤشرات لانظمة البرمجه الخطيه : ان أى تغيير فى متطلبات اى نظام سوف يترك مجموعة النشاطات الموجوده ضمن حله الامثل بدون تغيير اذا ظلت مرئيه • وبما أن النظام الداخل والخوارج الامثل حلا عاما ، فان مستويات خوارجه سوف تكون غير سالبه لجميع متطلبات الاستهلاك النهائى الغير سالبه ، بهذا نكون قد اثبتنا نظرية التعويض وسوف تتغير مستويات الخارج بتغيرات متطلبات الاستهلاك النهائى ، ولكن أسعار السلع لا تتأثر ويمكن تسمية نظرية التعويض بنظرية عدم التعويض فالتعويض يكون محتملا ولكنه لم يلاحظ أبدا فى اقتصاد العامل الواحد فقط فنظرية التعويض لا تتحقق للاقتصاد المحتوى على اكثر من عامل واحد •

١٠ – ٥ ملخص ما سبق SUMMARY

لا يمكن على حد تشكيل نظام متعدد الاسواق ضمانا بوجود حل اتزان • ويمكن اختبار نظام عدديه محددة بصورة منفصله لتحديد وجود الاتزان • وينص وجوب الاتزان على ان النظام التى تحقق عددا من القيود العامه تمتلك حلول اتزان • ثبت وجود دوال طلب زائد لنظام تصورى ثم استخدمت نظرية النقطة الثابتة لبروير لاثبات وجود مجموعه او اكثر من اسعار الاتزان للنظام • وتعرضنا لاثبات الوجود الخاص بدبرو ، والذى يرتكز على افتراضات اضعف •

تمثل الشروط الاستاتيكة والديناميكه لاستقرار السوق تعميما لشرط والراس للسوق المنفرد • يتطلب لاستقرار الاستاتيكى التام طبقا للمفهوم الهيكسى ان تكون المشتقات الكليه dE_j/dp_j $(j = 2, \ldots, m)$ سالبه لكل التوافيق الممكنه للاسعار الجامدة والمرنه بينما يتطلب الاستقرار الغير تام والناقص ان تكون المشتقات الكليه سالبه ، بفرض ان تكون الاسعار مرنه • يتطلب التحليل الديناميكى للاستقرار منطوقا غصيليا لقوانين ضبط لاسعار مع الزمن • ويكون النظام متعدد الاسواق مستقرا ديناميكيا اذا اقتربت الاسعار من قيم اتزانها مع تغيير الزمن • ويكون النظام ذو وحدانية التوازن مستقرا اذا حققت دوال الطلب الزائد لـه بديهيه وياك للافضليه المباحة • ويكون الحل لنظام ما اوجد اذا ما وجد هذا الحل للنظام الذى يحقق الشروط الهيكسيه للاستقرار التام بإستمرار •

وتستوجب بديهية ويلد ايضا الوحدانيه ٠

وتستخدم في نموذج الدواخل والخوارج لكل m من السلع نشاط انتاجي احادي خطي ٠ تعمل الخوارج المنتجه والعوامل الغير منتجه كدخول ٠ يعطي الحل العام لنظام الدواخل والخوارج ٠ خوارجه على صورة دوال لمستويات الاستهلاك٠ ويكون النظام قابلا للتفكك اذا ما احتوى على واحدة او اكثر من مجموعات الاكتفاء الذاتي ذات عدد من الصناعات اقل من m ٠ يمكن اشتقاق الاسعار التنافسيه للسلع المنتجه من اسعار العوامل ٠ ويمكن تعميم نموذج الدواخل والخوارج ليسمح لاكثر من نشاط واحد للسلعه ٠ وتنص نظرية الاحلال على انه من يحدث احلال للدخل في اقتصاد ذو انتاج متعدد النشاط اذا كان هناك عاملا فقط غير منتج ٠

EXERCISES

10-1 Use a Jacobian test to determine whether solutions exist for the following three-commodity systems:

(*a*) $E_2 = -8p_2 + 24p_3 + 6 = 0$; $E_3 = 10p_2 - 30p_3 + 8 = 0$
(*b*) $E_2 = -3p_2 - p_2p_3 + p_3 = 0$; $E_3 = p_2 - p_2p_3 - 3p_3 = 0$
(*c*) $E_2 = -4p_2 + 8p_3 + 4 = 0$; $E_3 = p_2^2 - 2p_2 - 4p_2p_3 + 4p_3 + 4p_3^2 + 1 = 0$

10-2 Find equilibrium prices for the three-commodity system given by

$$E_2 = 2p_2^2 + 22p_2 - 13p_2p_3 - 64p_3 + 20p_3^2 + 48 = 0$$
$$E_3 = p_2 - 2p_3 + 2 = 0$$

10-3 Consider the system (10-14) with $b_{ii} < 0$ $(i = 2, \ldots, m)$ and $b_{ij} = 0$ for $i > j$. Show that the system possesses perfect Hicksian stability in this case.

10-4 Assuming continuous adjustment, do the solutions for Exercise 10-2 satisfy the conditions for dynamic local stability?

10-5 Consider a system with one primary good, Q_1, and one produced good, Q_2. Assume that each consumer has a positive initial endowment of the primary good, and a positive share of the profits of at least one firm. Assume that all individual utility functions are of the form $U_i = q_{i1}q_{i2}$ $(i = 1, \ldots, n)$, and that the production function for a representative firm is of the form $\bar{q}_{h2} = (q^*_{h21})^\alpha(q^*_{h22})^\beta$ with $\alpha, \beta > 0$ and $\alpha + \beta < 1$. Show that this system meets the assumptions underlying the existence proof of Sec. 10-1.

10-6 Consider pseudo excess demand functions for a consumer in pure exchange with the utility function $U_i = q_{i1}q_{i2}^\alpha q_{i3}^\beta$ with $\alpha, \beta > 0$. Show that the boundaries similar to those shown in Fig. 10-2 are straight lines.

10-7 The a_{ij} coefficients for a three-industry, input-output system are

$$\begin{bmatrix} 0.2 & 0.1 & 0.6 \\ 0.5 & 0.4 & 0.4 \\ 0.1 & 0.4 & 0.2 \end{bmatrix}$$

Use the Hawkins-Simon conditions to determine whether this system has a general solution.

10-8 Use the column-sum conditions given by (10-34) to determine whether the input-output system of Exercise 10-7 has a general solution.

SELECTED REFERENCES

Arrow, K. J., and F. H. Hahn: *General Competitive Analysis* (San Francisco: Holden-Day, 1971). Advanced mathematics is used. Existence, stability, and uniqueness are covered in chaps. 5, 11–12, and 9 respectively.

Debreu, Gerard: *Theory of Value* (New York: Wiley, 1959). Advanced mathematics is used to prove the existence of competitive equilibrium.

Hicks, J. R.: *Value and Capital* (2d ed., Oxford: Clarendon Press, 1946). Multimarket equilibrium is covered in chaps. IV–VIII. The mathematical development is contained in an appendix.

Leontief, W. W.: *The Structure of American Economy*, 1919–1939 (2d ed., New York: Oxford, 1951). A description of the input-output model by its originator.

Metzler, Lloyd A.: "Stability of Multiple Markets: The Hicks Conditions," *Econometrica*, vol. 13 (October, 1945), pp. 277–292. An advanced mathematical discussion of the Hicksian and dynamic multimarket stability conditions.

Miernyk, W. H.: *The Elements of Input-Output Analysis* (New York: Random House, 1965). An elementary nonmathematical description of empirical input-output systems.

Nikaido, Hukukane: *Convex Structures and Economic Theory* (New York: Academic, 1968). Existence, stability, and uniqueness are covered in this volume for the mathematically sophisticated reader.

Quirk, James, and Rubin Saposnik: *Introduction to General Equilibrium Theory and Welfare Economics* (New York: McGraw-Hill, 1968). Existence and stability are treated in chaps. 3 and 5 respectively. Mathematical concepts are simplified and developed in the text.

Samuelson, Paul A.: *Foundations of Economic Analysis* (Cambridge, Mass.: Harvard University Press, 1948). Dynamic multimarket stability is discussed in chap. IX.

الفصل الحادى عشر

اقتصاديات الرفاهية
WELFARE ECONOMICS

ان الغرض من اقتصاديات الرفاهيه هو تقديم رغبة المجتمع فى الحالات الاقتصادية البديلة • فالحاله الاقتصاديه هى عبارة عن ترتيب خاص للنشاطات والموارد الاقتصادية •

فكل حاله من هذه الحالات تتميز برصد كميات مختلفه من الموارد وبتوزيع مختلف للمكافئات على الانشطه الاقتصادية • فقد لايستطيع الاقتصادى دائما من وصف طريقة تتم من خلالها انتقال (او تحول) حالة اقتصاديه الى حالة اخرى ولكن مقاييس السياسه المتبعه سوف تكون متوفرة فى اغلب الاحيان لتغيير الحاله الراهنه • فمن المهم جدا أن نعرف عما اذا كان التغيير المتوقع مرغوب فيه ام لا • تخيل على سبيل المثال ان بامكان الاقتصاد التوصل الى توازن للاسواق المتعددة عند مجموعتين مختلفتين من السلع واسعار العوامل •

وبما ان رغبات المستهلكين والملاك متوافقه عند كلا التوازنين فأن بمقدرة المجتمع أن يختار بينهما وحتى ولو كان على اساس الرفاهيه فقط فالقواعد التى تحل بها مثل هذه المصاعب تكون ضمن مجال اقتصاديات الرفاهيه •

ان رفاهية المجتمع تعتمد على مستويات القناعة والرضى لجميع المستهلكين [1] وذلك بالمعنى العريض ولكن معظم البدائل يجب ان تقيم باقتصاديات الرفاهيه سوف يكون لها اثار مرغوبه على بعض الناس واثار غير مرغوبه على الاخرين وعلى ضوء هذا فان امام الاقتصادى اختيارين • فقد يرفض المستهلك التعامل مع الحالات التى يؤدى فيها

---

(١) ان مثل هذه العبارات تكون مبنيه على قواعد خلقية او تقييمات مقومه ولا يمكن اثباتها فمن المعقول ان نفترض بان فكرة رفاهية المجتمع تتحدر من الفكرة الاكثر انضباطا وهى فكرة الرفاهية الاقتصادية • فعلى سبيل المثال فقد يعتمد رفاهية المجتمع على ماهى السلعة المنتجه وعلى طريقة توزيعها بين الناس ، وعلى الطريقه التى تضم بها المجتمع سياسيا والى اى حد تتخذ القرارات الاجتماعية بالعمليات المحليه الى اخره فالتحاليل الحاضرة سوف تركز على الرفاهيه الاقتصاديه •

التغير الاجتماعى المقترح على تحسين حالة الاغلبية وتدهور حالة الباقين ويقنع نفسه بتحليل الحالات التى تكون فيها الرفاهيه مضمونة له • وقد يقرر كبديل عمل مقارنات شخصيه interpersonal comparisons لمنفعته ومن ثم يحلل فصلا من الحالات بصفة موسعة •

ففى الحالة السابقه يكون فيها المستهلك مهتما بالتوزيع الاكثر كفائة للموارد وفى الحالة الاخيرة يجب عليه ان يقوم بتقييمات واضحة • فقد يامل الانسان ان هذه التغيرات سوف تكون على ضمير المجتمع كقاعدة يعتمد عليها لان الاقتصادى لايمتلك كفائة • اكثر من اى انسان اخر فى القول بان اى حركة محددة اكثر رغبه اذا كان لها تاثيرات غير مرض عنها من بعض اعضاء المجتمع •

ففى الفصل (١١ــ١) سوف نشتق شروط باريتو Pareto للاقتصاد الكفوء والفعال economic efficiency ولقد ناقشنا احتمالات تحقيق هذه الشروط تحت حالتى المنافسه المثلى perfect competition وحالة المنافسه الغير مثلى imperfect فى الفصلين (١١ــ٢) و (١١ــ٣) اما الفصل (١١ــ٤) فانه يناقش مواضيع التأثيرات الخارجية على الاستهلاك والانتاج وكذلك نظريات السلع العامة public goods اما التوصل الى شروط باريتو من خلال الضرائب والتعويضات subsidies فانه مناقش فى الفصل (٥ــ١١) ثم نعتبر شروط الرفاهيه الاجتماعيه فى الفصل (١١ــ٦) ونظريات الثانى فى ترتيب الافضليه second best تكون مقدمة فى الفصل (١١ــ٧) •

١/١١ : أمثلية باريتو PARETO OPTIMALITY

نصف عملية التخصص (او التوزيع allocation) بمستويات الاستهلاك المحددة لكل مستهلك ومستويات الداخل والخوارج المحددة لكل منتج فامثلية باريتو تعطينا تعريفا للكفاءة الاقتصادية لعملية التخصص التى تخدم كاساس للكثير من اقتصاديات الرفاهية فيكون التخصص امثلا من وجهة نظر باريتو Pareto optimality او يكون كفوء من وجهة نظر باريتو *Pareto-efficient* أذا لم يكن بالامكان اعادة تنظيم الانتاج والتوزيع (توزيع الدخل) لزيادة المنفعة لشخص واحد او اكثر بدون خفض المنفعة للاخرين وبالعكس يكون التخصيص غير مثالى من وجهة نظر باريتو *Pareto-nonoptimal* وذلك اذا زادت منفعة شخص ما بدون الحاق الضرر باى شخص اخر • ونسمى احد التخصيصات بتفوق باريتو *Pareto-superior* على الاخرى اذا كانت المنفعة لشخص واحد او اكثر اعلى ولم تكن اقل لاى شخص ، وحتى اذا لم يكن التخصيص امثلا من وجهة نظر باريتو•

ان تحاليل امثلية باريتو تقترب كثيرا من التقييمات والمقارنات الشخصيه لمستويات

المنفعه ونتيجة لذلك فان التغيرات التى تحسن اوضاع البعض ولكن تسبب تدهورا فى منفعة اولئك الآخرين الذين لايقدرون على التقييم بالنسبه للكفائة فقد تكون نتيجة الحركة هذه نافعة او لا تكون • فيقال ان الرفاهيه اخذه فى الازدياد (فى التناقص) اذا تحسن وضع شخص واحد على الاقل (او تدهور) بدون تغيير فى اوضاع الاخرين • فمن الواضح انه من غير الممكن ان تكون الحالة امثلية الا اذا كانت جميع التحسينات من هذا النوع[1] ان التجرد من اعتبارات توزيع الدخل يحد من عدد الاسئلة التى يجاوب عليها باريتو • فعلى سبيل المثال فقد يكون لمجتمع ما تخصيص بامثلية بأريتو بحيث ان احد المستهلكين يحصل على ٩٩٪ من جميع السلع، ولكن أغلب الناس لا يعتبرون هذا تخصيصا مرضى عنه •

أمثلية باريتو للاستهلاك : Pareto Optimality for Consumption

يكون توزيع السلع الاستهلاكيه بامثلية باريتو (متضمنا وقت الفراغ leisure والعوامل الاولى الاخرى الغير مستخدمه) اذا كانت اعادة تخصيص السلع التى تزيد المنفعة لشخص واحد او اكثر سوف ينتج عنها انخفاض فى منفعة مستهلك واحد اخر على الاقل • وسوف نتحصل على امثلية باريتو اذا كانت منفعة كل مستهلك عند حدها الاقصى اذا اعطينا مستويات المنفعة لجميع المستهلكين الاخرين •

مثـال :

للتوضيح افترض انه يوجد مستهلكين اثنين فقط نرمز لهما بالعددين (١) و (٢) فى اسفل الحرف وكذلك يوجد سلعتين اثنين فقط Q_1 ، Q_2 وتكون دالتى المنفعة للمستهلكين $U_1(q_{11}, q_{12})$ ، $U_2(q_{21}, q_{22})$ بحيث ان $q_{11} + q_{21} = q_1^0$ ثابت وان $q_{12} + q_{22} = q_2^0$ والان، افترض ان المستهلك II يتمتع بمستوى القناعة $U_2^0 = \text{constant}$ فمن اجل الحصول على الحد الاعلى لمنفعة المستهلك I تحت شرط ميزانية ثم تكون الدالة :

$$U_1^* = U_1(q_{11}, q_{12}) + \lambda[U_2(q_1^0 - q_{11}, q_2^0 - q_{12}) - U_2^0]$$

حيث ان λ هى مضروب لاقرانج Lagrange multiplier وبوضع اشتقاقات هذه الدالة لجزئيه مساويه لصفر :

---

(١) ان التحاليل الراهنه محدودة بالكفائة الغير حركيه وسوف لانهتم لنواحى رفاهية تخصيص الموارد عبر الزمن او مجرى الزمن للرفاهيه او الرفاهيه البديله عبر الزمن للاقتصاد •

$$\frac{\partial U_1^*}{\partial q_{11}} = \frac{\partial U_1}{\partial q_{11}} - \lambda \frac{\partial U_2}{\partial q_{21}} = 0$$

$$\frac{\partial U_1^*}{\partial q_{12}} = \frac{\partial U_1}{\partial q_{12}} - \lambda \frac{\partial U_2}{\partial q_{22}} = 0$$

$$\frac{\partial U_1^*}{\partial \lambda} = U_2(q_1^0 - q_{11}, q_2^0 - q_{12}) - U_2^0 = 0$$

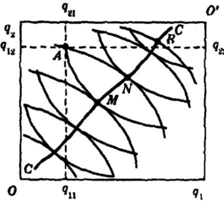
وكذلك :

$$\frac{\partial U_1/\partial q_{11}}{\partial U_1/\partial q_{12}} = \frac{\partial U_2/\partial q_{21}}{\partial U_2/\partial q_{22}} \qquad (١١-١)$$

حيث ان الطرف الايسر من المعادلة (١-١١) يمثل RCS للمستهلك I. ويمثل الطرف الايمن RCS للمستهلك II ولتحقيق امثلية باريتو يجب ان يتساوى RCS للمستهلكين في حالة الاستهلاك • فاذا لم تتحقق (١-١١) فانه من الممكن اعادة توزيع السلع بطريقة تسمح بزيادة منفعة I بدون خفض منفعة II والمناقشه متشابهة في الحالة الاخرى • وينتج شرط (١-١١) من الحصول على الحد الاعلى لمنفعة II اذا اعطينا مستوا ثابتا لمنفعة I ولهذا فاذا لم تتحقق (١-١١) فانه من الممكن ايضا زيادة منفعة II بدون خفض منفعة I ويمكن تعميم التحاليل الرياضيه لحالة المستهلكين الاثنين بسهولة لتغطي اي عدد من المستهلكين •

ان من الممكن وضع النقاش التالي عن طريق استخدام صندوق ادج وورث Edgeworth box (راجع الفصل ٩-٢) وتمثل ابعاد المستطيل في الشكل (١-١١) مجموع الكميات المتوفرة من السلعتين Q_1 و Q_2 ضمن اطار اقتصادي تقايضي بحت pure-exchange economy فاي نقطة داخل الصندوق تمثل توزيعا معينا من السلع بين المستهلكين الاثنين •

مثال : اذا كانت طريقة توزيع السلعتين معطاة كما في النقطة A فان الكميات من Q_1 و Q_2 المستهلكة من قبل I يجب ان تقاس عن طريق احداثيات A مستخدمين في ذلك الركن الجنوبي الغربي O_1 كنقطة اصل ، اما الكميات المستهلكة من قبل II فانها تقاس باحداثيات النقطه A باستخدام الركن الشمالي الشرقي O كنقطة اصل ولقد رسمت منحنيات السواء للمستهلك I باستخدام O كنقطة اصل ومنحنيات (خريطة السواء map) للمستهلك II باستخدام O كنقطة اصل وتكون RCS للمستهلكين متساويه حيث يحدث تماس بين خريطة سواء المستهلك I وخريطة سواء المستهلك II فيكون المحل الهندسي locus لجميع هذه النقاط هو " منحنى الاتفاق contract curve CC وتعطي المعادلة (١-١١) النمط (الشكل الرياضي لمنحنى الاتفاق وهو بدلالة q_{11} و q_{12} •



شكل (١١ - ١)

ان معدلات تعويض السلع غير متساو عند نقطة A ولكن من الممكن زيادة مستويات المنفعة لكلا المستهلكين بتغيير التوزيع الحالي • فلو ان الوضع النهائي (وذلك بعد اعادة توزيع Q_1 و Q_2 كان بين M ، N فان كلا المستهلكين سوف يكسب ، لان كلاهما سوف يكون على منحنيات سواء اعلى من تلك عند نقطة A فلو ان النقطه النهائية كانت عند M او N فان احد المستهلكين سوف يكسب بدون اى تدهور في وضع المستهلك الثاني فاذا وصلنا الى نقطة على منحنى الاتفاق ، فانه ليس من المحتمل تحسين وضع كلا المستهلكين بدون حدوث تدهور في مكانة الاخر • فحسب شروط امثليه باريتو فان اى نقطة من M الى N سوف تكون اكثر تفضيلا من نقطة A ولكن تقييم النقط البديل على منحنى الاتفاق سوف يحدث فيه مقارنه شخصية للمنافع وبذلك لا يكون ممكنا ضمن الاطار الحالي •

أمثلية باريتو للإنتاج : **Pareto Optimality for Production**

اذا افترضنا ان المستهلكين غير متخمين وان مستوى المنفعة لكل فرد مستقلا عن الكميات المستهلكه من قبل الاخرين ، فان اى زيادة في كمية سلع اى مستهلك بدون نقصان في كمية سلع اى مستهلك اخر سوف تؤدى الى زيادة في المنفعة لاحد المستهلكين على الاقل بدون نقص في منفعة الاخرين • ولهذا فان امثلية باريتو للمنتجين تتطلب ان يكون مستوى الخارج output لكل سلعه مستهلكه عند قمته وذلك اذا اعطينا مستويات الخارج لجميع السلع المستهلكه الاخرى •

مثال :

افترض انه يوجد اثنين من المنتجين وانهم يستخدما اثنين من الدواخل لانتاج سلعتين باستخدام دالتي الانتاج :

$$q_1 = f_1(x_{11}, x_{12})$$
$$q_2 = f_2(x_{21}, x_{22})$$

حيث ان $x_{11}+x_{21}=x_1^0$ وان $x_{12}+x_{22}=x_2^0$ يمثلان كميات الداخل المتوفرة وان q_1 ، q_2 يمثلان مستويات الخارج وبالحصول على الحد الاقصى من خارج السلعة I تحت الشرط بان يكون خارج السلعة II يكون على مستوى مقرر سابقا وهو q_2^0 ثم نكون الدالة التالية :

$$L = f_1(x_{11}, x_{12}) + \lambda[f_2(x_1^0 - x_{11}, x_2^0 - x_{12}) - q_2^0]$$

ثم نضع اشتقاقاتها الجزئيه مساويه لصفر :

$$\frac{\partial L}{\partial x_{11}} = \frac{\partial f_1}{\partial x_{11}} - \lambda \frac{\partial f_2}{\partial x_{21}} = 0$$
$$\frac{\partial L}{\partial x_{12}} = \frac{\partial f_1}{\partial x_{12}} - \lambda \frac{\partial f_2}{\partial x_{22}} = 0$$
$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = f_2(x_1^0 - x_{11}, x_2^0 - x_{12}) - q_2^0 = 0$$

ونجد ان

$$\frac{\partial f_1/\partial x_{11}}{\partial f_1/\partial x_{12}} = \frac{\partial f_2/\partial x_{21}}{\partial f_2/\partial x_{22}} \qquad (١١_٢)$$

ان الجانب الايسر من (١١_٢) يمثل RTS للمستهلك I من اجل X_1 ، X_2 ونجد ان الجانب الايمن يمثل RTS للمستهلك II من اجل X_1 ، X_2 ويجب ان تتساوى RTS للمنتجين لتحقيق امثلية باريتو في الانتاج • فلو ان (١١_٢) لم تتحقق فانه من الممكن زيادة انتاج احدى السلع بدون انخفاض في انتاج الاخر ، وكما يمكن للقارئ اثباته ، فانه من المحتمل زيادة انتاج كلا السلعتين •

أمثلية باريتو على وجه العموم Pareto Optimality in General

ان شروط باريتو المشتقه في الفصلين السابقين بالنسبة للمستهلكين والمنتجين يمكن تعميمها وتوسيعها لتشمل اعتبارات للاقتصاد ككل اعتبر الان وجود اقتصاد مكون من عدد m من المستهلكين وعدد N من المنتجين وعدد n من العوامل الاوليه ، وعدد s من السلع المنتجه • وللتبسيط افترض ان كل مستهلك يستهلك جميع السلع المنتجه ، وان كل منتج يستخدم جميع العوامل الاوليه وينتج جميع السلع فتصبح دوال المنفعة للمستهلكين كما يلي :

$$U_i = U_i(q_{i1}^*, \ldots, q_{is}^*, x_{i1}^0 - x_{i1}^*, \ldots, x_{in}^0 - x_{in}^*) \qquad i = 1, \ldots, m \qquad (١١_٣)$$

حيث ان q^{*}_{ik} (هى الكمية المستهلكه من Q_k والتى استهلكها المستهلك i وان x^{0}_{ij} هى الكمية الثابته ، مما يمتلكه مبدئيا من العامل الاولى j وان x^{*}_{ij} هى الكمية المعروضه من المستهلك i للمنتجين وان $x^{0}_{ij}-x^{*}_{ij}$ هى الكمية التىيستهلكها • ونعطى هنا دوال الانتاج فى الشكل الضمنى implicit :

$$F_h(q_{h1},\ldots,q_{hs},x_{h1},\ldots,x_{hn})=0 \qquad h=1,\ldots,N \qquad (١١\text{ـ}٤)$$

حيث ان q_{hk} هى الخارج للسلعه Q_k بواسطة الوحدة الانتاجيه h وان x_{hj} هى الكمية من X_j التى يستخدمها • فتكون الكميات الاجمالية للعوامل الاولية التىيعرضها المستهلكون مساويه للكميات الاجمالية المستخدمه من المنتجين •

$$\sum_{i=1}^{m} x^{*}_{ij}=\sum_{h=1}^{N} x_{hj} \qquad j=1,\ldots,n \qquad (١١\text{ـ}٥)$$

وتكون كذلك اجمالى مستويات الاستهلاك من السلع المنتجه مساويا لاجمالى مستويات خارجها :

$$\sum_{i=1}^{m} q^{*}_{ik}=\sum_{h=1}^{N} q_{hk} \qquad k=1,\ldots,s \qquad (١١\text{ـ}٦)$$

وسوف نصل الى امثلية باريتو اذا كانت منفعة كل مستهلك عند حدها الاقصى وذلك اذا اعطينا مستويات المنفعة للمستهلكين الاخرين تحت الشروط (١١ـ٤) و (١١ـ٥) و (١١ـ٦) اعتبر الان الحصول على الحد الاعلى من منفعة المستهلك I تحت هذه الشروط ثم كون دالة لاقرانج :

$$Z=U_1(q^{*}_{11},\ldots,x^{0}_{1n}-x^{*}_{1n})+\sum_{i=2}^{m}\lambda_i[U_i(q^{*}_{i1},\ldots,x^{0}_{in}-x^{*}_{in})-U^{0}_{i}]$$
$$+\sum_{h=1}^{N}\theta_h F_h(q_{h1},\ldots,x_{hn})+\sum_{j=1}^{n}\delta_j\Big(\sum_{i=1}^{m}x^{*}_{ij}-\sum_{h=1}^{N}x_{hj}\Big)+\sum_{k=1}^{s}\sigma_k\Big(\sum_{h=1}^{N}q_{hk}-\sum_{i=1}^{m}q^{*}_{ik}\Big)$$

حيث ان λ_i ، θ_h ، δ_j ، σ_k هم مضروبات لاقرانج • وبوضع الاشتقاقات الجزئيه للدالة Z مساوية لصفر :

$$\frac{\partial Z}{\partial q^{*}_{1k}}=\frac{\partial U_1}{\partial q^{*}_{1k}}-\sigma_k=0 \qquad \frac{\partial Z}{\partial x^{*}_{1j}}=-\frac{\partial U_1}{\partial(x^{0}_{1j}-x^{*}_{1j})}+\delta_j=0$$
$$\frac{\partial Z}{\partial q^{*}_{ik}}=\lambda_i\frac{\partial U_i}{\partial q^{*}_{ik}}-\sigma_k=0 \qquad \frac{\partial Z}{\partial x^{*}_{ij}}=-\lambda_i\frac{\partial U_i}{\partial(x^{0}_{ij}-x^{*}_{ij})}+\delta_j=0 \qquad (١١\text{ـ}٧)$$
$$\frac{\partial Z}{\partial q_{hk}}=\theta_h\frac{\partial F_h}{\partial q_{hk}}+\sigma_k=0 \qquad \frac{\partial Z}{\partial x_{hj}}=\theta_h\frac{\partial F_h}{\partial x_{hj}}-\delta_j=0$$

حيث ان $i=2,\ldots,m$ $h=1,\ldots,N$ $k=1,\ldots,s$ $j=1,\ldots,n$ كما يجب ان نضع الاشتقاقات الجزئيه بالنسبه لمضروبات لاقرانج مساويه لصفر بمعنى ان الشروط قد تحققت• يمكن وضع الشروط الامثليه باريتو فى النمط المعتاد •فنحل (١١ـ٧) من اجل σ_j/σ_k ;

$$\frac{\sigma_j}{\sigma_k}=\frac{\partial U_1/\partial q^*_{1j}}{\partial U_1/\partial q^*_{1k}}=\cdots=\frac{\partial U_m/\partial q^*_{mj}}{\partial U_m/\partial q^*_{mk}}=\frac{\partial F_1/\partial q_{1j}}{\partial F_1/\partial q_{1k}}=\cdots=\frac{\partial F_N/\partial q_{Nj}}{\partial F_N/\partial q_{Nk}}$$

(٨ـ١١) $j, k = 1, \ldots, s$

وتنص شروط (١١ـ٨) على ان RCS لجميع المستهلكين وان RPT لجميع المنتجيـــن يجب ان يتساوا لكل زوج من السلع المنتجه • تخيل ان (١١ـ٨) لم تتحقق لـ Q_j و Q_k بحيث ان $RCS=\frac{1}{2}$ لبعض المستهلكين وان $RPT=\frac{2}{3}$ لبعض المنتجين وان ثـلاثة وحدات من Q_j يمكن تحويلها الى وحدتين من Q_k وذلك بالتحرك على منحنى تحويـل المنتج transformation curve فلو ان المستهلك يستغنى عن ثلاثة وحدات مـــن Q_j (بدون تغيير فى مواقف المستهلكين الاخرين) فانه سوف يتطلب وحدة واحدة فقــط من Q_k وذلك بالتبادل والمقايضه من اجل ان يظل على نفس منحنى السواء ويتحاشـــى الانقاص من المنفعة وسوف يزداد فعلا مستوى القناعة والرضا لهذا المستهلك وذلــك بقيامه بتحويل ثلاثة وحدات من Q_k الى وحدتين من Q_j ولكن مثل هذا التحســن كان من غير الممكن اذا كان RCS يساوى RPT • . .

ويحل (١١ـ٧) من اجل δ_j/δ_k :

$$\frac{\delta_j}{\delta_k}=\frac{\partial U_1/\partial(x^0_{1j}-x^*_{1j})}{\partial U_1/\partial(x^0_{1k}-x^*_{1k})}=\cdots=\frac{\partial U_m/\partial(x^0_{mj}-x^*_{mj})}{\partial U_m/\partial(x^0_{mk}-x^*_{mk})}=\frac{\partial F_1/\partial x_{1j}}{\partial F_1/\partial x_{1k}}=\cdots=\frac{\partial F_N/\partial x_{Nj}}{\partial F_N/\partial x_{Nk}}$$

(٩ـ١١) $j, k = 1, \ldots, n$

وتنص الشروط (١١ـ٩) على ان يجب مساواة RCS لجميع المستهلكين مع RTS لجميع المنتجين وذلك لكل زوج من السلع الاوليه • فلو ان هذا الشرط لم يتحقق لبعـــــض المستهلكين وبعض المنتجين فانه من الممكن زيادة منفعة المستهلك بطريق المبادله بين المستهلك والمنتج •

واخيرا بحل (١١ـ٧) لتيم δ_j/σ_k •

$$\frac{\delta_j}{\sigma_k}=\frac{\partial U_1/\partial(x^0_{1j}-x^*_{1j})}{\partial U_1/\partial q^*_{1k}}=\cdots=\frac{\partial U_m/\partial(x^0_{mj}-x^*_{mj})}{\partial U_m/\partial q^*_{mk}}=-\frac{\partial F_1/\partial x_{1j}}{\partial F_1/\partial q_{1k}}=\cdots=-\frac{\partial F_N/\partial x_{Nj}}{\partial F_N/\partial q_{Nk}}$$

(١٠ـ١١) $j = 1, \ldots, n$
$k = 1, \ldots, s$

وتنص شروط (١١ـ١٠) على مساواة RCS للمستهلك بين العوامل والسلع مع معدلات المنتج المقابلة لتحويل العوامل الى سلع (ان MP الخاص بهم)[١] فلـــوان (١١ـ١٠) لم تتحقق لبعض المستهلكين والمنتجين فان منفعة المستهلك سوف تـزداد وذلك بالتخلى عن بعض العوامل مقابل كمية اكبر من السلع او بــعض السلع مقابل كميـــة اكبر من العوامل •

وتوصف حالة امثلية باريتو بالشروط الحديه (١١ــ٨) و(١١ــ٩) و(١١ــ١٠) ، بالاضافه الى الشرط الاضافى الذى ينص على انه من غير المحتمل زيادة المنفعة لمستهلك واحد او اكثر بدون التقليل من المنفعة للاخرين وذلك بعدم مواصلة انتاج سلعه واحدة او اكثر ونفترض هنا ان الشرط الاخير يتحقق دائما فتكون امثلية باريتو قد عرفت بدلالة المعدلات الفيزيائيه للتعويض بين العوامل والسلع بدون الاشارة الى اسعار السوق اما مضروبات لاقرانج δ_j $(j = 1, \ldots, n)$ و σ_k $(k = 1, \ldots, s)$ فانها تكون بمثابة اسعار كفاية efficiency prices ولاتتحقق امثلية باريتو اذا عدل جميع المستهلكين والمنتجين معدلات تعويضهم الى نسب هذه الاسعار (اسعار الكفاية) فاى مجموعة من اسعار السوق للعوامل والسلع مثل $r_j = \alpha\delta_j$ $(j = 1, \ldots, n)$ وكذلك $p_k = \alpha\sigma_k$ $(k = 1, \ldots, s)$
حيث ان $\alpha > 0$ سوف تخدم كاسعار كفايه وتؤدى الى حالة امثلية باريتو •
ان من الشىء الممتع فى اقتصاديات الرفاهية ان نسال ما اذا كانت بعض اسعار السوق المعينه تكون اسعار كفاية او ما يعادل ذلك ان نسال ما اذا كانت هناك بعض الاشكال الخاصة بتنظيم السوق سوف تقود الى امثلية باريتو •

١١ - ٢ فعالية وكفاءة المنافسة الكاملة :
THE EFFICIENCY OF PERFECT COMPETITION

ان المستهلكين يقومون بشراء السلع وبيع العوامل الاوليه بينما تقوم الوحدات الانتاجيه ببيع السلع وشراء العوامل الاوليه • ففى المنافسه الكامله يواجه المستهلكون والوحدات الانتاجيه نفس مجموعة اسعار السلع والعوامل ولا يستطيع مستهلك او وحدة انتاجيه ان تؤثر على هذه من خلال تصرفاتهم فلو ان المستهلكين كانوا ممن يحاولون الحصول على الحد الاعلى لمنفعتهم فان كل واحد منهم سوف يساوى RCS الخاص به لكل زوج من السلع بنسبة السعر المقابل :

$$RCS_{kj} = \frac{p_j}{p_k} \qquad (١١\text{ـ}١١)$$

حيث ان j ، k يمكن ان تشير الى السلع او العوامل الاوليه • فاذا كانت الوحدات الانتاجيه ممن يحاولون الحصول على الحد الاعلى من الربح ، فانهم سوف يساوى RPT و RTS و MP بنسب الاسعار المقابلة :

$$RPT_{kj} = \frac{p_j}{p_k} \qquad (١١\text{ـ}١٢)$$

فاذا كان كلا j و k يشيران الى السلع ، فان :

$$RTS_{kj} = \frac{p_j}{p_k} \qquad (١١\text{ـ}١٣)$$

فاذ كان كلا j و k يشيران الى العوامل وان :

$$MP_{ik} = \frac{p_i}{p_k} \qquad (١٤_١١)$$

اذا كانت i تشير الى سلعة ما وكانت k تشير الى عامل من العوامل وبمقارنة (١١_١١) الى (١١_١٤) بى (١١_٨) و (١١_٩) و(١١_١٠) يتضح لنا ان شروط امثلية باريتو قد تحققت فى حالة المنافسة الكاملة •

تقرر المناقشه السابق ذكرها ان المنافسه الكامله تكون كافيه sufficient لامثلية باريتو • ويوضح ما يلى انها ضرورية كذلك افترض ان الشروط (١١_٨) الى (١١_١٠أ) تتحقق ، وان المعادلات (١١_١١) و (١١_١٢) و(١١_١٤) يمكن كتابتها مندمجه ببعضها كالتالى :

$$RPT_{kj} = \frac{\text{التكلفه الحديه لـ } Q_j \text{ بدلالة } X_i}{\text{التكلفه الحديه لـ } Q_k \text{ بدلالة } X_i} = \frac{p_i/MP_{ij}}{p_i/MP_{ik}} = \frac{p_j}{p_k} = RCS_{kj} \qquad (١٥_١١)$$

حيث ان j و k يشيران الى السلع وان i تشير الى العامل • فلو ان الاسعار لم تكن مساويه للتكلفات الحديه ، (١١_١٥) سوف تتحقق ، فقط اذا كانت الاسعار متناسبه مع التكلفات الحديه اى انه اذا كانت :

$$p_j = \theta \frac{p_i}{MP_{ij}} \qquad p_k = \theta \frac{p_i}{MP_{ik}} \qquad (١٦_١١)$$

ولكن باعادة ترتيب (١١_١٦) :

$$\frac{p_i}{p_j} = \frac{1}{\theta} MP_{ij} \qquad \frac{p_i}{p_k} = \frac{1}{\theta} MP_{ik} \qquad (١٧_١١)$$

فطرفى المعادلة(١١_١٧) اليسرى تساوى معدل التعويض للمستهلك بين Q_j او (Q_k)و X_i بينما الطرف الايمن يكون $1/\theta$ مضروبا فى معدل التحويل للمنتج بين Q_j (او Q_k) و X_i فشروط (١١_١٠) لم تتحقق لان معدلات التعويض والتحويل للمستهلكين والمنتجين لم تتساوا فالمستهلكين يقدموا الكميه القصوى من X_i (العمل) لذا فان التخصيص (التوزيع) لايمكن ان يكون بامثلية باريتو •

ان المنافسه الكامله تمثل رفاهية مثلى حيث انها تحقق متطلبات امثلية باريتو الا اذا كان واحدا او اكثر من الافتراضات المشار اليها سابقا فى هذا الفصل لم تتحقق • فشروط الدرجة الثانيه يجب ان تتحقق لجميع المستهلكين والمنتجين • فلو انهم لم يتحققوا لواحدا او اكثر من المستهلكين او المنتجين فان مساواة معدلات التعويض والتحويل سوف لاتضمن الامثليه •

فالحقيقه ان النقطه التى يتساوى عندها معدلات التعويض والتحويل قد تكون نقطة "تشاؤم" pessimum بدلا من نقطة مثلى • ويكون الحل الامثل عندها ممثلا بحل ركنى

Corner solutions راجع الشكل (٢ـ٤ أ) فقد تتحقق امثلية بريتو تحت المنافسة الكاملة اذا تخم واحدا او اكثر من المستهلكين • فالمنفعه الحديه الزائدة للمستهلك المتخم تساوى صفرا لكل سلعه وان معدلات تعويضها تكون غير معروفه فقد نحول السلع من هذا المستهلك المتخم الى المستهلك الاخر بدون تخفيض المنفعه وبدون زيادة فى منفعة الاخرين • اما حالات بارينو الغير مثلى Pareto nonoptimality تحت المنافسة الكاملة اذا كان هناك مؤثرات خارجيه على الاستهلاك او الانتاج فانها مشروحه فى الفصل (١١ـ٤) •

هناك حالات تكون فيها المنافسه الكامله مطابقة لامثلية بارينو ولكن بعض التساوى الحديه لاتتحقق • فقد تنتج حلول ركنيه حتى ولو كانت جميع دوال المنفعة والانتاج بالشكل المناسب ، بشرط ان تكون RCS للمستهلكين دائما اكبر من (او اصغر من) RPT المقابله للمنتجين فاحد السلع سوف لايكون منتجا ويجب ان نصف امثلية بارينو لهذه السلع تحت الاعتبار بدلالة التباينات الحديه •

١١ - ٣ فعالية (كفاءة) المنافسة الغير كاملة :

THE EFFICIENCY OF IMPERFECT COMPETITION

ان الاحتكار واحتكار القلة واحتكار الشراء والاشكال الاخرى للمنافسة الغير كاملة مع بعض الاستثناءات ، سوف تؤدى الى توزيعات بارينو غير امثلية للموارد فالشروط الحديه التى تحققت تحت المنافسه الغير كاملة سوف لاتحقق شروط امثلية باريتو المعطاة بالمعدلات (١١ـ٨) و(١١ـ٩) و(١١ـ١٠) •

ولسوف نستخدم هنا طريقة التوازن الجزئى partial-equilibrium للحكم على فعاليه (كفائة) قطاعات معينه فى الاقتصاد لقد افترضنا ان الشروط من (١١ـ١) الى (١١ـ١٤) تكون محققه من جميع قطاعات الاقتصاد وغير التى تحت الاعتبار •وكنتيجة لذلك فان ذلك القطاع سوف ينظر اليه عما اذا حقق هذه الشروط ام لم يحققها •فحسب طريقة الاسواق المتعددة المستخدم فى الفصل (١١ـ١) فان الشروط الامثليه باريتو قد اشتقت بدون الاشارة الى اسعار السوق • اما هنا فان الاسعار الخارجيه قد افترض انها بالتوزيع بطريقة فعالة فالحالات التى لايحققها هذا الافتراض سوف تناقش فى الفصل (١١ـ٧) •

المنافسة الغير كاملة فى الاستهلاك : Imperfect Competition in Consumption

سوف يكون هناك منافسه غير كاملة اذا لم يستطع واحدا من المستهكلين او اكثر شراء سلعة ما اوبيع عامل ما بالقدر الذى يرغب فى شرائه او بيعه بدون ان يؤثر تاثيرا ملحوظا

على اسعار السلع والعوامل •

مثـال :

افترض انه يوجد اثنين من المستهلكين وعامل واحد factor وسلعتين وان دالتى المنفعة كما يلى :

$$U_1 = U_1(q_{11}, q_{12}, x_1^0 - x_1) \qquad U_2 = U_2(q_{21}, q_{22}, x_2^0 - x_2)$$

حيث ان x_i^0 تمثل مايمتلكه المستهلك i مبدئيا من العامل ، وان x_i تمثل كمية العامل الذى يعرضه المستهلك i وان q_{ik} تمثل استهلاك السلعة Q_k د.ع سعر عرض Q_1 معتمدا على اجمالى الكميه المطلوبه $p_1 = g(q_1)$ حيث ان $q_1 = q_{11} + q_{21}$ وان $g'(q_1) > 0$ وان شرطى ميزانيه المستهلكين هما :

$$rx_1 - g(q_1)q_{11} - p_2q_{12} = 0$$
$$rx_2 - g(q_1)q_{21} - p_2q_{22} = 0$$

فكل واحد من المستهلكين يحاول ان يحصل على الحد الاعلى من منفعته تحت شرط ميزانية مكونا الدالتين :

$$L_1 = U_1(q_{11}, q_{12}, x_1^0 - x_1) + \lambda_1[rx_1 - g(q_1)q_{11} - p_2q_{12}]$$
$$L_2 = U_2(q_{21}, q_{22}, x_2^0 - x_2) + \lambda_2[rx_2 - g(q_1)q_{21} - p_2q_{22}]$$

وبوضع الاشتقاقات الجزئيه مساويه لصفر :

$$\frac{\partial U_i}{\partial q_{i1}} - \lambda_i[p_1 + q_{i1}g'(q_1)] = 0$$

$$\frac{\partial U_i}{\partial q_{i2}} - \lambda_i p_2 = 0 \qquad -\frac{\partial U_i}{\partial (x_i^0 - x_i)} + \lambda_i r = 0 \qquad i = 1, 2 \qquad (١١ــ١٨)$$

$$rx_i - g(q_1)q_{i1} - p_2q_{i2} = 0$$

وكذلك : $i = 1, 2$

$$\frac{\partial U_i/\partial q_{i1}}{\partial U_i/\partial q_{i2}} = \frac{p_1 + q_{i1}g'(q_1)}{p_2} \qquad \frac{\partial U_i/\partial q_{i1}}{\partial U_i/\partial (x_i^0 - x_i)} = \frac{p_1 + q_{i1}g'(q_1)}{r}$$

ففى هذه الحالة يتصرف المستهلكين الاثنين كمحتكرى شراء (راجع الفصل ٨ــ٣)ويعكس RCS التوازنى الخاص بهما والمعطى بالمعادلة (١١ــ١٨) التكلفتين الحديتيــــن للحصول على كميات اضافيه من Q_1 بدلا من p_1 •

فلو ان $q_{11} \neq q_{21}$ فان التكلفات الحديه لـ Q_1 تختلف من مستهلك لاخر وكــــذلك RCS الخاص بهما ، ولايكون توزيع Q_1, Q_2 بين المستهلكين بامثلية باريتو • ولكــن اذا كانت $q_{11} = q_{21}$ فان RCS لهما سوف يكونا متساويين ، ولكنهما سوف يختلفـــا عن RPT ومن MP للمنتجين للذين عادلوهم بنسب الاسعار •

المنافسة الغير كاملة فى أسواق البيع :

Imperfect Competition in Commodity Markets

من اجل تبسيط المسالة ، نفرض انه توجد سلعة واحدة فقط Q بسعر p ويوجد ايضا عاملا factor واحدا فقط X بسعر r فشروط امثلية باريتو (١١ــ١٠) سوف تتحقق اذا ساوى المنتجين بين MP الخاص بهم اذا ساوى المستهلكين RCS الخاص بهم بنسب سعر السلعة للعامل :

$$MP = \frac{r}{p} = RCS \qquad (١١\text{ـ}١٩)$$

فلو اننا افترضنا ان المستهلكين سوف يحققوا (١١ــ١٩) فان امثلية باريتو سوف تتحقق لو ان المنتجين ساووا السعر بالتكلفه الحدية $\overline{MC}$:

$$p = \frac{r}{MP} = MC \qquad (١١\text{ـ}٢٠)$$

فلو ان واحدا او اكثر من المنتجين فشل فى تحقيق (١١ــ٢٠) فان التوزيع الناتج سوف لايكون بامثلية باريتو • فمساواة السعر بالتكلفه الحديه يمثل حدثا عاديا فى حالة المنافسه الكامله ولكنه حدثا غير عادى فى حالة المنافسة الغير كاملة •

ففى حالة المحتكر البسيط simple monopolist (راجع الفصل ٧ــ١) يكون الايراد الحدى MR وهو اقل من السعر ، مساويا للتكلفه الحديه MC وبهذا يخلق توزيعا لا يمثل امثلية باريتو اما المحتكر المميز بين زبائنه من حيث وضع سعرا معينا لكل مجموعة من زبائنه) تمييزا كاملا perfectly discriminating monopolist (راجع الفصل ٧ــ٢) فانه شاذ عن القاعدة التى تنص على ان المنافسة الغير كاملة لاتكون امثلية باريتو • فهو سوف يساوى السعر الحدى بالتكلفه الحديه MC وسوف يتحقق شرط (١١ ــ ١٩) و(١١ــ٢٠) اذا فسرنا p على انها تمثل التكلفة الحديه $\overline{MC}$ لكل من المنتجين والمستهلكين • ففى المنافسة الكاملة يستفيد كلا من المشترى والبائع من عملية المبادلة، اما فى حالة الاحتكار التمييزى التام فان الفائده كلها سوف يمتصها البائع وسوف تكون توزيعات الدخل الناتجه من هذين النمطين لتنظيم السوق مختلفه تماما ولكن كلاهما يمثل امثلية باريتو فالمحتكر الذى يحصل على الحد الاعلى من ايراداته(راجع الفصل ٧ــ٣) سوف يحاول ان يحصل على الحد الاعلى من ايرادات مبيعاته تحت الشرط الذى ينص على ان ربحه يساوى او يفوق مستوا ادنى مقبول minimum acceptable profit فالربح الادنى المقبول يكون عامة اقل من ربحه الامثل الاحتكارى ، وان مستوى الخارج output يكون عادة اعلى من المستوى الذى قد يتحقق فى حالة الاحتكار البسيط وسوف يحقق المحتكر الحاصل على الحد الاعلى من الايرادات الشرط

(١١ــ٢٠) اذا كان (١) ربحه الادنى المقبول مساويا للربح الذى اكتسبه من الخارج الذى يتساوى عنده السعر مع MC ويكون MC فى ازدياد ، (٢) ان MR يكون غير سالبا عند هذه النقطه وحيث ان ليس لديه الحافز لاختيار مثل هذه النقطه فان حدوث كلا (١) و(٢) سوف يكون بمحض الصدفة • فعامة ، لااحد يتوقع ان يحقق المحتكر الذى يحصل على الحد الاعلى من ايراداته الشروط الضروريه للحصول على امثلية باريتو •

كذلك احتكار القله، oligopoly والاحتكار الثنائى Duopoly لا ينتج عنه امثلية باريتو فشرط (١١ــ٢٠) لا يتحقق فى جميع الحالات المذكورة فى الفصل (٨ــ١) ففى كل حالة يساوى واحدا او اكثر من المستهلكين بين بعض انماط MR وبين MC وتنطبق نفس التحاليل على حالة المنافسة الاحتكاريه فى الفصل (٧ــ٥) •

المنافسة الغير كاملة فى أسواق العوامل :

Imperfect Competition in Factor Markets

اعتبر وجود سوقا للعوامل حيث يتصرف فيه البائعون كمتنافسين كاملين وسوف تتحقق شروط (١١ــ١٠) لامثلية باريتو اذا ساوى كل مشترى للداخل input قيمة MP الخاص به الى سعر العامل :

$$pMP = r \qquad (١١ــ٢١)$$

فلو فشل واحد او اكثر من المشترين فى تحقيق (١١ــ٢١) فان التوزيع الناتج سوف لا يمثل امثلية باريتو فالشرط (١١ــ٢١) يتحقق عادة فى حالة المنافسه الكامله ولا يتحقق فى حالة المنافسه الغير كاملة بين المشترين •

فمحتكر الشراء monopolistic (راجع الفصل ٧ــ٤) يساوى بين قيمة MP بين MC للعامل الذى يكون اكبر من سعره ، وبهذا يخلق توزيعا لا يحقق امثلية باريتو ولقد تركنا للقارئ كتمرين ان يكون تحليلا لمحتكر الشراء المميز تماما موازيا للتحليل التى قدمناها وان يثبت ان التوزيع الناتج هو امثلية باريتو فجميع النظريات تقريبا لاحتكار الشراء احتكار القله يدخل فيها مساواة قيمة MP لبعض اشكال $\overline{MC}$ للداخل وبهذا لا يتحقق شرط (١١ــ٢١) •

فعالية (كفاءة) الاحتكار الثنائى : The Efficiency of Bilateral Monopoly

ان الاسواق التى ناقشناها حتى الان تحتوى على منافسة غير كاملة من جانب البائع ومنافسة كاملة من جانب المشترين او منافسه كاملة من جانب البائعين ومنافسه غير كاملة من جانب المشترين فالتعبير " الاحتكار الثنائى يغطى بالمعنى الواسع الاسواق

التى تكون المنافسه غير كاملة من كلا الجانبين ، من جانب البائعين والمشترين •

لقد غطينا حالة المشترى المحتكر وحالة البائع المحتكر فى الفصل (٨ــ٥) فحصيلة مثل هذه الاسواق تعتمد على قوة المساومة النسبيه للمشتركين ولقد اثبتنا فى الفصل (٨ــ٥) ان مستويات الداخل والخوارج سوف تكون متطابقه identical بتلك التى قد يتحصل عليها فى حالة المنافسه الكامله اذا حاول المحتكر والمحتكر المشترى الحصول على الحد الاعلى من ربحهما المشترك فتكون نتيجة ذلك توزيعا محققا امثلية باريتو اما طريقة توزيع ربحهم المشترك فانه غير مهم من وجهة نظر امثلية باريتو ، وبالرغم من انهما قد تكون مهمة بالنسبه لهما • ومن السهولة تعميم هذة النتيجه لتغطى الاسواق التى يكون فيها العدد الاجمالى للبائعين والمشترين اكبر من اثنين على شرط انهما يحصلا على الحد الاعلى من ربحهما المشترك •

١١ - ٤ التأثيرات الخارجية فى الاستهلاك والإنتاج :

EXTERNAL EFFECTS IN CONSUMPTION AND PRODUCTION

ان النتيجه التى تنص على ان المنافسه الكاملة تؤدى الى توزيعات امثلية باريتو تكون متوقفه على الافتراض بعدم وجود تاثيرات خارجيه فى الانتاج والاستهلاك ، اى ان مستوى المنفعة لاى مستهلك سوف لايعتمد على مستويات استهلاك الاخرين وان اجمالى التكلفه لكل مالك لاتعتمد على مستويات الخارج output للاخرين فقد لاتتحقق امثلية باريتو تحت شروط المنافسه الكامله وذلك اذا وحدت تاثيرات خارجيه فى الاستهلاك والانتاج •

دوال المنفعة المعتمدة على بعضها البعض : Interdependent Utility Functions

افترض ان مستوى منفعة احد المستهلكين يعتمد على استهلاك الاخر • فقد يزيد الايثار من متعة ورضا وقبول المستهلك i إذا ارتفع مستوى استهلاك المستهلك j وقد يكون لعامل " مجاراة الغير " تاثيرا مغايرا للايثار •

<u>مثـــــال :</u>

افترض انه يوجد اثنين من المستهلكين بحيث ان دالتى منفعتها :

$$U_1 = U_1(q_{11}, q_{12}, q_{21}, q_{22})$$
$$U_2 = U_2(q_{11}, q_{12}, q_{21}, q_{22})$$

حيث ان $q_{11} + q_{21} = q_1^0$ و $q_{12} + q_{22} = q_2^0$ فمن اجل الحصول على الحد الاعلى من منفعة المستهلك I تحت شرط ان منفعة المستهلك II تكون عند مستوى معين

مسبقا ، ثابتا $= U_2^0$ نكون الدالة التالية :

$$U_1^* = U_1(q_{11}, q_{12}, q_1^0 - q_{11}, q_2^0 - q_{12}) + \lambda[U_2(q_{11}, q_{12}, q_1^0 - q_{11}, q_2^0 - q_{12}) - U_2^0]$$

وبوضع الاشتقاقات الجزئيه مساويه لصفر ، نحصل على :

$$\frac{\partial U_1^*}{\partial q_{11}} = \frac{\partial U_1}{\partial q_{11}} - \frac{\partial U_1}{\partial q_{21}} + \lambda\left[\frac{\partial U_2}{\partial q_{11}} - \frac{\partial U_2}{\partial q_{21}}\right] = 0$$

$$\frac{\partial U_1^*}{\partial q_{12}} = \frac{\partial U_1}{\partial q_{12}} - \frac{\partial U_1}{\partial q_{22}} + \lambda\left[\frac{\partial U_2}{\partial q_{12}} - \frac{\partial U_2}{\partial q_{22}}\right] = 0$$

$$\frac{\partial U_1^*}{\partial \lambda} = U_2(q_{11}, q_{12}, q_1^0 - q_{11}, q_2^0 - q_{12}) - U_2^0 = 0$$

وكذلك نحصل على :

$$\frac{\partial U_1/\partial q_{11} - \partial U_1/\partial q_{21}}{\partial U_1/\partial q_{12} - \partial U_1/\partial q_{22}} = \frac{\partial U_2/\partial q_{11} - \partial U_2/\partial q_{21}}{\partial U_2/\partial q_{12} - \partial U_2/\partial q_{22}} \qquad (١١\text{—}٢٢)$$

وهذه المعادلة (١١ـ٢٢) هى شرط امثلية باريتو والتى تختلف عن (١١ـ٨) التى تنص على RCS للمستهلك I يجب ان يساوى RCS للمستهلك II فالمنافسة الكامله ينتج عنها (١١ـ٨) وليس (١١ـ٢٢) وبما ان الاشتقاقات الجزئيه لدالة المنفعة تكون بدلالة جميع المتغيران فان الوضع الامثل لكل مستهلك يعتمد على مستوى استهلاك الاخر • فعلى سبيل المثال ، افترض ان التاثير الخارجى فى حالة المستهلكين الاثنين هو : $\partial U_2/\partial q_{11} < 0$

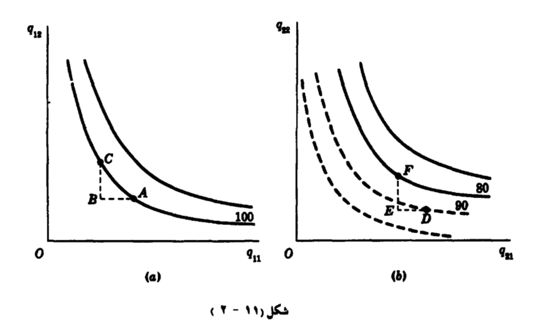
فتصبح معادلة (١١ـ٢٢) كالتالى :

$$\frac{\partial U_1/\partial q_{11}}{\partial U_1/\partial q_{12}} = \frac{\partial U_2/\partial q_{11} - \partial U_2/\partial q_{21}}{-\partial U_2/\partial q_{22}}$$

فيجب ان يكون RCS للمستهلك II (اكبر للتوزيع الامثل مما يكون عليه فى غياب التاثيرات الخارجيه •

ان من الممكن اثبات ان الشرط (١١ـ٨) لا يتطلب بالضرورة امثلية باريتو وذلك فى حالة وجود تاثيرات خارجيه وسوف نثبت هذا عن طريق الرسم البيانى التالى :

فالشكل (١١ـ١٢) و (١١ـ٢ب) يعطى منحنيات السواء للمستهلك I والمستهلك II على التوالى • افترض ان الوضع المبدئى للمستهلك I يكون ممثلا بنقطة A حيث انه يستهلك مجموعة السلع الممثلة بها هذه النقطة وان استهلاك II سوف يكون ممثلا بالنقطه F • فهاتين النقطتين والتى يتساوى عندهما RCS قد توصلنا اليهما



شكل (١١ - ٢)

بعملية الحصول على الحد الاعلى من المنفعة المنفرده بغض النظر عن التاثيـــــرات الخارجيه المحتمله افترض ان I غير متاثرا باستهلاك II وان مستوى منفعة II قـــد انخفض نتيجة لاستهلاك I كمية من Q_1 (وليس من Q_2) • ولقد رسمت منحنيـــات سواء II (المنحنيات الغير متقطعة) على افتراض ان استهلاك I يكون معطـــا بالنقطه A • ففي موضعي التوازن المنفرد لكل واحد منهما فان مؤشر المنفعـــة للمستهلك I يكون 100 وللمستهلك II يكون 80 والان لنفترض ان توزيع السلـع قد تغير بحيث ان اجمالي الكميات المستهلكه لم يتغير وان I تحرك الى C وان II تحرك الى D_1 فنجد ان مستوى المنفعة للمستهلك I لم يتغير بهذا النوزيع ولكـــن انخفاض استهلاكه من السلعة Q_1 غير مستوى منفعة II لكل مجموعة سلع استهلكـت من قبل الاخير : فتكون منحنيات سواء II بعد التغيير في استهلاك I معطـــاة بالمنحنيات المتقطعة في الشكل (١١ـ٢ب) •

ولقد ازداد مستوى منفعة II الى 90 لان موضعه الجديد هو عند نقطه D نقـــد نستنتج ان مستوى منفعة II قد يزداد بدون تخفيض لمستوى منفعة I ولذا فـــان مساواة RCS لاتضمن امثلية باريتو •

السلع العامة : Public Goods

يحدث نوعا مختلفا من التاثيرات الخارجيه عندما تستهلك السلع جماعيا فكل فرد من افراد المجتمع سوف يكتسب قناعة ورضا من الناتج الاجمالي للسلعة العامة ولايحـــدث انخفاض في قناعة ورضا اى فرد بما يكتسبه الاخر من القناعة والرضا والاستمتاع بهـــذه

السلعة العامه ، ولا يمكن لشخص واحد ان يحتكر الاستمتاع بهذه السلعة له شخصيا كما هو الحال فى حالة السلع العاديه •

فشروط امثلية باريتو المعطاة بالمعادلات فى (١١ـ٨) و (١١ـ١٠) لا تتحقق بالسلع العامه ، لذا فانه من الضرورى احداث شروط حديدة فلا نفقد شيئا هاما اذا افترضنا انه يوجد اثنين من المستهلكين ومنتج واحد ، وسلعة عاديه واحدة وسلعة عامة واحدة ، وعامل اولى واحد ، فتكون دالتى المستهلكين كالتالى :

$$U_i = U_i(q_{i1}, q_2, x_i^0 - x_i) \qquad i = 1, 2$$

حيث ان q_{i1} هى استهلاك السلعة العادية Q_1 من قبل المستهلك i و q_2 هى مجموع الخاج output للسلعة العامة Q_2, وان x_i^0 هى ما يمتلكه المستهلك i من العامل X وان x_i هى كمية العامل الاولى الذى فتكون دالة الانتاج الضمنيه هى :

$$F(q_1, q_2, x) = 0$$

حيث ان $q_1 = q_{11} + q_{21}$ تمثل خارج Q_1 وان $x = x_1 + x_2$ تمثل كمية X التى استخدمت فى الانتاج •

ونحصل على شروط امثلية باريتو بالحصول على الحد الاعلى من منفعة فافتراض ان منفعة فى مستوا مقررا سابقا وان دالة الانتاج قد تحققت • وبتكوين دالة لاقرانج :

$$Z = U_1(q_{11}, q_2, x_1^0 - x_1) + \lambda[U_2(q_{21}, q_2, x_2^0 - x_2) - U_2^0] + \theta F(q_1, q_2, x) + \delta(x_1 + x_2 - x) + \sigma(q_1 - q_{11} - q_{21})$$

حيث ان λ, θ, δ, σ يمثلون مضروبات لاقرانج التى لم تحدد بعد وبوضع الاشتقاقات الجزئيه للدالة Z مساوية لصفر :

$$\frac{\partial Z}{\partial q_{11}} = \frac{\partial U_1}{\partial q_{11}} - \sigma = 0 \qquad \frac{\partial Z}{\partial x_1} = -\frac{\partial U_1}{\partial(x_1^0 - x_1)} + \delta = 0$$

$$\frac{\partial Z}{\partial q_{21}} = \lambda\frac{\partial U_2}{\partial q_{21}} - \sigma = 0 \qquad \frac{\partial Z}{\partial x_2} = -\lambda\frac{\partial U_2}{\partial(x_2^0 - x_2)} + \delta = 0$$

$$\frac{\partial Z}{\partial q_2} = \frac{\partial U_1}{\partial q_2} + \lambda\frac{\partial U_2}{\partial q_2} + \theta\frac{\partial F}{\partial q_2} = 0 \qquad (١١ـ٢٣)$$

$$\frac{\partial Z}{\partial q_1} = \theta\frac{\partial F}{\partial q_1} + \sigma = 0 \qquad \frac{\partial Z}{\partial x} = \theta\frac{\partial F}{\partial x} - \delta = 0$$

ونفترض ان الاشتقاقات الجزئيه بالنسبه لمضروبات لاقرانج سوف تكون مساويه لصفر ايضا • ان المعادلة (١١ـ٨) بالنسبه للسلع العاديه تنص على انه يجب مساواة RCS لكل

مستهلك بـ RPT المقابلة لكل منتج وتتطلب (١١ـ٢٣) ان[1] :

$$\frac{\partial U_1/\partial q_2}{\partial U_1/\partial q_{11}}+\frac{\partial U_2/\partial q_2}{\partial U_2/\partial q_{21}}=\frac{\partial F/\partial q_2}{\partial F/\partial q_1} \quad (١١ـ٢٤)$$

ان مجموع RCS للسلعة Q_1 من اجل Q_2 للمستهلكين يجب ان تساوى RCS للسلعة Q_1 من اجل Q_2 فى الانتاج ولاتحتاج لمساواة RCS لكل مستهلك تخيل ان للمستهلك I والمستهلك II القيم التاليه لـ RCS ثلاثة واثنين للسلعة Q_1 لكل وحدة من Q_2 ولكن RPT للمنتج تكون اربعه وحدات من Q_1 لكل وحدة من Q_2 فنجد ان الشرط (١١ـ٢٤) لم يتحقق وان توزيع Q_1 و Q_2 لايمثل امثلية باريتو • فلو ان I و II تخلصا من ثلاثة وحدات ووحدتين من Q_1 على التوالى ، فان المنتج يستطيع زيادة خارج Q_2 باكثر من وحدة واحدة وبذلك تزداد مستويات المنفعة لكلا المستهلكين •

وتتطلب معادلات (١١ـ٢٣) ايضا ان :

$$\frac{\partial U_1/\partial q_2}{\partial U_1/\partial (x_1^0-x_1)}+\frac{\partial U_2/\partial q_2}{\partial U_2/\partial (x_2^0-x_2)}=-\frac{\partial F/\partial q_2}{\partial F/\partial x} \quad (١١ـ٢٥)$$

فمجموع الـ RCS للعامل X من اجل Q_2 يجب ان يساوى مقلوب الـ MP للعامل X فى انتاج Q_2 واخيرا بحل (١١ـ٢٣) من اجل

$$\frac{\delta}{\sigma}=\frac{\partial U_1/\partial (x_1^0-x_1)}{\partial U_1/\partial q_{11}}=\frac{\partial U_2/\partial (x_2^0-x_2)}{\partial U_2/\partial q_{21}}=-\frac{\partial F/\partial x}{\partial F/\partial q_1} \quad (١١ـ٢٦)$$

فالـ RCS للعامل X من اجل Q_1 لكل مستهلك يجب ان تساوى الـMP للعامل X فى انتاج Q_1 فالشرط (١١ـ٢٦) هو نفس الشرط (١١ـ١٠) •

فمن السهل تعميم تحاليل السلع العامه • فلو كان هناك اكثر من عامل اولى واحد فان (١١ـ٩) سوف تكون سارية المفعول : ان الـ RCS لجميع المستهلكين يجب ان تساوى الـ RTS لجميع المنتجين لكل زوج من العوامل الاوليه فلو وجد اكثر من سلعة عامة واحدة فان (١١ـ٨) سوف تكون ساريه المفعول : ان الـ RCS للمستهلكين يجب ان تساوى الـ RPT للمنتجين فلو كان هناك سلعتين عامتين فان اجمالى الـ RCS الخاص بهما ، والذى يمكن صياغته كنسبة أجمالى RCS لسلعة عامه اختيرت عشوائيا يجب ان يساوى الـ RPT الخاص بهما (راجع تمرين ١١ـ٤) •

---

(١) وبالتعويض بـ $\lambda=\sigma/(\partial U_2/\partial q_{21})$ و $\theta=-\sigma/(\partial F/\partial q_1)$ فى معادلة $\partial Z/\partial q_2$ وبالقسمة بـ $\sigma=\partial U_1/\partial q_{11}$ ثم باعادة تنظيم الحدود •

توازن لينداهل : Lindahl Equilibrium

ان السلع العامه لا تباع ولا تشترى فى السوق مثل السلع الاخرى العاديه ولا يستطيع مستهلك ان يتحصل على كمية من السلعه العامه خاصة به وحده دون غيره ولكن يمكن تصميم خطة ينتج عنها توازن فيما يشبه السوق "pseudo market" للسلعه العامه •

اعتبر اقتصادا مكونا من اثنين من المستهلكين ومنتج واحد ، وسلعة عاديه واحدة وسلعة عامه واحدة ، وعامل اولى واحد متوفرا بكمية ثابته ولا ينتج عنه اى متعة للمستهلكين • فتكون دالتى المنفعه كالتالى :

$$U_1 = U_1(q_{11}, q_2) \qquad U_2 = U_2(q_{21}, q_2) \qquad (١١_٢٧)$$

حيث ان Q_1 هى السلعة العادية وان Q_2 هى السلعة العامه فتكون دالة الانتاج :

$$F(q_1, q_2) - x^0 = 0 \qquad (١١_٢٨)$$

$$q_1 = q_{11} + q_{21} \qquad (١١_٢٩)$$

حيث ان $x^0 = x_1^0 + x_2^0$ هى كمية العامل الاولى الثابته وان x_1^0 ، x_2^0 هما الكميتان المحتفظ بهما المستهلكين • د ع لتكن p_1 سعر السوق للسلعة Q_1 وان p_2 السعر الذى يقبله المنتج لكل وحدة من وحدات السلعة العامة افترض ان I ، II قد حوسبا على اساس ان αp_2 و $(1-\alpha)p_2$ على التوالى لكل وحدة من وحدات السلعة العامة المنتجه حيث ان $0 < \alpha < 1$ د ع سعر العامل الاولى يساوى الوحدة للمستهلكين سوف يحصلا على الحد الاعلى من منفعتهما (١١_٢٧) تحت شرطى ميزانيتهما :

$$p_1 q_{11} + \alpha p_2 q_2 = x_1^0 \qquad p_1 q_{21} + (1-\alpha) p_2 q_2 = x_2^0 \qquad (١١_٣٠)$$

وسوف يساوى نسبة السعر المدرك perceived price الى الـ RCS الخاص بهما :

$$\frac{\alpha p_2}{p_1} = \frac{\partial U_1/\partial q_2}{\partial U_1/\partial q_{11}} \qquad \frac{(1-\alpha)p_2}{p_1} = \frac{\partial U_2/\partial q_2}{\partial U_2/\partial q_{21}} \qquad (١١_٣١)$$

وباضافة معادلتى (١١_٣١)

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{\partial U_1/\partial q_2}{\partial U_1/\partial q_{11}} + \frac{\partial U_2/\partial q_2}{\partial U_2/\partial q_{21}} \qquad (١١_٣٢)$$

فالمنتج يحاول الحصول على الحد الاقصى من ربحه بحيث ان x^0 معتبرة ثابته تحت الشرط المعطى بالمعادلة (١١_٢٨) وبهذا فانه سوف يساوى نسبة السعر بـ RPT الخاص به :

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{\partial F/\partial q_2}{\partial F/\partial q_1} \qquad (١١_٣٣)$$

ويتبع من (١١ـ٣٢) و (١١ـ٣٣) ان (١١ـ٨) قد تحققت وان امثلية باريتو للتوزيع قد تحققت • فالنظام المكون من المعادلات من (١١ـ٢٨) الى (١١ـ٣٣) يحتوى على سبع معادلات مستقله بها سبعة متغيرات :

$$(1)\ \alpha,\ q_1,\ q_2,\ q_{11},\ q_{21},\ p_1,\ p_2$$

وتمثل قيم الحل توازن ليند اهل •

ويمكن النظر فى العملية السابقة بطريقة بديله كالتالى • نستخدم الحصول على الحد الاعلى من المنفعة لاشتقاق دوال الطلب للسلع :

$$f_{21}[p_1, (1-\alpha)p_2],\ f_{12}(p_1, \alpha p_2),\ f_{11}(p_1, \alpha p_2),\ f_{22}[p_1, (1-\alpha)p_2]$$

حيث ان f_{ij} هى طلب المستهلك i من السلعة j ونشتق دوال عرض المنتج من الحصول على الحد الاعلى من الربح وهما •

$$g_1(p_1, p_2),\ g_2(p_1, p_2).$$

ويتطلب التوازن فى السوق للسلعة العادية ان :

$$f_{11}(p_1, \alpha p_2) + f_{21}[p_1, (1-\alpha)p_2] = g_1(p_1, p_2) \qquad (١١ـ٣٤)$$

والتوازن فيما يشبه السوق للسلعة العامه يتطلب ان :

$$f_{12}(p_1, \alpha p_2) = f_{22}[p_1, (1-\alpha)p_2] = g_2(p_1, p_2) \qquad (١١ـ٣٥)$$

حيث أن المتساويه الأولى تعبر عن المتطلب بأن كل مستهلك سوف يستهلك نفس الكميه من السلعه العامه وان المتساويه الثانيه تعبر عن المتطلب بان الكميه المطلوبه تساوى الكميه المعروض • وتحدد المعادلات الثلاثه فى (١١ـ٣٤) وفى المعادلة (١١ـ٣٥) المتغيرات p_1 ، p_2 ، α ومن ثم تحدد الكميات من الـ f_{ij} •

مثال : افترض ان دوال المنفعة والانتاج هم :

$$U_1 = q_{11}^{0.5} q_2 \qquad U_2 = q_{21}^2 q_2 \qquad q_1^2 + q_2^2 - x^0 = 0$$

وافترض ايضا أن $x^0 = 1600$ مع $x_1^0 = 128$ و $x_2^0 = 1472$ فتكون معادلات (١١ـ٢٨) الى (١١ـ٣٣) المستقله :

$$q_1^2 + q_2^2 = 1600 \qquad q_1 = q_{11} + q_{21}$$

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{q_2}{q_1} \qquad \frac{\alpha p_2}{p_1} = \frac{2q_{11}}{q_2} \qquad \frac{(1-\alpha)p_2}{p_1} = \frac{q_{21}}{2q_2}$$

$$p_1 q_{11} + \alpha p_2 q_2 = 128 \qquad p_1 q_{21} + (1-\alpha) p_2 q_2 = 1472$$

---

(١) ان المعادلة (١١ـ٣٢) والتى هى مجموع اثنين من المعادلات الاخرى ليست مستقله •

فقد يثبت القارئ ان هذا النظام يمتلك الحل التالى :

$$q_1 = 32 \qquad q_{11} = 1\frac{1}{3} \qquad q_{21} = 30\frac{2}{3}$$
$$q_2 = 24 \qquad p_1 = 32 \qquad p_2 = 24 \qquad \alpha = \frac{4}{27}$$

وفورات خارجية وزيادات فى نفقات الإنتاج

External Economies and Diseconomies

لقد اثبتنا ان $p = MC$ رطا ضروريا لامثلية باريتو فى قطاع الانتاج . فمساواة السعر بالتكلفه الحديه لجميع السلع والوحدات الانتاجيه يتطلب ان الـRPT المقابله للوحدات المختلفه لابد وان تكون نفس الشئ ويقيس الـ RPT (وهو عبارة عن ميل منحنى التحويل) تكلفة الفرصه البديله opportunity cost او التضحيه الحقيقيه بالنسبه للفرص الضائعة لانتاج وحدة اضافيه من السلع فحتى الان تعتبر تكلفة الفرصه البديله هذه حاجة داخليه للوحدة الانتاجيه فمن اجل انتاج وحدة اضافيه من السلعه Q_j فان الوحدة لابد وان تضحى بانتاج عدد معين من وحدات Q_k فالمقياس النسبى للتضحيه من وجهة نظر المجتمع يكون فى عدد وحدات Q_k التى يتخلى عنها المجتمع من اجل انتاج وحدة اضافية من Q_j فتكلفة الفرصه البديله هى نفسها من وجهة النظر الخاصة والعامه وذلك فى غياب الوفورات الخارجيه والزيادات فى نفقات الانتاج فلو ان مثل هذه التأثيرات الخارجيه موجودة فى فلك الانتاج فانه يجب ان ناخذ بالحسبان الاعتماد المتداخل بين تكلفات الوحدة i وخارج الوحدة h (راجع الفصل ٦ــ٣) .

مثال : افترض على سبيل التبسيط انه يوجد وحدتين للانتاج فقط وان دالتى الانتاج لهما :

$$C_1 = C_1(q_1, q_2) \qquad C_2 = C_2(q_1, q_2) \qquad (١١ـ٣٦)$$

حيث ان q_1 و q_2 يمثلان مستوى الخارجين . وتعبر دالتى الانتاج (١١ـ٣٦) عن وجود تأثيرات خارجيه فاذا قامت كل وحدة بمحاولة الحصول على الحد الاعلى من ربحهما بطريقة انفراديه فان السعر سوف يساوى MC او .

$$p = \frac{\partial C_1}{\partial q_1} \qquad p = \frac{\partial C_2}{\partial q_2}$$

فربح كل وحدة من الوحدات يعتمد على مستوى الخارج للوحدة الاخرى ، ولكن لايستطيع اى منهما ان يؤثر على خارج الاخر ، ولهذا فان كلا منهما يحاول الحصول على الحد الاعلى من ربحه هو بالنسبه للمتغير تحت سيطرته وتحكمه .

يمكن قياس الرفاهيه المرتبطه بالانتاج بالفرق بين الفائدة الاجتماعيه التى انشأت

والتكلفه الاجتماعيه التى تحملها المجتمع • فيمكن قياس الفائدة الاجتماعيه الناتجـه من $q_1 + q_2$ وحدة من السلع بأجمالى الايرادات $p(q_1 + q_2)$ وهذا يعنى معن الكميه التى يرغب المستهلكون فى دفعها للحصول على الخارج وتقاس التكلفات الاجتماعيه بمجموع التكلفات التى تحملها كلا من المالكين المنتجين للسلعة •

$$C_1(q_1, q_2) + C_2(q_1, q_2).$$

فمن اجل الحصول على امثلية باريتو فانه يجب الحصول على الحد الاعلى من الارباح المشتركه للمالكين بافتراض انه ليس لاى منهما القدرة على التأثير على الاسعار •

$$\pi = \pi_1 + \pi_2 = p(q_1 + q_2) - C_1(q_1, q_2) - C_2(q_1, q_2)$$

وبوضع الاشتقاقات الجزئيه المساوية لصفر :

$$\frac{\partial \pi}{\partial q_1} = p - \frac{\partial C_1}{\partial q_1} - \frac{\partial C_2}{\partial q_1} = 0 \qquad (١١\text{—}٣٧)$$

$$\frac{\partial \pi}{\partial q_2} = p - \frac{\partial C_1}{\partial q_2} - \frac{\partial C_2}{\partial q_2} = 0$$

ويتطلب شروط الدرجه الثانيه بان تكون العوامل الرئيسيه الصغيرة لمصفوفة هيســيان متبادلة فى الاشارة (اى + و — او — و +) •

$$\begin{vmatrix} -\frac{\partial^2 C_1}{\partial q_1^2} - \frac{\partial^2 C_2}{\partial q_1^2} & -\frac{\partial^2 C_1}{\partial q_1\, \partial q_2} - \frac{\partial^2 C_2}{\partial q_1\, \partial q_2} \\ -\frac{\partial^2 C_1}{\partial q_1\, \partial q_2} - \frac{\partial^2 C_2}{\partial q_1\, \partial q_2} & -\frac{\partial^2 C_1}{\partial q_2^2} - \frac{\partial^2 C_2}{\partial q_2^2} \end{vmatrix}$$

وهذه الشروط تتطلب بأن يكون :

$$\frac{\partial^2 C_1}{\partial q_1^2} + \frac{\partial^2 C_2}{\partial q_1^2} > 0 \qquad \frac{\partial^2 C_1}{\partial q_2^2} + \frac{\partial^2 C_2}{\partial q_2^2} > 0$$

فالاشتقاقات الجزئيه $\partial C_1/\partial q_1$ و $\partial C_2/\partial q_2$ يمثلان التكلفات الحديه الخاصه ***private* marginal costs** لانها تقيس معدل زيادة اجمالى تكلفة المالك المنفرد وذلك كلما زاد مستوى الخارج الخاص به • فمحاولة الحصول على الحد الاعلى لكل مالك على انفراد تتطلب مساواة السعر بالتكلفه الحديه الخاصة وانها فى ازدياد وتمثل المجموعتان :

$$\partial C_1/\partial q_2 + \partial C_2/\partial q_2 \quad ، \quad \partial C_1/\partial q_1 + \partial C_2/\partial q_1$$

التكلفات الحديه الاجتماعيه لانها تقيس معدل زيادة تكلفة الصناعه كلما ازداد مســتوى خارج وحدة الوحدات المكونه لهذه الصناعه • وتتطلب امثلية باريتو بان يساوى السـعر للتكلفة الحديه الاجتماعية لكل مالك وان هذه التكلفه الحديه الاجتماعية فى تزايد ويضمن مساواة التكلفه الحديه الاجتماعيه بالسعر بان RCS للمستهلك سوف لا يساوى RPT لكل

وحدة منفرده ولكن يساوى RPT للمجتمع لان نسبة التكلفات الحديه الاجتماعيه تعمل على قياس البدائل الضائعه بسبب انتاج وحدة اضافيه من السلعه وذلك من وجهة نظـــــر المجتمع •

افترض الان ان الوحدة I تمارس وفورات خارجيه وأن الوحدة II تمارس زيـادة فـى نفقات الانتاج فيترتب على أن $\partial C_1/\partial q_2 < 0$ وأن $\partial C_2/\partial q_1 > 0$. ونتيجــة لـذلك فـان $\partial C_1/\partial q_1 + \partial C_2/\partial q_1$ فى (١١ــ٣٧) يمكن عطها لتساوى السعر فقط اذا كان $\partial C_1/\partial q_1$ اصغر من لو انها كانت تحت حالة الحد الاقصى من الربح المنفردة • وبزيــادة MC نعنى ان الوحدة الانتاجيه المتسببه فى وجود زيادة النفقات للانتاج يجب ان تنتـــج مستوا من الخارج اقل للحصول على الحد الاعلى من الرفاهيه عنه فى حالة الحد الاقصى المفرده وبتعليل مشابه فان على الوحدة المسببه للوفورات الخارجيه يجب ان تزيـــد من خارجها ويمكن تحقيق هذه التغيرات فى الخارج وذلك بفرض الضرائب المناســـــبه والتعويضات لمستويات لخارج للوحدة تحت البحث •

مثال : أفترض ان دالتى التكلفه للوحدتين هما :

$$C_1 = 0.1q_1^2 + 5q_1 - 0.1q_2^2 \qquad C_2 = 0.2q_2^2 + 7q_2 + 0.025q_1^2$$

فالوحدة I تمارس وفورات خارجيه وانها السبب فى زيادة نفقات الانتاج والعكس صحيح للوحدة II افترض ان السعر = 15 ريالا وبوصفه مساويا لـ MC لكلا الوحدتين :

$$15 = 0.2q_1 + 5 \qquad q_1 = 50 \qquad \pi_1 = 290$$
$$15 = 0.4q_2 + 7 \qquad q_2 = 20 \qquad \pi_2 = 17.5$$

ومن أجل امثلية باريتو تكون دالة الربح المشترك :

$$\pi = 15(q_1 + q_2) - 0.125q_1^2 - 5q_1 - 0.1q_2^2 - 7q_2$$

ثم نضع الاشتقاقات الجزئيه مساويه لصفر :

$$\frac{\partial \pi}{\partial q_1} = 15 - 0.25q_1 - 5 = 0$$
$$\frac{\partial \pi}{\partial q_2} = 15 - 0.20q_2 - 7 = 0$$

ففى هذه الحالة تكون : $q_1 = 40 \qquad q_2 = 40 \qquad \pi = 360$

وعلى القارىء ان يثبت تحقيق شروط الدرجه الثانيه فمجموع الارباح فى هذه الحالة أكبر من حالة الحد الاقصى المنفرده •

$$290 + 17.5 = 307.5 < 360$$

فالحصول على الحد الاقصى فى حالة الانفراد يه لايحقق امثلية باريتو ولا يضمنها فامثلية باريتو تتطلب ان الـ RCS يساوى المعدل الذى يستطيع عنده المجتمع من تحويل سلعة الى سلعة اخرى ففى غياب التأثيرات الخارجية الوفورات والزيادات فان معدلات تحويل الانتاج الخاصة والاجتماعيه تكون متطابقة أما فى حالة وجود هذه التأثيرات الخارجيه (الوفورات وزيادة النفقات) فان الحصول على الحد الاعلى فى الحالات الانفراديه سوف ينتج عنه تحقيق الشروط الحديه الخاطئه للمجتمع والغير مناسبه •

وبالطبع فانه يجب اعادة توزيع اجمالى الارباح بين الوحدات منفرده وبدون اعادة التوزيع هذه فان بعض الوحدات سوف يمر بظروف تخفض من ارباحه وتكون النتيجه غير مرضيه اجتماعيا ففى المثال الحالى ، تتحصل الوحده I على 400 ريال بينما تتحصل الوحده II على 40– ريال كنتيجة للحصول على الحد الاعلى المشترك فاية اعادة توزيع لاى مبلغ اكبر من 57.5، ولكن أصغر من 110 من وحدة I الى وحدة II سوف يترك كل واحد منهما احسن حالا من حالة الحصول على الربح منفردا •

١١ – ٥ الضرائب والاعانات المالية TAXES AND SUBSIDIES

يحتوى الفصلان (١١–٣) و (١١–٤) على أمثلة عديدة توضح الحالات التى يكون فيها اقتصاديات السوق قد حادت عن الشروط الحديه الضروريه لامثلية باريتو فمثل هذه الاقتصاديات يمكن ان تعود الى امثلية باريتو وذلك من خلال فرض الضرائب المناسبه والاعانات الماليه فالضرائب على كل وحده Per unit taxes (او الاعانات) سوف تخفض (او تزيد) من مستويات النشاطات الاستهلاكيه الانتاجيه وذلك بزيادة (او بنقصان) تكلفاتهم الحديه هذا اذا كانت التكلفات الحديه فى أزدياد فلو رافق هذا ضرائب المرة الواحده lump-sum taxes والاعانات ، والتى لاتوءثر على مستويات النشاطات فانه قد نستخدم لتوزيع المكاسب من التحرك فى اتجاه امثلية باريتو للتوزيع •

ان تحقيق أمثلية باريتو من خلال فرض الضرائب تتمثل فى حالتين معينتين : التأثيرات الخارجيه فى الانتاج والاحتكار • ولقد صممت الضرائب على الوحدات والاعانات لتقود المشتركين فى السوق لملاحظة الشروط الحديه المرغوبه اما ضرائب الدفعة الواحدة والاعانات فقد صممت لكى تترك المستهلكين والمنتجين عند المنفعه الاوليه ومستويات الربح ومن ثم اثبتنا ان صافى أيرادات الضرائب الموجبه تمدنا بالعوائد dividends الاجتماعيه التى يمكن أستخدامها لزيادة المنفعة لفرد واحد أو أكثر .

من افراد المجتمع

التأثيرات الخارجية فى الإنتاج : External Effects in Production

ان من الممكن تحقيق امثلية باريتو فى حالة وجود تأثيرات خارجيه وكذلك بفرض اعانات ماليه للوحدات لزيادة خوارج الوحدات الانتاجيه المولده للوفورات الخارجيه ، وبفرض ضرائب لتخفيض الانتاج للوحدات التى تولد زيادة فى نفقات الانتاج وبالعوده الى مثال الوحدتين الانتاجيتين المقدم فى الفصل ١١ــ٤ فامثلية باريتو تتحدد بمساواة التكلفه الحديه الاجتماعية لكل وحدة بسعر التنافس •

$$0.25q_1^* + 5 = 15 \qquad q_1^* = 40 \qquad \pi_1^* = 400$$
$$0.20q_2^* + 7 = 15 \qquad q_2^* = 40 \qquad \pi_2^* = -40$$

افترض اننا فرضنا ضريبه مقدارها t على كل وحدة من وحدات خوارج الوحدة الانتاجيه I واننا فرضنا اعانه ماليه قدرها s من الريالات لكل وحده من وحدات خوارج II افترض كذلك ان كل وحده من وحدات الانتاج تستمر بمساواة تكلفتهما الحديه الخاصه بسعر التنافس :

$$0.2q_1 + 5 + t = 15 \qquad 0.4q_2 + 7 - s = 15 \qquad (١١ــ٣٨)$$

فالضرائب والاعانات قد صممت لتحقيق امثلية باريتو بالنسبه للخوارج وبتعويض $q_1 = 40$ و $q_2 = 40$ فى (١١ــ٣٨) نجد ان القيم المناسبه للضريبه والاعانة الماليه هما : $t = 2$ و $s = 8$ وبفرض ضرائب الجمله L_1 و L_2 وكذلك لكى نترك ارباح الوحدات الانتاجيه عند مستوياتها الاوليه :

$$L_1 = \pi_1^* - \pi_1^0 - tq_1^* = 30$$
$$L_2 = \pi_2^* - \pi_2^0 + sq_2^* = 262.5$$

وبما ان الارباح ستظل بدون تغيير ، فان مستويات المنفعة لاولئك الذين تحصلوا على الارباح سوف لاتتغير بهذا التحرك نحو امثلية باريتو ونعرف العوائد (الارباح) الاجتماعية *social dividend* بانها عوائد الضريبه الصافى :

$$S = tq_1^* - sq_2^* + L_1 + L_2 = 52.5$$

فهذه العوائد الاجتماعيه قد تستخدم لرفع مستويات المنفعة لعضو او اكثر من اعضاء المجتمع •

الاحتكار : Monopoly

اعتبر وجود اقتصاد يحتوى على محتكر واحد يقوم بانتاج السلعه المنتجه Q وانه

هو السبب الوحيد للانحراف من امثلية باريتو فتكون دالتى الطلب والتكلفة لهذا المحتكر كالتالى : $p = f(q)$ $C = C(q)$

فيمكن تحديد سعره وخارجه الذى يحصل على الحد الاعلى من الربح وهما p^0, q^0 بمساواة MR لـ MC :

$$p^0 + q^0 f'(q^0) = C'(q^0) \qquad (\text{١١ــ٣٩})$$

فيكون توازنه كما تصوره النقطه E فى الشكل (١١ــ٣) فنجد ان سعر المحتكر يكون عاليا جدا وان الكميه التى ينتجها قليلة جدا لتحقيق امثلية باريتو لان سعر وكمية امثلية باريتو p^*, q^* تتحددان بمساواة السعر و MC :

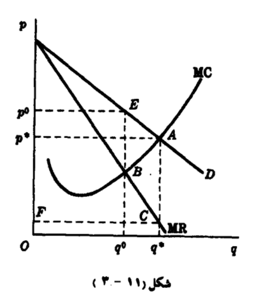
$$p^* = C'(q^*) \qquad (\text{١١ــ٤٠})$$

والتى تحدث عند نقطة A فى الشكل (١١ــ٣) فاى اعانه ماليه للمحتكر سوف ترتفع من MR الخاص به وقد تستخدم لدفعة لتوسيع خارجه الى المستوى المطلوب من امثلية باريتو • فيكون شرط التوازن الملائم :

$$p^* + q^* f'(q^*) + s = C'(q^*) \qquad (\text{١١ــ٤١})$$

وبحل (١١ــ٤١) لقيمة s بالاستفادة من (١١ــ٤٠) وتعريف MR :

$$s = -q^* f'(q^*) = p^* - \text{MR}^*$$



شكل (١١ - ٣)

فالاعانات الماليه المطلوبه تساوى الفرق بين السعر و MR وذلك عند خارج امثلية باريتو ، وهى المسافه CA فى الشكل (١١ــ٣) فمنحنى MR الفعال للمحتكر سوف يتزحزح الى اعلى حتى يتقاطع مع منحنى الطلب الاصلى عند نقطة A •

أن مجموع الاعانه الماليه تعطيه مساحة المستطيل $FCAp^*$ فى الشكل (١١ ــ ٣) وتعطينا المساحه الواقعه تحت منحنى MC بين هذه الذوارج لزيادة فى تكلفة المحتكر للتحرك من q^* الى q^0 اما الزيادة فى ايراداته من المبيعات فانه تعطيه المساحه المقابلة الواقعة تحت منحنى MR والانخفاض فى ربحه يكون ممثلا بالمساحه CAB والتى تقع بين منحنى MC و MR وعلى وجه العموم •

$$\pi^0 - \pi^* = \int_{q^0}^{q^*} [f(q) + qf'(q) - C'(q)]\, dq$$

وواضح من الشكل (١١ ــ ٣) ان الاعانه الماليه تفوق الانخفاض فى الربح ففرض ضريبه الجمله المساوى للمساحه $FCBAp^*$ سوف يترك ربح المحتكر عند مستواه المبدئى وعموما تكون ضريبة الجملة L_M كالتالى :

$$L_M = \pi^* - \pi^0 + sq^*$$

وتساوى التكلفه الصافيه للتحرك فى اتجاه خارج أمثلية باريتو فوارق ربح المحتكر وسوف يظل العائد الاجتماعى مستمرا أذا واصلنا الحصول على الضرائب من المستهلكين بكميات اكبر بدون تخفيضات فى المنفعة •

افترض ان مرونة الدخل لطلب السلعة تحت الاعتبار تساوى صفرا لكل مستهلك ففى هذه الحالة سوف ينطبق منحنى الطلب العادى على منحنى الطلب التعويضى والذى يمر من خلال نقطة توازن المحتكر (راجع الفصل ٢ ــ ٣) وتعطى المساحة تحت منحنى الطلب من q^0 الى q^* الكميه التى يستطيع المستهلك دفعها طالما يكون محافظا على مستويات المنفعة التى حققها تحت حالة الاحتكار (راجع الفصل ٣ ــ ٧) وتعطى المساحه المقابلة تحت منحنى MR الكميه الفعليه التى يدفعها للتحرك من q^0 الى q^* فالمساحه الواقعة بين منحنى الطلب ومنحنى MR تكون هى مجموع ضرائب الجملة L_C التى يمكن تحصيلها من المستهلكين وذلك بتركهم عند مستويات المنفعة المبدئيه •

$$L_C = \int_{q^0}^{q^*} [-qf'(q)]\, dq$$

ويكون العائد الاجتماعى المقابل هو صافى الضريبه المتحصل عليها من المستهلكين والمنتج :

$$S = L_C + L_M - sq^*$$

ولقد اثبت الشكل (١١ ــ ٣٣) أن العائد الاجتماعى يكون موجبا دائما فى حالة الاحتكار • وتعطى المساحة $BCAE$ ضرائب الجمله للمستهلكين وتعطى المساحة BCA صافى الدفع المدفوعة للمحتكر ، وتعطى المساحة BAE العائد الاجتماعى والذى يسمى بعض الوقت " بخسارة الوزن الميت *dead-weight loss* وذلك بسبب الاحتكار •

فافترض مرونات دخل صفرية لا يكون ضروريا لتأمين عائد اجتماعى موجب افترض ان لكل مستهلك مرونة دخل موجبه فتخفيض سعر Q سوف يكون له تأثيرات ايجابيه داخليه وان المستهلكين سوف يدفعون ضرائب جملة تعطيها المساحة $BCAE$ وان العائد الاجتماعى BAE يمكن تحقيقه وانه بالاضافه الى ماسبق فان كل مستهلك سوف يكون على مستوى من المنفعة اعلى من المستوى الذى بدا به •

مثال : افترض ان دالتى التكلفه والطلب للمحتكر هما كالتالى :

$$p = 240 - 8q \qquad C = 2q^2$$

وبمساواة MR و MC •

$$240 - 16q^0 = 4q^0 \qquad q^0 = 12 \qquad p^0 = 144$$
$$MR^0 = MC^0 = 48 \qquad \pi^0 = 1440$$

ونحصل على سعر وكمية امثليه باريتو بوضع السعر مساويا لـ MC :

$$240 - 8q^* = 4q^* \qquad q^* = 20 \qquad p^* = MC = 80$$
$$MR^* = -80 \qquad \pi^* = 800$$

انه من الممتع ان نلاحظ ان MR يكون سالبا لحل امثلية باريتو فى هذه الحالة وتكون وحدة الاعانه الماليه القصوى وضريبة الجملة :

$$s = p^* - MR^* = 160 \qquad L_M = \pi^* - \pi^0 + sq^* = 2560$$

افترض ان لجميع المستهلكين مرونات دخل صفرية بالنسبه للسلعة Q وتكون ضرائب الجمله والعائد الاجتماعى :

$$L_C = \int_{12}^{20} 8q\,dq = (4)(20)^2 - (4)(12)^2 = 1024$$
$$S = L_C + L_M - sq^* = 384$$

١١ – ٦ دوال الرفاهية الاجتماعية : SOCIAL WELFARE FUNCTIONS

ان تحديد التوزيعات القصوى اجتماعيا للموارد يتطلب مقارنات واضحه لمستويات المنفعة لافراد المجتمع المختلفين • فمن الضرورى ان تعرف عما اذا كان التغير الناتج من كسب بعض الاشخاص وخسارة البعض مطلوبا ام لا • ولا تكون امثلية باريتو كافيه لهذا الغرض ولكن مثل هذه القرارات يمكن اتخاذها وذلك بعد تقديم دالة الرفاهيه الاجتماعية بوضوح وكخطوة معترف بها يمكن وضع الرفاهية الاجتماعيه بدلالة مستويات المنفعة لجميع

الاعضاء فقد تكون الرفاهيه الاجتماعية مؤشرا ترتيبيا ولكن المنافع الفرديه يجب ان تكـون قياسيه ولو بالمعنى انها فريدة ماعدا للاصل ومقياس الوحدات فنمط دالة الرفاهيــــه الاجتماعيه ليس فريدا ولكنها تعتمد على التحكمات التقييمية لمن كونها فيمكن اشتقاقها من الراى العام او يمكن فرضها بطريقة ديكتاتوريه •

ففي هذا الفصل ، نستعرض اولا ، خواص الامثليات الاجتماعيه بافتراض وجود دالـة الرفاهيه الاجتماعيه ثم نستعرض ، ثانيا تحديد دوال الرفاهيه الاجتماعيةعلى ضوء نظريـة ارو الاستحالبه Arrow impossibility theorem واخيرا نستعرض تحاليل المنفعة الشخصيـة الداخليه interpersonal utility لنمط معين لدالة الرفاهيه الاجتماعيه :

تحديد أمثلية الرفاهية : Determination of a Welfare Optimum

افترض انه يوجد دالة رفاهيه اجتماعيه على النمط العام•

$$W = W(U_1, U_2, \ldots, U_n) \qquad (١١\text{ـ}٤٢)$$

حيث ان U_i هى مؤشر مستوى المنفعة للمستهلك i ولنفترض ان المجتمـع مكـون من شخصين اثنين فقط ولهما دالتى المنفعة :

$$U_1 = U_1(q_{11}, q_{12}, x_1^0 - x_1) \qquad U_2 = U_2(q_{21}, q_{22}, x_2^0 - x_2)$$

حيث ان q_{ij} هى الكميـة التى يستهلكها الفرد (i) من السلعة(j) وان x_i هى كمية العمل التى قام بها الفرد (i) • افترض ان دالة انتاج المجتمع هى :

$$F(q_{11} + q_{21}, q_{12} + q_{22}, x_1 + x_2) = 0 \qquad (١١\text{ـ}٤٣)$$

وافترض اخيرا ان دالة الرفاهيه الاجتماعيه هى :

$$W = W(U_1, U_2) \qquad (١١\text{ـ}٤٤)$$

يهدف المجتمع هو الحصول على الحد الاعلى من (١١ــ٤٤) تحت الشرط المعطـى بالمعادلة(١١ــ٤٣) فتكون الدالة :

$$W^* = W[U_1(q_{11}, q_{12}, x_1^0 - x_1), U_2(q_{21}, q_{22}, x_2^0 - x_2)] + \lambda F(q_{11} + q_{21}, q_{12} + q_{22}, x_1 + x_2)$$

وبوضع الاشتقاقات الجزئيه لهذه الدالة مساوية لصفر :

$$\frac{\partial W^*}{\partial q_{11}} = W_1 \frac{\partial U_1}{\partial q_{11}} + \lambda F_1 = 0$$

$$\frac{\partial W^*}{\partial q_{12}} = W_1 \frac{\partial U_1}{\partial q_{12}} + \lambda F_2 = 0$$

$$\frac{\partial W^*}{\partial x_1} = -W_1 \frac{\partial U_1}{\partial (x_1^0 - x_1)} + \lambda F_3 = 0$$

$$\frac{\partial W^*}{\partial q_{21}} = W_2 \frac{\partial U_2}{\partial q_{21}} + \lambda F_1 = 0$$
$$\frac{\partial W^*}{\partial q_{22}} = W_2 \frac{\partial U_2}{\partial q_{22}} + \lambda F_2 = 0$$
$$\frac{\partial W^*}{\partial x_2} = -W_2 \frac{\partial U_2}{\partial (x_2^0 - x_2)} + \lambda F_3 = 0 \qquad (١١\text{—}٤٥)$$
$$\frac{\partial W^*}{\partial \lambda} = F(q_{11} + q_{21}, q_{12} + q_{22}, x_1 + x_2) = 0$$

ويمكن افتراض ان النظام المعطى بالمعادلات السبعة فى (١١ــ٤٥) يمكن ايجاد حل المتغيراته السبعه • فيمكن تحديد امثلية الرفاهية بصورة كاملة كنتيجة لتقديم التحكيمات التقييميه للتوزيع على شكل دالة الرفاهيه الاجتماعيه • (١) ومن السهل اثبات ان توزيع الموارد الناتج يمثل امثلية باريتو فاذا حركنا الحدود الثانيه للمعادلات السته الاولى فى (١١ــ٤٥) الى اليمين ثم قسمنا المعادلة الاولى بالثانيه والثالثه والرابعة بالخامسه والسادسة على التوالى :

$$\frac{\partial U_1/\partial q_{11}}{\partial U_1/\partial q_{12}} = \frac{F_1}{F_2} = \frac{\partial U_2/\partial q_{21}}{\partial U_2/\partial q_{22}} \qquad \frac{\partial U_1/\partial q_{11}}{\partial U_1/\partial (x_1^0 - x_1)} = \frac{F_1}{F_3} = \frac{\partial U_2/\partial q_{21}}{\partial U_2/\partial (x_2^0 - x_2)}$$

فـ RCS تكون هى نفسها لكل المستهلكين وتساوى RPT المقابلة لهـا فالمعدل الذى يعوض به المستهلكون وقت الفراغ (ضد العمل) من اجل السلع يساوى MP للعمل • فهذا يثبت امثلية باريتو لو تحققت شروط الدرجه الثانيه •

ما يفضله المجتمع وما هو على سواء بالنسبة له :

Social Preference and Indifference

لقد بذل الاقتصاديون مجهودا طيبا فى خلق مايشبه منحنيات السواء الخاصة بالافراد لحالة المجتمع • ولقد حاولوا فى اشتقاق خطوط الارغاعات المتساوية contour lines فى فضاء السلع والذى يمثل مجموعات بديله ومختلفه لكميات السلع بين المجتمع ككل • فنشتق خطوط الارغاعات المتساويه لسيتوفسكى *Scitovsky contours* كمايلى • افترض ان جميع الافراد يتمتعون بمستويات منفعة معينه وان خوارج جميع السلع ، ما عدا سلعة واحدة ، تكون عند مستويات معينه • ثم نحدد اصغر كميه من السلعة المتبقيه والضروريه لمواجهة التحديدات السابقة • فالمساله الان هى الوضع الرياضى لاقتصاد مكون من شخصين وسلعتين ، ويمكن التعبير عنه بما يلى : نحاول الحصول على الحد الادنى من : Minimize

$$q_{11} + q_{21}$$

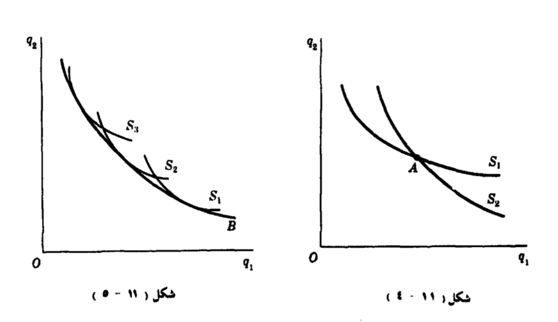
وذلك تحت الشروط التاليه :

$$U_1(q_{11}, q_{12}) - U_1^0 = 0$$
$$U_2(q_{21}, q_{22}) - U_2^0 = 0$$
$$q_{12} + q_{22} = q_2^0$$

فيمكن حل هذه المساله بتكوين الدالة التاليه :

$$V = q_{11} + q_{21} + \lambda_1[U_1(q_{11}, q_{12}) - U_1^0] + \lambda_2[U_2(q_{21}, q_2^0 - q_{12}) - U_2^0] \quad (١١ـ٤٦)$$

حيث ان λ_1 λ_2 هما مضروبا لاقرانج وبوضع الاشتقاقات الجزئيه بالنسبـــــــــه لى q_{11}, q_{12}, q_{21} ، λ_1 ، λ_2 مساويه لصفر ، نجد ان اجمالى كمية Q_1 الادنـــــى والضروريه لتحقيق شروط هذه المساله تكون عامة محددة determinate (اى يمكن تحديدها) لانه لكل قيمه محتمله لـ q_1^0 فانه يوجد قيمة مثلى مختلفه لـ q_2^0 والتى يمكن تحديدها فالمحل الهندسى لجميع النقاط (q_1^0, q_2^0) المحددة بناء على قيم معطاة لـ U_1 U_2 تكون خطوط ارغاعات سيتوفسكى .[1] فلو ان منحنيات السواء للفرد كانت محدبه ، فان خطوط سيتوفسكى سوف تكون هى الاخرى محدبه ولكن هذه الخطوط لا تمثل منحنيات سواء اجتماعيه كما قد تظهر من اشكالها فقط . وسوف نحصل على خطوط سيتوفسكى مختلفه تماما هذا اذا كانت قيم U_1 و U_2 المحددة قد تغيرت . فلو اخذنا نقطــة A على خطوط سيتوفسكى على سبيل المثال فى الشكل ١١ــ٤ .



شكل (١١ - ٤)

شكل (١١ - ٥)

(١) يمكن للقارئ ان يثبت ان النقاط الموجوده على خطوط ارغاعات سيبوفسكى تمثــل امثلية باريتو لتوزيع السلع وذلك بايجاد الاشتقاقات الجزئيه للمعادلة (١١ــ٤٦) .

فلاى نقطه على S_1 يجب ان تكون مجموعتى Q_1 و Q_2 موزعة بين المستهلكين بحيث ان I يتمتع بمستوى المنفعة U_1^0 وان II يتمتع بمستوى المنفعة U_2^0 ولكـــن الكميات المطابقه لهذه النقطه A قد يمكن توزيعها بطريقة مختلفه بحيث ينتج عنهـــا مستويين مختلفين للمنفعة وهما $U_1^{(1)}$ للمستهلك I و $U_2^{(1)}$ للمستهلك II ويتمـام عملية الحصول على الحد الاعلى كما هو موضح بالمعادلة(١١ـ٤٦) لهاتيـن القيمتين U_1 و U_2 فاننا نحصل على مجموعة نقاط جديده والتى تصف خطوط سيتوفسكـــى جديده مطابقة لمستويات منفعة مختلفه خصصت للمستهلكين وهذه الخطوط الجديده S_2 يجب ان يكون لها نقطه مشتركه مع S_1 عند نقطه A، ولكن لايوجد سبب واحد يدعونا لان نتوقع ان الخطين S_1 و S_1 سوف ينطبقا على امتدادهما (اى تطابق تام) وعلى هذا فان S_1 و S_2 اما ان يتقاطعا (كما حدث عند نقطة A فى الشكل(١١ـ٤) او انهما يتماسا وكلتا الحالتين لاتتمشى مع الخواص العاديه لمنحنيات السواء ولا تنطبـق عليها • ويمكن التخلص من تقاطع منحنيات سواء المجتمع وذلك من خلال تقديم عمليـــه الامثليه optimization وهى عملية الحصول على الحـد الاقصى او الادنى لشئ مـــا • لنفترض ان دالة رفاهيه المجتمع هى $W(U_1, U_2) = W^0$ فى مجتمع مكون من شخصين اثنين فقط •

ثم نجد خطوط ستيوفسكى المطابقه لجميع التوزيعات الخاصه بالمنفعتين (U_1, U_2) بحيث ان $W = W(U_1, U_2)$ وهذه الخطوط معروضه فى الشكل ١١ـ٥ فاقل الاحداثيـــات المطابقة لاى قيمة من قيم q_1 تمثل الكميه الادنى لـ Q_2 والضروريه لتامين مستـــوى الرفاهيه W^0 للمجتمع ولذا فان الغلاف B المحتوى على خطوط سيتوفسكى فـــى الشكل(١١ـ٥) هو المحل الهندسى لمجموعات Q_1 و Q_2 الادنى والضروريـــه لتـامين مستوى الرفاهيه W^0 للمجتمع ويسمى خط بيرجسون • Bergson contour

ويمكن حل مشكلة ايجاد نقطة الرفاهيه القصوى بطريقتين متطابقتين •

(١) ان كل نقطه على دالة التحويل الاجماليه تعرف خليطـ من السلع التى يمكـــن الحصول عليها بالموارد المتوفره حتى ولو اعتبرنا فقط توزيعات امثلية باريتـــو للسلع فان منحنى اغاتيه وعدد لاحصوله من الطرق يسمح بتوزيع المنفعة بين المستهلكين مطابقا لكل نقطه على دالة التحويلات الاجماليه • ثم نجد الطرق المحتمله لتوزيـــع المنفعة بين المستهلكين والمطابقة لجميع النقاط التى تحقق دالة التحويل ثم نختار من بين جميع توزيعات المنفعة هذا التوزيع الذى يكون عنده $W(U_1, U_2, \dots, U_n)$ عند قيمتها العظمى • ونحصل على الحل باختبار النقاط فى فراغ المنفعة •

(٢) نحدد جميع خطوط بيروجسون فكل واحد من هذه الخطوط يوافق مستوى رفاهيه مختلف ثم نختار تلك النقطه على دالة التحويل الاجماليه التى تقع على اعلـــى

خطوط بيرجسون المحتمله وبهذا يمكن الحصول على حل باختيار النقاط فى فضـــاء السلعة • فتطابق الطريقتين واضح من الحقيقه بان كلاهما معادل لعملية الحصول على الحد الاعلى من $W(U_1, \ldots, U_n)$ تحت الشروط المعطاه بدالة الانتاج الاجماليه •

نظرية أرو الاستحالية : The Arrow Impossibility Theorem

لقد بحث العالم ارو تكوين افضليات اجتماعيه وذلك بوصف افضليات المجتمع والفرد وذلك فى حدود ترتيب الحالات البديله المكونه بالعلاقة انه مفضل على الاقل مثل •• "is at least as well liked as" (راجع الفصل ٢ـ١) فدوال رفاهيه المجتمع والمنفعـــة ماهى الا حالات خاصة لهذه العلاقه العامه •
توجد طرق عديدة لتكوين مايفضله المجتمع وذلك مما يفضله الفرد الواحد فى المجتمع فقد يحدد مايفضله المجتمع ديكتاتورا ، او باغلبيه اصوات اعضاء المجتمع فمن الممكـــن تحديد مايفضله المجتمع بالتصويت ويعتمد عدد الاصوات التى يدلى بها الفرد علـــى حرف الهجاء الذى يبدأ به اسم عائلته • فالناس الذين يبدءوا اسم عائلتهم بالحـــرف (ا) مثلا يمكن لهم الادلاء بصوت واحد والذين يبدءوا اسمائهم بالحرف (ب) يمكـــن لهم بالادلاء بصوتين ، وهكذا فمن الواضح ان ليس جميع الطرق التى تؤدى الى مايفضله المجتمع عبر مايفضله الفرد تكون متساويه فى الرغبه والقبول او درجة المعقوليه • ولقد نص ارو خمسة بديهيات axioms • اعتقد ان تركيبات مايفضله المجتمع يجب ان تحققها لتلقى ادنى درجة من درجات القبول وضع هذه البديهيات الخمس كمايلى:

(١) بديهية الترتيب الكامل : Complete ordering

وكما هو الحال فى حالة الفرد ، فان مايفضله المجتمع يجب ان يخضع للترتيـــب الكامل وذلك عن طريق العلاقه " انه مفضل على الاقل اجتماعيا مثل ••" ولــهذا يجــب ان يحقق شروط التكامل completeness والانعكاس reflexivity والتعدى transitivity (راجع الفصل ٢ـ١) فترتيب باريتو ، والذى ينص على التوزيع A يكون مفضلا اجتماعيا على التوزيع B اذا كانت منفعة شخص واحد على الاقل اكبر فى A وان منفعـــة اى شخص اخر لم تنخفض ليست تكامليه ولهذا فانها لاتحقق هذه البديهه •

(٢) بديهية التجاوب لما يفضله الفرد : Responsiveness to individual preferences

افترض ان A تكون مفضله اجتماعيا على B وذلك لمجموعة معطاه مايفضله الفـرد • فلو ان الترتيبات الفرديه قد تغيرت بحيث ان فردا واحدا على الاقل فضل A بترتيـب

اعلى مما سبق وان احدا اخر لم يقلل من ترتيب افضليه A فان A يجب ان تظـل مفضله اجتماعيا علـى B وهذه البديهة سوف لا تتحقق لو انه وجد بعض الافراد الذين يميزهم المجتمع عنصريا بحيث انه فى حالة ان رغبتهم لبعض البدائل قد ازدادت نسبـه لبعض البدائل الاخرى فان افضلية المجتمع لذلك البديل المفضل من تلك الجماعة سـوف تنخفض •

(٣) بديهية عدم الديكتاتورية : Nondictatorship

ان افضليات المجتمع يجب ان لا تعكس افضليات شخص واحد فقط اى انهُ ليس بالصحيح ان مايفضله المجتمع من تفضيل $\bar{A}$ على $\bar{B}$ اذا كان واذا كان فقط مايفضـلـه الـفرد i من تفضيل A على B فلو ان هذه البديهه لم تتحقق فان الفـرد i هذا لا بـد وان يكون د يكتاتورا •

(٤) بديهية عدم فرض الرأى : Nonimposition

ان افضليات المجتمع يجب ان لا تفرض بدون الرجوع باستقلال الى افضليات الفرد • فلو انه لم يكن هنا فرد يفضل B على A ولكنه يوجد فرد واحد على الاقل يفضـل A على B فان على المجتمع ان يفضل A على B وتضمن هذه البديهيه ان افضليات المجتمع تحقق ترتيب باريتو • د ع A تكون التوزيع بحيث ان ليس لاى عضـو من اعضاء المجتمع منفعة اقل من المنفعة الناتجه من i وان عضوا واحدا على الاقـل من الاعضاء يكون له مستويات اعلى • وتتطلب هذه البديهيه ان المجتمع يفضل A على B •

(٥) بديهية استقلالية البدائل الغير وثيقة الصلة :

Independence of irrelevant alternatives

ان الحالة الاكثر تفضيلا بين مجموعة من البدائل يجب ان تكون مستقلة عن وجـــود البدائل الاخرى افترض انه فى حالة توفر البدائل C, B, A فان المجتمع يفضل A علـــى B على C فلو ان C لم تكن متوفرة بعد ، فانه ليس صحيحا ان المجتمع عندئـذ سوف يفضل B على A •

ان بديهيات ارو تعكس احكاما تقييميه ولكنها تبدوا معقولة وجذابه بديهيا لمعظـــم الاقتصاديين ولكن لسوء الحظ • فان نظرية الاستحاله هذه تنص على انه عامة ليـــس من المجتمع ايجاد افضليات مجتمع تحقق الخمس بديهيات جميعا • [1] فهناك بعـــض

---

(١) ان اثبات نظرية الامكانيه possibility theorem تعتمد على رياضيات معقده ولكن يوجد اثبات بديهى معطا بى:

James Quirk and Rubin Saposnik, *Introduction to General Equilibrium Theory and Welfare Economics* (New York: McGraw-Hill, 1968), pp. 108–116.

افضليات افراد تحقق بديهيات ارو كافضليات مجتمع ما ولكن هناك مجموعات اخرى لا تحققها فلو ان احد بديهيات ارو (ماعدا بديهية الترتيب الكامل) قد حذفت فانه من الممكن ان تكون افضليات مجتمع تحقق البديهيات الاربعة المتبقية من اى مجموعة من مجموعات افضليات الفرد • فلو اننا حذفنا بديهية عدم فرض الراى فقد تكون افضليات مجتمع تعطى دائما نفس الترتيب لكل بديل وتكون هذه الافضليه مفروضه على المجتمع ولو اننا حذفنا بديهية عدم الديكتاتوريه فان افضليات المجتمع سوف تساوى افضليات بعض الافرد فلو اننا حذفنا البديهية رقم(٥) فان افضليات المجتمع قد تعرف كمتوسط مرجح لافضليات الفرد •

توجد هناك طريقة اخرى للعمل حول نظرية ارو والطريقة هى تحديد افضليات الفرد بحيث ان افضليات المجتمع التى تحقق البديهيات الخمسه يمكن تركيبها دائما فاحد الاحتمالات هو ان نفترض ان جميع الافراد سوف يعينون دائما بنفس الترتيب لكل بديل ولكن توجد بدائل اخرى ولكنها اكثر تعقيدا •

توزيع الدخل والعدالة : Income Distribution and Equity

لقد اعتقد كثير من الاقتصاديين وحتى وقت قريب جدا بان مقارنات المنفعة الشخصية المتداخله هى خارج نطاق التحاليل الاقتصاديه وكنتيجة لذلك فانهم لم يقولوا الكثير عن توزيع الدخل والعدالة ولكن هذه النظرات قد تغيرت على كل حال وبدأت هذه المواضيع فى الدخول بوضوح فى النظريه الاقتصاديه فعلى الجانب المتطرف جدا نجد قاعدة (او مبدا) رولز Rawls' principle عن العدالة الاجتماعيه والتى تنص على ان المجتمع ليس باحسن حالا مما عليه اسوء لاعضاء حالا • فتكون دالة الرفاهيه الاجتماعيه المقابلة هى:

$$W = \min(U_1, U_2, \ldots, U_n) \qquad (١١\text{–}٤٧)$$

حيث ان مؤشرات المنفعة القياسيه cardinal utility indices لاعضاء المجتمع وعددهم n قد افترض انه يمكن مقارنتها comparable. وهذه الدالة تكون قائمه على مبدا المساواة التامه بين البشر بدرجة عاليه highly egalitarian فالحصول على الحد الاعلى من(١١–٤٧) سوف ينتج عنه مستويات منفعة متساويه لجميع اعضاء المجتمع وذلك فى غياب الانتاج لانه قد توجد بعض التباينات inequality فى مجتمع يكون فيه خاصيه الانتاج هذا اذا امدت هذه المتباينات المجتمع بدوافع انتاجيه كافيه •

اعتبر صنفا class من دوال الرفاهيه الاجتماعيه ذات خاصية الاضافه الشديدة strongly additive (راجع الفصل ٣–٢) والمعطاة كمايلى:

$$W = \sum_{i=1}^{n} U_i^{\rho} \qquad (١١\text{–}٤٨)$$

حيث ان مؤشرات المنفعة القياسيه سوف تكون موجبه بانضباط فمن الممكن اشتقاق بعض الخواص من (١١ــ٤٨) ولكن التحاليل الكامله سوف تتطلب مواصفات المؤشرات المنفعة الفردية فاحد الاحتمالات هو ان ندع كل منفعه فرديه ان تكون دالة خطيه ومتجانسة وبدلالة الدخل •

$$U_i = \beta_i y_i \qquad (i = 1, \ldots, n) \qquad (١١ــ٤٩)$$

حيث ان β_i هى المنفعة الحديه الموجبه الثابته للمستهلك i والتى تعكس طاقة المستهلك i للاستمتاع بدخله وبتعويض (١١ــ٤٩) فى (١١ــ٤٨) فان هذا سوف يسمح لرفاهيه المجتمع فى ان يعبر عنها بدلالة مستويات الدخل الفرديه:

$$W = \sum_{i=1}^{n} \beta_i^{\alpha} y_i^{\alpha} \qquad (١١ــ٥٠)$$

وللتبسيط افترض وجود دخل بحجم معين y^0 وانه يجب توزيعه اما عقديم الانتاج ود وافع الانتاج فانها تركت كتمرين للقارئ •

الان نوزع الدخل للحصول على الحد الاعلى من الرفاهيه الاجتماعيه تحت شرط الميزانيه الاجماليه ثم نكون دالة لاقرانج التاليه :

$$L = \sum_{i=1}^{n} \beta_i^{\alpha} y_i^{\alpha} + \delta\left(y^0 - \sum_{i=1}^{n} y_i\right)$$

وبوضع اشتقاقتها الجزئيه مساويه لصفر فان:

$$\frac{\partial L}{\partial y_i} = \alpha\beta_i^{\alpha} y_i^{\alpha-1} - \delta = 0 \qquad (i = 1, \ldots, n)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \delta} = y^0 - \sum_{i=1}^{n} y_i = 0$$

فتكون بذلك قد ساوينا بين رفاهيه المجتمع الحديه للدخل لكل فرد بـ δ وبتقييم متطلبات الحد الاصغر الرئيسى الاول لشروط الدرجه الثانيه •

$$\frac{\partial^2 W}{\partial y_1^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial y_2^2} = \alpha(\alpha - 1)(\beta_1^{\alpha} y_1^{\alpha-2} + \beta_2^{\alpha} y_2^{\alpha-2}) < 0$$

حيث انها تتحقق فقط لـ $0 < \alpha < 1$ ولهذا فان شروط الدرجة الثانية تتطلب بان تكون (١١ــ٥٠) دالة مقعرة بانضباط لمستويات الدخل الموجبه •

وبالرغم من ان قيم α خارج مجال الوحدة المفتوح open unit interval ممكنه (راجع التمرين ١١ــ١٢) فان التركيز هنا سوف يكون محددا للقيم التى تقع ضمن هذا المجال • فاذا كانت قيم β هى نفسها لجميع المستهلكين فان مساواة الدخل تتحقق لاى قيمة من قيم α ضمن هذا المجال • فلو ان قيم β اختلفت فان درجه مساواة الدخل ستكون بعلاقة عكسيه بـ α ويحل شروط الدرجه الاولى المناسبه لقيم y_i/y_j :

$$\frac{y_i}{y_j} = \left(\frac{\beta_i}{\beta_j}\right)^{\alpha/(1-\alpha)}$$

فكلما اقتربت α من صفر $\alpha \to 0$ فان (y_i/y_j) سوف تقترب مـــــن (١) $(y_i/y_j) \to 1$ وهذه هى حالة مساواة الدخل الكامله ، اما كلما اقتربت α من (١) $\alpha \to 1$ فان (y_i/y_j) سوف تقترب من صفر $(y_i/y_j) \to 0$ او ∞ وهذا يعتمد على ما اذا كانت β_j اقل من او اكبر من β_i •

اعتبر مثال الشخصين بحيث ان: $U_1 = 2y_1$ وان $U_2 = y_2$ وهذا يعنى ان ريالا من الدخل للمستهلك I سوف يعطيه ضعف المنفعة التى يعطيها ريالا للمستهلك II. ففى هذه الحالة•

$$\frac{y_1}{y_2} = 2^{\alpha/(1-\alpha)} \quad \text{and} \quad y_1 = \frac{2^{\alpha/(1-\alpha)}}{1+2^{\alpha/(1-\alpha)}} y^0$$

فالمستهلك I يستلم 89 فى المائه من اجمالى الدخل اذا كانت $\alpha = 0.75$ ويستلم 67 فى المائه اذا كانت: $\alpha = 0.5$ ويستلم 56 فى المائـــه اذا كانت : $\alpha = 0.25$ ويستلم 50.2 فى المائه اذا كانت : $\alpha = 0.01$ •

١١ - ٧ نظرية الثانى فى ترتيب الأفضلية

THE THEORY OF SECOND BEST

ان من الممكن تحقيق عائدا اجتماعيا موجبا وذلك بالتحرك من توزيع باريتو الغير امثل الى توزيع باريتو الامثل • ولهذا فانه دائما نعتبر تحقيق شروط باريتو بمثابه الهـــدف الاجتماعى الذى نسعى اليه فى اى حركة نقوم بها • فقد يحدث ان شرطا او اكثر مـــن شروط باريتو لن يتحقق بسبب الضوابط التاسيسيه او الانشائيه فلايمكن الحصول على الوضع الافضل للرفاهيه فى هذه الحاله ولذا فانه من المهم جدا البحث عما اذا كان مـــن المحتمل الحصول على وضع ثانى فى الافضليه وذلك بتحقيق شروط باريتو المتبقيه وتنص نظريات الثانى فى الافضليه على انه لا : اذا كان شرطا او اكثر من الشروط الضروريـــه لا مثلية باريتو لم يتحقق • وعموما فانه ليس ضروريا ولا مرغوبا ان نحقق الشروط المتبقيه •

ونوضح المميزات الهامه لنظرية الثانى فى الافضليه لنظـــام مبسط مكون من مستهـلك واحد ودالة انتاج ضمنيه واحده وعدد n من السلع وكميه عرض ثابته لاحد العوامـــل الاوليه الغير مرغوبه من المستهلك فنتائج هذا النظام يمكن تعميمها لتغطى النظـــام الاكثر كمالا والمقدمه فى الفصل (١١ــ١) ويمكن الحصول على الشروط الضروريه لامثليـــه باريتو وذلك بالحصول على الحد الاعلى من منفعة المستهلك تحت شرط دالة الانتاج ثم نكون دالة لاقرانج التالية :

$$L = U(q_1, \ldots, q_n) - \lambda F(q_1, \ldots, q_n, x^0)$$

وبوضع اشتقاقاتها الجزئيه مساويه لصفر :

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} = U_i - \lambda F_i = 0 \qquad i = 1, \ldots, n \qquad (١١\text{ـ}٥١)$$

حيث ان : $U_i = \partial U/\partial q_i$ وان : $F_i = \partial F/\partial q_i$. فيتبع ان :

$$\frac{U_i}{U_j} = \frac{F_i}{F_j} \qquad i, j = 1, \ldots, n \qquad (١١\text{ـ}٥٢)$$

فلو تحققت (١١ـ٥١) فان RCS لكل زوج من السلع سوف يساوى RPT المقابل افترض ان الشروط التاسيسيه عاقت الحصول على احد شروط (١١ـ٥١) وليكن الشرط الاول • فيمكن التعبير عن الفشل فى تحقيق هذا الشرط بطرق متعددة فاحد ابسط هذه الطرق هو افتراض ان :

$$U_1 - kF_1 = 0 \qquad (١١\text{ـ}٥٣)$$

حيث ان k هى ثابت موجب مختلفا من قيمة λ المثلى والمعطاه من حل (١١ـ٥١) وحل دالة الانتاج •

ويمكن الحصول على شروط الثانى فى الافضليه بالنسبه للرفاهيه بالنسبه المثلى وذلك بالحصول على الحد الاعلى من المنفعة تحت شروط دالة الانتاج الاجماليه وكذلك (١١ـ٥٣) ثم نكون دالة لاقرانج •

$$L = U(q_1, \ldots, q_n) - \lambda F(q_1, \ldots, q_n, x^0) - \mu(U_1 - kF_1)$$

حيث ان λ و μ هما مضروبا لاقرانج الغير محددة وبوضع اشتقاقاتها الجزئيه مساويه لصفر :

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} = U_i - \lambda F_i - \mu(U_{1i} - kF_{1i}) = 0 \qquad i = 1, \ldots, n$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = -F(q_1, \ldots, q_n, x^0) = 0 \qquad \frac{\partial L}{\partial \mu} = -(U_1 - kF_1) = 0 \qquad (١١\text{ـ}٥٤)$$

فاى حل لهذا النظام لايمكن ان يكون له $\mu = 0$ •وبتحريك الحدين الاخرين فى كل معادلة من معادلات (١١ـ٥٤) الى الجانب الايمن ثم قسمة المعادلة i بالمعادلة j :

$$\frac{U_i}{U_j} = \frac{\lambda F_i + \mu(U_{1i} - kF_{1i})}{\lambda F_j + \mu(U_{1j} - kF_{1j})} \qquad i, j = 1, \ldots, n \qquad (١١\text{ـ}٥٥)$$

وعموما فاننا لانعرف شيئا مسبقا عن اشارات الاشتقاقات الجزئيه المتداخلـــه U_{1j} ، U_{1i} ، F_{1j} ، F_{1i} ولهذا فانه لايتوقع عموما ان نتطلب شروط باريتو الاعتاديه للحصول على امثلية الثانى فى الافضليه •

ولقد استخدمت نظريات الثانى فى الافضليه للتساؤل عن الرغبه فى سياسات التوازن الجزئى والتى قد تستخدم فى الحصول على شروط باريتو على اساس التجزئيه وذلك للاسواق المعتبره فى انعزال فالنقيض المضاد لهذا هو انه بالرغم من ان سياسة التجزئيه لاتتحقق عموما الا انها تتحقق لكثير من الحالات المعنيه فعلى سبيل المثال، افترض ان السلع الموجوده قد رقمت بحيث ان انتهاكات حرمة باريتو فى الاستهلاك محددة على السلعه $i \le h,\ Q_i$ وتكون انتهاكات حرمة باريتو فى الانتاج محددة على السلعة $i \le k.\ Q_i$ فاذا كانت دالتى المنفعة والانتاج بحيث انهما انفصاليتين بضعف weakly separable (راجع الفصل ٣ــ٢) :

$$U = U[U_1(q_1, \ldots, q_h), U_2(q_{h+1}, \ldots, q_n)]$$
$$F[F_1(q_1, \ldots, q_k), F_2(q_{k+1}, \ldots, q_n, x^0)] = 0$$

فتكون شروط باريتو (١١ــ٥٢) محققه لجميع السلع ذات المؤشر $i > \max(h, k)$ وتكون التحاليل الجزئيه محققه لهذه السلع.

فالمؤيدون لسياسة التجزئه يناقشوا بان شروط باريتو تعطى ارشادات معقولة للسياسة لى $i \neq 1,\ Q_i,$ اذا كانت Q_i قريبه جدا من سلعة لم تتحقق فيها شروط باريتو اعتبر الان اشتقاق q_i فى (١١ــ٥٤) فالحد داخل القوس يعكس تاثير انتهاك حرمة شرط باريتو فلو كان هذا الحد صغيرا نسبة الى الحدود الاخرى ، فانه يمكن مناقشة ان الشرط المنتهك حرمته قد يهمل عند تكوين سياسة لى Q_i .
فالبان وعربات السكه الحديد على سبيل المثال تكون متقاربه بنسبة بعيده جدا فى الاستهلاك والانتاج ولهذا فان السياسه لصناعة عربات السكه الحديد يجب الا تتاثر بالتنافس الغير كامل فى صناعة اللبان .

١١ – ٨ ملخص ما سبق

الغرض من اقتصاديات الرفاهيه هو قياس الرغبه الاجتماعيه للشرائح المختلفه للموارد (الثروات) . وفى حالة عدم وجود قيمة مركبه (معقده) للحكم فيما يختص بالرغبه للتوزيعات المختلفه للدخول ، فان الحكم بالقيمه المفرده (الواحده) يعنى ان نعتبر انه يمكن تقديم اعادة تقسيم لاحداث التحسن فى الرفاهيه اذا ما جعلنا فرد واحد على الاقل يتحول الى الاحسن دون احداث أى سوء لأى فرد آخر . واذا ما أمكن اعادة تقسيم الثروات دون الاضرار على الاقل بفرد واحد ، فان التقسيم الموجود فى هذه الحاله يسمى بالوضع الامثل لباريتو . وتتطلب الشروط ذات الوجه الاولى لوضع باريتو الامثل :

١ ـ ان يتساوى RCS لكل مستهلك و RPT لكل منتج لكل زوج من السلع ٠
٢ ـ ان يتساوى RCS لكل مستهلك و RTS لكل منتج لكل زوج من العوامل الاوليه ٠
٣ ـ RCS لكل مستهلك و MP لكل منتج لكل زوج من العامل ـ السلعه ٠ ويجب ان تتوفر ايضا الشروط ذات الدرجه الثانيه فى الموضوع الامثل لباريتو ٠

ينتج التنافس التام عادة من تحقيق (توفر) الشروط ذات الدرجه الاولى للوضع الامثل لباريتو ٠ ويمثل التنافس التام من هذا المفهوم وضع أمثل للرفاهيه ٠ وهى لا تضمن توفر (تحقيق) الشروط ذات الدرجه الثانيه ، كما لا تضمن ان يكون توزيع الدخول أمثل بأى مفهوم ٠ بالاضافه لهذا ، يترك تعريف الرفاهيه المثلى بدلالة الوضع الامثل لباريتو كميه معينه من الغموض فى التحليل ، اذ ان كل نقطه على منحنى العقد تكون فى الوضع الامثل لباريتو ، ولا يستطيع الانسان ان يختار من بينها بدون ضوابط اضافيه اخلاقيه ٠

سوف يؤدى التنافس الناقص (الغير تام) من المستهلكين أو المنتجين بصوره عامه الى انتهاء رد الشروط ذات الدرجه الاولى لامثلية باريتو ٠ حتى اذا كانت RCS للمستهلكين تساوى بالصدفه RPT للمنتجين لكل السلع ، فسوف نظل غير متوصلين الى امثلية باريتو نتيجه للتباين بين RCS للمستهلكين للسلع والعمل والمعدلات المقابله لتحويل المنتجين الجهد الى سلع ٠

يجب تعديل الشروط ذات الدرجه الاولى لأمثلية باريتو فى وجود تأثيرات خارجيه فى الاستهلاك او فى الانتاج ٠ وعادة لن يؤدى التنافس التام الى أمثلية باريتو اذا وجدت تأثيرات خارجيه ٠

لن يؤدى جودة RCS الى أمثلية باريتو اذا كانت الدوال الفائدة مرتبطه داخليا تتطلب أمثليه باريتو أن يكون مجموع RCS للمستهلكين بين السلع الشائعه والسلع الاعتياديه مساويه للقيم المناظرة لـ RPT لكل منتج ويمكن استخدام جدول معين للتسعير للسلع الشائعه لكى نصل الى اتزان لنداهل Lindahl فى الاسواق الزائفه لمثل هذه السلع ٠ يجب ان يتساوى السعر مع MC الاجتماعى النسبى MC الخاص اذا كانت هناك تأثيرات خارجيه فى الانتاج ٠

يمكن عادة تصميم نظم الضرائب والمعونات الماليه بحيث تصل باقتصاد السوق من تقسيم غير أمثل لباريتو الى تقسيم أمثل ٠ يمكن استخدام وحدات الضرائب والمعونات الماليه لكى تجعل المشتركين بالسوق يلاحظون الشروط الهامشيه المناسبه ، واجمالى مجموع الضرائب والمعونات يستخدم لكى تؤمن توزيع الدخول المطلوب ٠

ويمكن ازالة الغموض المتبقى فى تحليل أمثلية باريتو بادخال دالة الرفاهيه الاجتماعيه والتى تنص على تفضيل المجتمع لتوزيع معين للربح بين الافراد بالتفضيل • ويوجد العديد من دوال الرفاهيه الاجتماعيه تعبر كل منها عن تقييم المجموعات المختلفه من النـــاس (الشعب) • وتعين الرفاهيه المثلى بتحويل دالة الرفاهيه الاجتماعيه الى فراغ السلعـه وايجاد النقطه على دالة التحويل والتى تقع على اعلى محيط بيرجسون
تتكون عادة مثل هذه الرفاهيات المثلى عبارة عن أمثليات باريتو • وتنـــص نظريـــة أرو الاستحاليه على انه فى العـــادة ما يكون مستحيلا أن نبنى أفضلية اجتماعيه من افضليه فردية بدون تحطيم واحد أو اكثر من البديهيات الخمس والتى يعتقد معظم الاقتصاديون وجوب توافرها فى الافضليه الاجتماعيه •

تنص نظرية المفضل الثانى على انه اذا لم يكن ممكنا تحقيق واحد أو أكثر من شـــروط الدرجه الاولى لأمثلية باريتو بسبب قيود مؤسسيه ، فعادة مالا يكون مرغوبا ولا ضروريـــا فى تحقيق بقية شروط باريتو • استخدمت هذه النظرية فى اختبار رغبة السياسات فـــى الحصول على شروط باريتو على اسس تدريجيه •

$$\frac{\partial U/\partial q_1}{\partial U/\partial q_3} = k\frac{\alpha_1}{\alpha_3}$$

where $k \neq 1$. Find second-best values for q_1, q_2, and q_3 as functions of k.

SELECTED REFERENCES

Arrow, K. J.: *Social Choice and Individual Values* (New York: Wiley, 1951). A treatise on the problems of constructing a social welfare function. Difficult for those unfamiliar with the mathematics of sets.

Bator, F. M.: "The Simple Analytics of Welfare Maximization," *American Economic Review*, vol. 47 (March, 1957), pp. 22–59. A geometric exposition of some fundamental results of welfare economics.

Baumol, W. J.: *Welfare Economics and the Theory of the State* (2d ed., London: G. Bell, 1965). Contains a discussion of the welfare implications of perfect competition and monopoly and an analysis of some of the nineteenth-century literature on welfare. Mathematics is in appendixes.

Bergson, A.: "A Reformulation of Certain Aspects of Welfare Economics," *Quarterly Journal of Economics*, vol. 52 (February, 1938), pp. 310–334. Also reprinted in R. V. Clemence (ed.), *Readings in Economic Analysis* (Cambridge, Mass.: Addison-Wesley, 1950), vol. 1, pp. 61–85. The first modern mathematical treatment of welfare economics.

Davis, Otto A., and Andrew B. Whinston: "Welfare Economics and the Theory of Second Best," *Review of Economic Studies*, vol. 32 (1965), pp. 1–14. Discusses situations in which the Pareto conditions are valid for second-best optima. Calculus is used.

Graaff, J. de V.: *Theoretical Welfare Economics* (London: Cambridge, 1957). A treatise on welfare incorporating some modern theories. The mathematics is in appendixes.

Harberger, A. C.: "Three Basic Postulates for Applied Welfare Economics: An Interpretive Essay," *Journal of Economic Literature*, vol. 9 (September, 1971), pp. 785–797. A mostly nonmathematical argument for using changes in consumer surplus as measures of welfare change.

Lipsey, R. G., and Kelvin Lancaster: "The General Theory of Second Best," *Review of Economic Studies*, vol. 24 (1956–1957), pp. 11–32. The first formal statement of the theory of second best. Calculus is used.

Quirk, James, and Rubin Saposnik: *Introduction to General Equilibrium Theory and Welfare Economics* (New York: McGraw-Hill, 1968). A modern treatment of welfare economics is presented in chap. 4. Advanced mathematical concepts are simplified and developed in the text.

Roberts, D. J.: "The Lindahl Solution for Economies with Public Goods," *Journal of Public Economics*, vol. 3 (February, 1974), pp. 23–42. An advanced discussion of the existence of Lindahl equilibria.

Samuelson, Paul A.: *Foundations of Economic Analysis* (Cambridge, Mass.: Harvard, 1948). Chap. VIII contains a discussion of the social welfare function and the conditions for maximum welfare. The mathematics is mostly incidental.

Samuelson, Paul A.: *Collected Scientific Papers*, ed. by J. E. Stiglitz (Cambridge, Mass.: M.I.T., 1966), 2 vols. The utility feasibility function is developed in chap. 77, and public goods are covered in chaps. 92–94. Geometry and calculus are used.

Scitovsky, T.: "A Reconsideration of the Theory of Tariffs," *Review of Economic Studies*, vol. 9 (1941–1942), pp. 89–110. Also reprinted in American Economic Association, *Readings in the Theory of International Trade* (New York: McGraw-Hill, 1949), pp. 358–389. The concept of Scitovsky contours was introduced and applied to international trade theory in this article.

Sen, A.: *On Economic Inequality* (Oxford: Clarendon Press, 1973). A modern and sophisticated discussion of welfare theory employing only little mathematics.

EXERCISES

11-1 Consider a two-person, two-commodity, pure-exchange economy with $U_1 = q_{11}^{\alpha} q_{12}$, $U_2 = q_{21}^{\beta} q_{22}$, $q_{11} + q_{21} = q_1^0$, and $q_{12} + q_{22} = q_2^0$. Derive the contract curve as an implicit function of q_{11} and q_{12}. What condition on the coefficients α and β will ensure that the contract curve is a straight line?

11-2 An economy satisfies all the conditions for Pareto optimality except for one producer who is a monopolist in the market for her output and a monopsonist in the market for the single input that she uses to produce her output. Her production function is $q = 0.5x$, the demand function for her output is $p = 100 - 4q$, and the supply function for her input is $r = 2 + 2x$. Find the values of q, x, p, and r that maximize the producer's profit. Find the values for these variables that would prevail if she satisfied the appropriate Pareto conditions.

11-3 Consider a two-person, two-commodity, pure-exchange economy with $U_1 = q_{11}^{\alpha} q_{12} q_{21}^{\gamma} q_{22}^{\delta}$, $U_2 = q_{21}^{\beta} q_{22}$, $q_{11} + q_{21} = q_1^0$, and $q_{12} + q_{22} = q_2^0$. Derive the contract curve of Pareto-optimal allocations as an implicit function of q_{11} and q_{12}. How does this differ from the contract curve for Exercise 11-1? Under what conditions will the two curves be identical?

11-4 Consider an economy with two consumers, two public goods, one ordinary good, one implicit production function, and a fixed supply of one primary factor that does not enter the consumers' utility functions. Determine the first-order conditions for a Pareto-optimal allocation. In particular, what combination of RCSs must equal the RPT for the two public goods?

11-5 Construct excess demand functions for the two goods of the Lindahl-equilibrium example given by (11-27) through (11-35), and solve these functions to obtain the equilibrium solution.

11-6 Assume that the cost functions of two firms producing the same commodity are

$$C_1 = 2q_1^2 + 20q_1 - 2q_1q_2 \qquad C_2 = 3q_2^2 + 60q_2$$

Determine the output levels of the firms on the assumption that each equates its private MC to a fixed market price of 240. Determine their output levels on the assumption that each equates its social MC to the market price.

11-7 Determine taxes and subsidies that will lead the producer described in Exercise 11-2 to a Pareto-optimal allocation and leave her profit unchanged.

11-8 Determine taxes and subsidies that will lead the firms described in Exercise 11-4 to their Pareto-optimal output levels but leave their profits unchanged. What is the size of the social dividend secured by this change in allocation?

11-9 Consider an economy with two commodities and fixed factor supplies. Assume that the social welfare function defined in commodity space is $W = (q_1 + 2)q_2$ and that society's implicit production function is $q_1 + 2q_2 - 1 = 0$. Find values for q_1 and q_2 that maximize social welfare.

11-10 Assume that there are two consumers and two commodities. Let the utility functions be $U_1 = q_{11}q_{12}$ and $U_2 = q_{21}q_{22}$ with $q_{11} + q_{21} = q_1$ and $q_{12} + q_{22} = q_2$. Show that Scitovsky contours are given by $q_1q_2 = (\sqrt{U_1} + \sqrt{U_2})^2$.

11-11 Consider a society of n individuals and m alternatives with the following preference structure. Each individual ranks the alternatives from 1 through m in decreasing order of preference. The ranks are summed over individuals, and the alternative with the smallest sum is chosen. Verify that the first four of the Arrow axioms are satisfied by this method of social choice, and that the axiom of the independence of irrelevant alternatives is not.

11-12 Determine the consequences of distributing a given income to maximize the social welfare given by (11-50) in each of the following cases: (*a*) $\alpha < 0$, (*b*) $\alpha = 0$, and (*c*) $\alpha \geqq 1$.

11-13 Consider a simplified economy with one consumer, one implicit production function, three commodities, and a fixed supply of one primary factor where

$$U = q_1q_2q_3 \qquad \alpha_1q_1 + \alpha_2q_2 + \alpha_3q_3 - x^0 = 0$$

Find values for q_1, q_2, and q_3 that maximize utility subject to the production function. Assume that institutional constraints result in a violation of one of the Pareto conditions so that

الفصل الثانى عشر

تحقيق الأمثلية عبر الزمن
OPTIMIZATION OVER TIME

ان نظريات الاستهلاك والانتاج التى عطيناها فى الابواب السابقه غطت عمليـــة تحقيق الامثليه لفترة زمنيه واحده • ففى تحاليل المدى القصير افترض ان اصحـــاب الوحدات الانتاجيه يمتلكون مصانع بحجم ثابت • ولكن ابعد من هذا قرارات تحقيـــق الامثلية للوحدات لفترات زمنيه لاحقه قد افترض انها مستقله فالمستهلك يصرف دخلـــه كاملا خلال الفتره الزمنيه الجاريه (الحاليه) ويحقق الحد الاعلى من مستوى مؤشـــر منفعته خلال الفتره الحاليه والمعرفه فقط للسلع المستهلكه خلال هذه الفتره فقـــط • وبالمثل فان دالة انتاج مالك الوحده الانتاجيه تعكس العلاقه بين الداخل والخـــوارج خلال الفتره الجاريه وانه يحقق الحد الاعلى من ربحه للفترة الحاليه •

ففى الباب الحالى نقدم عامل الزمن Time فى حدود الوضع المتصل والوضع المنفصل discrete and continuous وسوف نعرف دوال الانتاج والمنفعه ذات الفترات الزمنيـه المتعددة Multiperiod ثم نوسع نظريات الاستهلاك والانتاج ذات الفتره الزمنيـــــه الواحده single-period لتغطى تحقيق الامثليه من خلال افاق زمنيه مكونه من T فتـــرة زمنيه T-period horizons وتقديم عامل الزمن هذا سوف يصحبه عدد من الافتراضات التبسيطيه • فعامل الزمن سوف يقسم الى فترات باطوال متساويه ونفترض ان الصفقـــات التى تتم فى السوق تكون محدده على اليوم الاول من كل فترة • وفى خلال الايام المتبقيه من كل فترة زمنيه فان المستهلك سوف يقوم بعرض العوامل التى سوف يبيعها وســـوف يستهلك السلع التى قد اشتراها ويقوم ملاك الوحدات بتطبيق الداخل التى قامـــوا بشرائها وينتجون السلع التى يريدون بيعها فى الفترة الزمنيه القادمه للسوق •

فمنصرفات المستهلك الحاليه لن تكون محددة بشرط الميزانيه ذا الفترة الزمنيـــه الواحده فقد يصرف اكثر او اقل من دخله الجارى ويقترض او يقترض الفرق وكذلك المـــلاك لهم الخيار فى الاقتراض والاقراض •

ان تقديم عامل الزمن المتصل سوف يسمح بتحليل المشاكل التى يكون فيها عامل الزمن متغيرا ذو صله وثيقة بالمشكله نفسها ، مثل تحديد العمر الامثل لقطعة فى جهاز من الاجهزة التى تدوم طويلا durable equipment .

ففى التحاليل ذات الطابع الزمنى المتصل ، نفترض ان الصفقات التى تتم فى السوق سوف تتخذ عند اى نقطه من الزمن .

فسوق السندات bond market ومفاهيم الارباح المركبه compounding والتنزيلات والتخفيضات discounting سوف تناقش فى الفصل ١٢ـ١ اما الفصل ١٢ـ٢ فأنه يحتوى على توسيع نظرية المستهلك لتغطى حالة تعدد الفترات الزمنيه مع اعتبار التفضيل الزمنى time preference وتأثيرات معدلات الربح على منصرفات الاستهلاك عبر الزمن ويحتوى الفصل ١٢ـ٣ على مناقشة كيف يتم توسيع نظرية الانتاج لتغطى حالة تعدد الفترات الزمنيه ويعطى الفصل ١٢ـ٤ توازن سوق السندات وتحديد معدل الفائده (الربح) ونناقش فى الفصل ١٢ـ٥ التخفيضات المتواصله ومعايير تحقيق الامثليه .

وسوف يكون موضوع الفصل ١٢ـ٦ هو سحب وابدال الاجهزة التى تدوم طويلا ونغطى باختصار الموارد المستنفذه Exhaustible resources فى الفصل ١٢ـ٧ اما فى الفصل الاخير ١٢ـ٨ فاننا سوف نعالج موضوع الاستثمار فى راس المال البشرى human capital

١٢ - ١ الأفكار أو المفاهيم الأساسية : BASIC CONCEPTS

تتطلب تحاليل الفترات الزمنيه المتعددة تقديم مفاهيم جديدة منفرده وذلك لوصف الطرق وتكاليف الاقتراض والاقراض .

سوق السندات : The Bond Market

نقدم الاقراض والاقتراض مع الافتراضات التبسيطيه التاليه :

(١) للمستهلكين والمالكين الحق فى الدخول فى عقود الاقتراض وذلك فى اليوم الاول فقط من كل فترة زمنيه .

(٢) يوجد اداة وحدة فقط للاقتراض :سالسندات لفترة زمنيه واحده فقط .

(٣) يكون سوق السندات تنافسيا كاملا .

(٤) المقترضون يبيعون السندات لمن يريد ان يقترض وذلك مقابل كميات معينه من قوة الشراء الجاريه . وذلك على صورة نقود حسابيه money of account .

(٥) القروض زائدا رسوم الاقتراض سوف تدفع بدون تاخير (او عدم ايفاء) فى فترة السوق التاليه .

وهذه الافتراضات تمثل تبسيطات شديدة لواقع اسواق الدين (النسيئة) credit ولكنها تسمح باشتقاق نتائج اساسيه يمكن توسعها لتغطى اسواق اكثر تعقيدا • فكل واحد من الافتراضات السابقه يمكن تعديله لتوسيع قاعدة وتغطيه التحاليل فالالتراض(١) يتبع من تعريف الزمن المنفصل المستفاد منه فى تحاليل الفترات الزمنيه المتعددة •

وهذا الافتراض قد عدل فى الفصل ١٢ــ٥ ويمكن تعديل الافتراض (٢) بافتراض وجود انواع مختلفه من ادوات الديون ، مثل اوراق الوعود ووثائق رهن العقارات بفترات زمنيه مستحقه مختلفه ويمكن تهوين (٣) بالرجوع الى تحاليل المنافسه الغير كاملة •
ويمكن كذلك تعديل الافتراضين (٤) و(٥) بعدد من الطرق •

دع b_t تكون وضع شخص ما بالنسبه للسندات عند نهاية فترة المتاجره فى اليوم t من ايام السوق فاشارة b_t تظهر اهميه ما اذا كان هذا الشخص مقترضا او مقرضا • فاذا كانت $b_t < 0$ فان هذا الشخص يكون مقترضا مع وجوب دفع السندات ، وانه يجب عليه ان يقوم بدفع b_t ريالا زائدا رسم الافتراض المناسب فى وقت السوق الـ$(t+1)$ الاول فاذا كانت $b_t > 0$ فان هذا الشخص يكون مقرضا حاصلا على سندات الاخرين وسوف يستلم b_t ريال زائدا رسم الاقتراض المناسب فى وقت السوق الـ $(t+1)$ الاول •

وبما ان رسوم الاقتراض المناسبه قد عبر عنها ايضا فى حدود النقود الحسابية لذا فانه قد تذكر كنسب من المقادير المقترضه ففى اليوم $(t+1)$ الاول من السوق يجب على المقترض ان يدفع $(1+i_t)$ ضرب المقدار المقترض فى اليوم الـ t فالنسبه i_t تكون هى معدل فائدة السوق التى تربط بين اليوم الـ t واليوم $(t+1)$ فمعدلات الفائدة يعبر عنها دائما كنسبات مئويه • فلو كان معدل الفائده هو i_t فان رسم الاقتراض سيكون $100i_t$ فى المائه من المقدار المقترض • فعلى سبيل المثال ، يكون رسم الاقتراض هو خمسة فى المائه اذا كانت $i_t = 0.05$ •

معدلات دخل (عائد) السوق : Market Rates of Return

ان الاشخاص الذين يرغبون فى الاقتراض لمدة زمنيه تزيد عن فترة واحده يستطيعون بيع سندات جديده على ازمنه سوقيه متتاليه لرد (توفية) المبلغ الرئيسى والفائده عليه وبالمثل فان باستطاعة المقرضون اعادة استثمار دخلهم الرئيسى والفوائد العائد لهم •
اعتبر حالة الفرد الذى يستثمر b_t من الريالات فى اليوم السوقى الـ t ثم يواصل اعاده الاستثمار الدخل الرئيسى والفوائد حتى اليوم السوقى الـ t فتكون قيمة استثمار عند بداية اليوم السوقى الـ$(t+1)$ الاول هى $b_t(1+i_t)$ فاذا استثمر كامل المقدار بعد ذلك فان قيمة استثماره عند بداية اليوم السوقى الـ $(t+2)$ الثانى هى $b_t(1+i_t)(1+i_{t+1})$ وتكون بذلك قيمة استثماره عند بداية اليوم السوقى الـ τ هى :

$$b_t(1+i_t)(1+i_{t+1})\cdots(1+i_{\tau-1})$$

ويكون كامل العائد (دخل) على استثماره هو :

$$J = b_t(1+i_t)(1+i_{t+1})\cdots(1+i_{\tau-1}) - b_t$$

ويكون متوسط معدل الدخل ومعدل الدخل الحدى ($\xi_{t\tau}$) لهذا الاستثمار متساويين وثابتين •

$$\xi_{t\tau} = \frac{J}{b_t} = \frac{dJ}{db_t} = (1+i_t)(1+i_{t+1})\cdots(1+i_{\tau-1}) - 1 \qquad (١٢ــ١ ا)$$

فعلى سبيل المثال ، لون ان $\tau = t+2$ وان $i_t = 0.10$ وان $i_{t+1} = 0.06$

فان :

$$\xi_{t,t+2} = (1.10)(1.06) - 1 = 0.166$$

وبما ان المستثمر يكسب فائدة على دخل ربحه السابق ، فان معدل العائد المركب للسوق سوف يفوق مجموع معدلات الفائدة الفردى فمن المفيد ان نلاحظ ان مستويات معدلات الفائده فقط ، ليس ترتيب تواليهم ، وهى التى تؤثر على معدل عائد السوق • فمعدل عائد السوق سيظل 0.166 للفائدة $i_t = 0.06$ ولـ $i_{t+1} = 0.10$ •

ان من الافضل تعريف :

$$\xi_{tt} = 0 \qquad (١٢ــ١ ب)$$

والتى تنص على ان المستثمر سوف يكسب معدل عائد مساويا لصفر لو انه يشترى ويبيع فى نفس الفترة الزمنيه وسوف يكسب عائدا موجبا اذا احتفظ بالسندات الى فتره زمنيه فى المستقبل وتنطبق معدلات عائد السوق المعرفه لـ(١٢ــ١) على حالات الاقتراض والاقراض.

فاذا توقع المستثمر معدل فائدة ثابتا ، $i_t = \cdots = i_{\tau-1} = i$

فان معادلتى (١٢ــ١ ا) و (١٢ــ١ ب) تصبحان :

$$\xi_{t\tau} = (1+i)^{\tau-t} - 1$$

والتى يمكن ايجاد قيمتها من جدول الربح المركب لقيم مخصصه لـ ١ــ آ و i •

معدل التخفيض والقيم الحالية : Discount Rates and Present Values

يتطلب وجود ارقام سوقا للسندات ان الفرد العاقل سوف لا يعتبر الريال الواحد الذى يجب دفعة فى الفترة الزمنيه الحاليه مكافئا (معادلا) للريال الذى يجب دفعه فى بعض الفترات الزمنيه فى المستقبل • فلو انه استثمر ريالا واحد فى السندات فى فترة السوق الزمنيه الحاليه فانه سوف يستلم $(1+i_1)$ من الريالات فى فترة السوق الزمنيه التاليه فالريال الواحد الذى يجب دفعه عند فترة السوق الزمنيه التاليه يكون مكافئا سوقيا لـ $(1+i_1)^{-1} = 1/(1+i_1)$ من الريالات التى يجب دفعها عند حلول الفتره الاولى • فمن الممكن اقراض $(1+i_1)^{-1}$ من الريالات عند فترة السوق الاولى واستلام ريالا واحدا عند حلول الفترة الثانيه او انه يستلف $(1+i_1)^{-1}$ من الريالات عند الفترة الاولى ويدفع ريالا واحدا عند الفترة الثانيه فالنسبه $(1+i_1)^{-1}$ هى معدل التخفيض للمقادير التى يجب

دفعها عند حلول الفترة الزمنية الثانيه • اما القيمه الحاليه وتسمى فى بعض الاحيان قيمة لتخفيض لـ y_2 من الريالات التى يجب دفعها عند حلول فترة السوق الثانيه هى $y_2(1+i_1)^{-1}$ من الريالات •

يمكن تعريف معدلات التخفيض للمبالغ التى تدفع عند حلول اى فترة من فترات السوق الزمنيه وعموما فان معدل التخفيض للمبالغ التى تدفع عند حلول الفترة الـ t يكون

$$[(1+i_1)(1+i_2)\cdots(1+i_{t-1})]^{-1} = (1+\xi_{1t})^{-1}$$

فيتبع من(١٢ــ١) ان استثمار بمبلغ $(1+\xi_{1t})^{-1}$ من الريالات عند فترة السوق الزمنيه الاولى سوف يكون له قيمة ريال واحد عند حلول الفتره الـ t •
ان من الممكن التعبير عن دخل بكامله او تكاليف او نفقات جاريه فى حدود قيمتها الحاليه بعدد مفرد a single number واحد • اعتبر الدخل الجارى income stream $y_1, y_2, \ldots, y_\tau$ حيث ان y_t هو الدخل الذى يجب دفعة عند حلول فترة السوق الـ t فتكون القيمه الحاليه لهذا الدخل الجارى هى:

$$y = y_1 + \frac{y_2}{(1+\xi_{12})} + \cdots + \frac{y_\tau}{(1+\xi_{1\tau})}$$

فلو ان جميع معدلات الفائده تكون موجبه فان $(1+\xi_{1t})$ سوف تزداد وسوف تنخفض القيمه الحالية لاى مبلغ ثابت وذلك كلما ازدادت t فاذا كانت جميع معدلات الفائده هى 0.10 فان القيمه الحاليه لريال واحد يجب دفعة عند حلول فترة السوق الزمنيه الثانيه يكون تقريبا 0.91 من الريالات ، ويكون الريال الذى يجب دفعة عند حلول فترة السوق الزمنيه الخامسه تقريبا 0.68 ويكون الريال الذى يجب دفعة عند الفترة العاشرة تقريبا 0.42 •

فحسابات القيم الحاليه تجعل من الممكن القيام بمقارنة ذات معنى اقتصادى للدخل البديل والنفقات الجاريه • افترض ان معدل الفائدة هو 0.10 واعتبر بديلين بفترتين زمنيتين من الدخلين الجاريين two-period income streams :

$$y_1 = 100,\ y_2 = 330,$$
$$y_1 = 300,\ y_2 = 121.$$

يحتوى الدخل الجارى الاول على تسعة ريالات اكثر من الثانى ، ولكن الثانى سوف يكون مفضلا عندما يكون معدل الفائدة 0.10 لان قيمته الحاليه(410 من الريالات) تفوق القيمه الحاليه للاول (400 من الريالات) ويمكن اثبات افضليه الدخل الجارى الثانى بتحويله الى مجرى يمكن مقارنته بطريقة مباشرة بالمجرى الاول • فالدخل الجارى الثانى سوف يعطى من هو فى حرزه 200 ريال اكثر عند حلول فترة السوق الاولى من الدخل الجارى الاول • دعه يستثمر هذه الـ 200 ريال فى السندات عند حلول فترة

السوق الاولى فهذا يترك دخلا بمبلغ 100 ريال عند حلول الفترة الاولى ثم يضيف 220 ريال الى دخله المقابل للصرف عند نهاية الفترة الثانيه • فيكون الدخل الجاري المتحول $y_2 = 341$ و $y_1 = 100$ ومن الواضح انه منفصلا عند الدخل الجاري الاول ويمكن تعميم هذه النتيجة كالتالي : بغض النظر عن كيفية تحويل اى دخلا جاريا سواء من خلال القرض او الاقراض فان اى دخلا جاريا تكون له قيمة حاليه اكبر يمكن تحويله الى دخلا جاريا مفضلا •

١٢ - ٢ : استهلاك الفترات المتعددة : MULTIPERIOD CONSUMPTION

ان من العادة ان يستلم المستهلك دخله ويشترى به السلع عند بداية كل فترة سوقية زمنيه فمشترياته الحاليه سوف تتاثر بتوقعاته بخصوص السعر ومستويات الدخل في المستقبل لذا فانه يجب ان يضع خطه (على سبيل المحاولة او التجربه) لمشترواته في فترات السوق الزمنيه في المستقبل • فلو اثبتت توقعاته صحتها ولم يتغير ذوقه عن الاختيارات المتوقعة ، فان خطته الاوليه تنفذ في فترات السوق الزمنيه في المستقبل ولكن اذا اثبتت توقعاته فشلها فان عليه ان ينقح من خطته الاوليه فخطة المناقشة الحاليه سوف تكون محصورة على المستهلك الذى يكون خطه متكامله في فترة السوق الزمنيه الجاريه وذلك لتصرفاته الاستهلاكيه على السلع وعددها n وذلك على افق من الزمن محتويا عدد T من الفترات الزمنيه • فالافق يكون الفترة الزمنيه التى من اجلها قد خطط في فترة السوق الزمنيه الجاريه فقد تكون باى طول ولكن للبساطه نفترض انها موافقة لما تبقى من عمره المتوقع فليس من المهم ان يعرف بالفعل كم من الزمن سوف يعيش ولكن من الضروري ان يخطط كما لو انه يعرف بالفعل • فلو تغيرت توقعات حياته في المستقبل فانه سوف يغير افقه حسب خطته المنقحة •

دوال منفعة الفترات المتعددة : Multiperiod Utility Functions

ان في معظم الحالات عموميه نجد ان موءشر المنفعة الترتيبي للمستهلك يعتمد على استهلاكه المخطط له لكل واحد من السلع n في كل فترة من الفترات الزمنيه T :

$$U = U(q_{11}, \ldots, q_{n1}, q_{12}, \ldots, q_{n2}, \ldots, q_{1T}, \ldots, q_{nT}) \quad (١٢-٢)$$

حيث ان q_{it} هي كمية Q_i التى يشترى في فترة السوق الزمنيه الـ t ثم يستهلكها خلال نفس الفترة t •

ولا يتطلب تكوين مؤشر منفعة منفرد ان المستهلك سوف لا يتوقع اى تغير في ذوقه عبر الزمن ولكنه يتطلب ان يخطط كما لو انه يعرف المسلك الذى سوف ياخذه التغيير فعلى سبيل المثال فقد يعرف كم من المتعة والمنفعة التى سوف تجلبها له عربيه الاطفال وذلك خلال

السنوات التى يرعى فيها عائلته ولكنها لاتعطية اى متعة او منفعة خلال سنوات تقاعدية فموءشر المنفعة (١٢ـ٢) لايتحقق بوجه الضرورة من خلال كامل افق المستهلك المخطط له ولكنه مجرد انعكاس لتوقعاته الحاليه • فاى تغيير فى ظروفه الموضوعيه او رغباته الذاتيه قد يسبب فى تنقيح موشر منفعته عند بعض الفترات السوقيه الزمنيه المستقبل •

وبالرغم من ان تحاليل استهلاك الفترات المتعددة يكون رسميا مطابقا لتحاليل الفترة الواحدة ، الا ان تقديم عامل الزمن بوضوح وتقديم معدل الفائدة يمثلان عددا من المصاعب والمشاكل الجديدة • فالاهتمام يكون مركزا على المشاكل الفريدة لاستهلاك الفترات المتعدده وذلك بافتراض ان اسعار السلعه المتوقعة والواقعيه تكون ثابته فى القيمه وتظل غير متغيرة وكنتيجه لذلك فقد نبسط التحاليل بادخال نظرية السلعة المركبه composite-commodity theorem (راجع الفصل ٣ـ٦) دع c_t تمثل مجموع منصرفات المستهلك للسلع فى فترة السوق الزمنيه الـ t :

$$c_t = \sum_{j=1}^{n} p_{jt}q_{jt} \qquad t = 1, \ldots, T \qquad (١٢\text{ـ}٣)$$

ثم نعيد تعريف (١٢ـ٢) فى حدود منصرفات استهلاك السلعة المركبه :

$$U = V(c_1, \ldots, c_T) \qquad (١٢\text{ـ}٤)$$

والتى تعطى القيمه العظمى لموءشر المنفعة الموافق لكل نمط من انماط منصرفات الاستهلاك • ان معدل التعويض الزمنى للمستهلك time-substitution rate

$$-\frac{\partial c_\tau}{\partial c_t} = \frac{V_t}{V_\tau} \qquad t, \tau = 1, \ldots, T$$

هو المعدل الذى يجب ان تزداد منصرفات المستهلك فى فترة السوق الزمنيه الـ τ وذلك لتعويض التخفيض فى منصرفات الاستهلاك فى الفترة الـ t من اجل ترك مستوى قناعة المستهلك من دون تغيير ولانفقد شيئا من العموميات بتحديد الانتباه على الحالات التى تكون فيها $t < \tau$ فلو كان معدل التعويض الزمنى للمستهلك هو 1.06 فان منصرفاته الاستهلاكيه فى الفترة (τ) يجب ان تزداد بالمعدل (1.06) من الريالات لكل ريال من ريالات منصرفات الاستهلاك المضحى به فى الفترة الـ t وبمعنى اخر فانه يجب ان يستلم على الاقل 0.06 من الريالات كمبلغ اضافى قبل ان يوءخر منصرف استهلاكى بما قيمة ريال واحد من الفترة t الى الفترة τ ونعرف هذا المبلغ الاضافى الادنى بانه معدل الزمن المفضل للمستهلك rate of time preference من اجل استهلاكه فى الفترة t بدلا من الفترة τ ونرمز له بالرمز $\eta_{t\tau}$

$$\eta_{t\tau} = -\frac{\partial c_\tau}{\partial c_t} - 1 \qquad t, \tau = 1, \ldots, T \qquad \tau > t \qquad (١٢\text{ـ}٥)$$

فقد يكون معدل الزمن المفضل للمستهلك سالبا لبعض انماط الاستهلاك الزمنى ، اى

انه راغبا ان يضحي بما قيمته ريالا واحد من الاستهلاك في الفترة t من اجل تامين اقل مما قيمته ريال واحد في فترة لاحقه • فلو كانت منصرفات الاستهلاك المتوقعة هي 10,000 ريالا في الفترة ال t وتكون فقط ريالا واحدا في الفترة ال τ فان $\eta_{t\tau}$ سوف تكون سالبه في اغلب الاحتمالات ويمكن اشتقاق معدلات التفضيل الزمنيه الذاتيه للمستهلك من دالة منفعة الاستهلاك consumption-utility function والتي تعتمد على مستويات منصرفات استهلاكه وتكون مستقله عن معدلات الفائدة في السوق وكذلك من فرص اقتراضه واقراضه •

شروط الميزانية The Budget Constraint

يتوقع المستهلك ان يستلم دخلا مكتسبا جاريا earned-income stream • $(y_1, y_2, \ldots, y_T)$
في فترات السوق الزمنيه ضمن الافق الزمني المخطط له • فعامة لا يكون دخله الجاري المتوقع عبر الزمن فاحد الاحتمالات هو ان يكون دخلا مكتسبا منخفضا خلال السنوات المبكرة الاولى من عمر المستهلك العملي والتي تزداد كلما اكتسب خبرة في العمل من خلال التدريب والترقيه في الوظيفه ثم يصل الى القمه خلال منتصف عمره العملي فقد يبدأ دخله المكتسب من الانخفاض عندئذ ويصبح صفرا بعد تقاعده ومهما كان دخله المكتسب الجاري فانه ينطبق في النادر مع استهلاكه الجاري المطلوب ولكنه يستطيع التوفيق بين المجريين من خلال الاقراض والاقتراض•

ان كامل مايستلمه المستهلك من دخل في فترة السوق الزمنيه ال t تكون (مجموع) دخله المكتسب ودخله من الارباح (الفوائد) interest income من السندات المحتفظ بها خلال الفترة الزمنيه السابقة $y_t + i_{t-1}b_{t-1}$ وسوف يكون دخله من الارباح موجبا اذا كانت حصيلة السندات موجبه ويكون سالبا اذا كانت حصيلته من السندات سالبه ، اى انه اذا كان عليه دين ونعرف مدخراته المتوقعة في الفترة الزمنية ال t (ونرمز لها s_t بانها الفرق بين مجموع دخله المتوقع ومجموع منصرفات استهلاكه في تلك الفترة:

$$s_t = y_t + i_{t-1}b_{t-1} - c_t \qquad t = 1, \ldots, T \qquad (١٢_٦)$$

حيث ان i_1 هو معدل الفائدة المحدد في فترة السوق الزمنيه المبدئيه وان $(t = 2, \ldots, T-1)$ هي معدل الفائدة الذي يتوقع المستهلك ان يظل سائدا الى الفترة ال t ويكون ادخاره سالبا اذا فاقت منصرفاته مجموع دخله •

فلو ان المستهلك كان عند بداية عمره الذي يكسب به ، فان حصيلته المبدئيــة من السندات (b_0) تمثل ثروته الموروثه فاذا قام بتنقيح خططه في وقت لاحق لبداية عمـــره

العطى فان حصيلته من السندات سوف تعكس ايضا نتائج قرارات الادخار الماضية ولتبسيط التحاليل الحاليه نفترض ان المستهلك فى بداية عمرة العطى وان $b_0 = 0$ فعند كل فترة زمنيه سوف يزيد المستهلك او ينقص من قيمة حصيلته من السندات بكمية ادخاره فى ذلك الوقت :

$$b_t = b_{t-1} + s_t \qquad t = 1, \ldots, T \qquad (١٢\text{—}٧)$$

فالمستهلك قد لايمكنه الادخار ويعيش على الدين خلال السنوات المبكرة الاولى من حياته العطيه عندما يكتسب دخلا قليلا بالمقارنه لان عليه ان يشترى منزلا وان يقوم برعاية عائلته الناميه ، ومن ثم يدخر لدفع ديونه ثم يكون مركزا يتحصل منه على حصيلة سندات موجبه وذلك خلال ماتبقى من حياته العطيه ، وفى الختام سوف يغزو ما ادخره ويحول سنداته الى سيوله خلال فترة تقاعده .

وبأخذ (١٢ــ٦) و(١٢ــ٧) معا فان حصيلة المستهلك المخطط لها من السندات بعد العطيات التجاريه فى فترة السوق الزمنيه الـ τ يمكن التعبير عنها بدلالة دخله المكتسب ومستويات استهلاكه ومعدلات الفائدة:

$$b_1 = (y_1 - c_1)$$
$$b_2 = (y_1 - c_1)(1 + i_1) + (y_2 - c_2)$$
$$b_3 = (y_1 - c_1)(1 + i_1)(1 + i_2) + (y_2 - c_2)(1 + i_2) + (y_3 - c_3)$$

وعموما وبالاستفاده من(١٢ــ$1a_1$) :

$$b_\tau = \sum_{t=1}^{\tau} (y_t - c_t)(1 + \xi_{t\tau}) \qquad \tau = 1, \ldots, T \qquad (١٢\text{—}٨)$$

وتساوى حصيلة المستهلك من السندات بعد عمليات المتاجره فى الفتره السوقيه الـ τ المجموع الجبرى لجميع مدخراته ولصافى تكاليف الربح او الدخل خلال تلك الفترة بحيث ان الربح يكون مركبا فى كل .

ففى حالة الفترة الزمنيه الواحده فان المستهلك الذى يحقق الامثليه سوف يشترى كمية كبيرة كافيه من كل سلعة ليصل الى درجة التشبع الكامله هذا اذا لم يكن له شرط ميزانيه وسوف تنشا حالة مماثله فى حالة تعدد الفترات اذا لم يكن هناك تحديد على مبلغ الدين الذى يستطيع تكبسه خلال عمره الزمنى ويمكن التعبير عن شرط الميزانيهفى حالة تحاليل الفترات المتعددة كضابط على حصيلة المستهلك النهائية من السندات (b_T) فقد يخطط على ان يترك عقارات (او ديون) لورثته ولكن من اجل التبسيط نفترض انه سوف يخطط على ان لايترك عقارات او ديون لورثته وبتقييم b_T من (١٢ــ٨) نجد ان شرط ميزانيته :

$$b_T = \sum_{t=1}^{T} (y_t - c_t)(1 + \xi_{tT}) = 0$$

وبالقسمة على $(1+\xi_{1T})$ وتحريك حدود منصرفات الاستهلاك الى اليمين ، فانه من الممكن كتابة شرط ميزانية المستهلك كالتالي :

$$\sum_{t=1}^{T} y_t(1+\xi_{1t})^{-1} = \sum_{t=1}^{T} c_t(1+\xi_{1t})^{-1} \qquad (١٢ـ٩)$$

لان :

$$\frac{1+\xi_{tT}}{1+\xi_{1T}} = \frac{(1+i_t)\cdots(1+i_{T-1})}{(1+i_1)\cdots(1+i_{T-1})} = \frac{1}{(1+i_1)\cdots(1+i_{t-1})} = (1+\xi_{1t})^{-1}$$

خطة الاستهلاك : The Consumption Plan

ان المستهلك يرغب في الحصول على المستوى الاعلى من مؤشر منفعته لعمره العملي(١٢ـ٤) تحت شرط ميزانيه(١٢ـ٩) تكون الدالة :

$$V^* = V(c_1,\dots,c_T) + \mu\sum_{t=1}^{T}(y_t - c_t)(1+\xi_{1t})^{-1}$$

وبوضع اشتقاقاتها الجزئيه مساويه لصفر :

$$\frac{\partial V^*}{\partial c_t} = V_t - \mu(1+\xi_{1t})^{-1} = 0 \qquad t = 1,\dots,T$$

$$\frac{\partial V^*}{\partial \mu} = \sum_{t=1}^{T}(y_t - c_t)(1+\xi_{1t})^{-1} = 0 \qquad (١٢ـ١٠)$$

ومن ثم تكون :

$$-\frac{\partial c_\tau}{\partial c_t} = \frac{(1+\xi_{1t})^{-1}}{(1+\xi_{1\tau})^{-1}} = 1+\xi_{t\tau} \qquad t,\tau = 1,\dots,T \qquad \tau > t \qquad (١٢ـ١١)$$

وبالتعويض من (١٢ـ٥)

$$\eta_{t\tau} = \xi_{t\tau} \qquad t,\tau = 1,\dots,T \qquad \tau > t$$

فالمستهلك في هذه الحاله سوف يقوم بتعديل افضلياته الذاتيه الى فرص في السوق وذلك بمساواة معدل تفضيله الزمني بين كل زوج من الفترات بمعدل العائد للسوق المقابل • فلو كانت $\eta_{t\tau}$ اقل من $\xi_{t\tau}$ فان المستهلك يستطيع شراء سندات ويستلم مبلغا اضافيا اكبر من الضروري للمحافظه على ان يكون في موضع السواء اما اذا كانت $\eta_{t\tau}$، اكبر من $\xi_{t\tau}$ فانه باستطاعته زيادة قناعته ببيع السندات وزيادة استهلاكه في الفترة t ذلك على حساب الاستهلاك في الفترة τ وبالرغم من ان $\eta_{t\tau}$ قد تكون سالبه لبعض انماط منصرفات الاستهلاك فان القيم (المثلى) الملاحظه لـ $\eta_{t\tau}$ سوف تكون موجبه دائما اذا كانت معدلات الفائدة موجبه وقد يثبت القارئ شرط الدرجه الثانيه قد تتحقق اذا كانت (١٢ـ٤) شبه ـ مقعرة بانضباط منتظم او مايعادل ذلك اذا كانت معدلات التفضيل الزمني في تناقص •

مثال عددى : اعتبر مستهلكا افتراضيا له افق زمنيا بفترتين • افترض ن دالة منفعتــه هى $U = c_1c_2$ وان دخله الفعلى ودخله المتوقع هما $y_1 = 10{,}000,\ y_2 = 5250$ تكون الدالة :

$$V^* = c_1c_2 + \mu[(10{,}000 - c_1) + (5250 - c_2)(1 + i_1)^{-1}]$$

وبوضع اشتقاقاتها الجزئيه مساويه لصفر :

$$\frac{\partial V^*}{\partial c_1} = c_2 - \mu = 0$$

$$\frac{\partial V^*}{\partial c_2} = c_1 - \mu(1 + i_1)^{-1} = 0$$

$$\frac{\partial V^*}{\partial \mu} = (10{,}000 - c_1) + (5250 - c_2)(1 + i_1)^{-1} = 0$$

فلو كان معدل الفائده هو 0.05 (خمسة فى المائه) فان منصرفات الاستهلاك المثاليــه تكون $c_1 = 7500$. $c_2 = 7875$ ويساوى معدل التفضيل الزمنى للمستهلك لهذه المنصرفـــات معدل الفائده (معدل عائد السوق) :

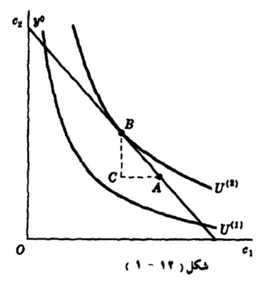
$$\eta_{12} = -\frac{dc_2}{dc_1} - 1 = \frac{c_2}{c_1} - 1 = \frac{7875}{7500} - 1 = 0.05$$

ويضمن شبه ــ تقعر دالة المنفعة المنضبط بانتظام تحقيق شرط الدرجه الثانيه ويمكـــن وصف حالة الافق الزمنى المكون من فترتين عن طريق الرسم البيانى • وذلك باعطاء تفسير جديد لرسومات منحنى السواء التقليديه • فتعطى احداثيات نقطه A فى الشكـــل (١٢ــ١) دخل المستهلك المكتسب الجارى • دع y^0 تكون القيمه الحاليه لهـــذا الدخل الجارى فيكون شرط ميزانيته :

$$y^0 - c_1 - c_2(1 + i_1)^{-1} = 0$$

ويكون المحل الهندسى لجميع نقط الاستهلاك بالقيمه الحاليه y^0 خطا مستقيما بميـل سالب يساوى معدل المقايضة للسوق $(1 + i_1)$ بين منصرفات الاستهلاك فى الفترة الزمنية الاولى والثانيه • فيمكن تحويل ريالا واحدا من الدخل فى الفترة الاولى الى $(1 + i_1)$ من الريالات لمنصرفات الاستهلاك فى الفترة الثانيه اذا قام المستهلك بتسليف شخص مـا بمعدل الفائده السائد فى السوق • وبالمثل فان $(1 + i_1)$ من الريالات من الدخل فـــى الفترة الثانيه يمكن تحويله الى ريال واحد لمنصرفات الاستهلاك فى الفترة الاولـى اذا استدان المستهلك بمعدل فائدة السوق افترض ان شرط ميزانيه المستهلـك يكون معطا الخط المرموز له بـ y^0 فى الشكل (١٢ــ١) •

فلو استلف المستهلك فى فترة السوق الزمنيه الاولى فانه سوف يتحرك عبر خط ميزانيته ، متجها الى اليمين من نقطه A فاذا قام بتسليف شخص ما فانه سوف يتحرك عبر خـــط ميزانيته متجها الى اليسار من نقطة A •



شكل (١٢ - ١)

ان المنحنيين $U^{(1)}$ $U^{(2)}$ هما عضوان من اعضاء عائلة منحنيات السواء الزمنيه فكل واحد منهما يكون هو المحل الهندسي لمنصرفات الاستهلاك التي تعطي مستوا معينا من القناعة والرضا ويكون ميل منحنى السواء الزمني هو $-(1+\eta_{12})$ وتعكس هذه المنحنيات الافتراض بان معدل التفضيل الزمني يكون في تناقص وتعطي احداثيات نقطه التماس B منصرفات الاستهلاك المثلى فالمستهلك سوف يشتري ما ثمنه AC من الريالات من السندات في فترة السوق الزمنيه الاولى وسوف يصرف المبلغ الرئيسي زائدا الارباح CB على السلع الاستهلاكيه في الفترة الزمنيه الثانية •

آثار الاحلال (التعويض) والدخل : Substitution and Income Effects

ان من الممكن فصل تاثيرات اى تغير في معدل الفائدة على مستويات استهلاك المستهلك المثلى الى اثار الاحلال والدخل بطرق شبيهة بتلك التي وظفناها في الفصل (٢ـ٥) • افترض ان الافق الزمني للمستهلك يحتوى على فترتين زمنيتين • فمن اجل تحديد تاثيرات التغيرات في معدل الفائدة ومستويات الدخل المكتسب نفاضل شروط الدرجه الاولى (١٢ـ١٠) تفاضلا كليا لـ $T=2$:

$$\begin{aligned}
V_{11}\,dc_1 + \quad V_{12}\,dc_2 - \qquad\qquad d\mu &= 0\\
V_{21}\,dc_1 + \quad V_{22}\,dc_2 - (1+i_1)^{-1}\,d\mu &= -\mu(1+i_1)^{-2}\,di_1\\
-dc_1 - (1+i_1)^{-1}\,dc_2 \qquad\qquad &= -dy_1 - (1+i_1)^{-1}\,dy_2\\
&\quad + (y_2 - c_2)(1+i_1)^{-2}\,di_1
\end{aligned} \qquad (١٢ـ١٢)$$

ان وصف المعاملات على الجانب الايسر من (١٢ـ١٢) هو نفسه الصنف لهيسيان المحدده والتي تكون موجبه بشرط الدرجه الثانيه •

وباستخدام قاعدة كريمر لحل (١٢ـ١٢) لـ dc_1

$$dc_1 = -\mu(1+i_1)^{-2}\frac{\mathscr{D}_{21}}{\mathscr{D}}\,di_1 + [-dy_1 - (1+i_1)^{-1}\,dy_2 + (y_2 - c_2)(1+i_1)^{-2}\,di_1]\frac{\mathscr{D}_{31}}{\mathscr{D}}$$
(١٣ـ١٢)

حيث ان $\mathscr{D}$ فى محددة هيسيان المحدودة وان $\mathscr{D}_{tr}$ هى المتعامل cofactor للعنصر فـى الصف الـ t والعمود الـ r وبقسمة (١٣ـ١٢) على بـ di_1 وافتراض ان $dy_1 = dy_2 = 0.$

$$\frac{\partial c_1}{\partial i_1} = -\mu(1+i_1)^{-2}\frac{\mathscr{D}_{21}}{\mathscr{D}} + (y_2 - c_2)(1+i_1)^{-2}\frac{\mathscr{D}_{31}}{\mathscr{D}} \quad (١٤ـ١٢)$$

دع y تمثل القيمة الحاليه لدخل المستهلك المكتسب الجارى :

$$y = y_1 + y_2(1+i_1)^{-1}$$

فاذا ازدنا y_1 بريال واحد او زدنا y_2 بمبلغ $(1+i_1)$ من الريالات فان كل واحد منهما سوف يزيد y بمبلغ ريال واحد فقط فمعدل الزياده فى c_1 بالنسبه لزيـادة ريال واحد فى القيمة الحاليه لدخل المستهلك المكتسب الجارى يمكن اشتقاقه مـن (١٣ـ١٢) :

$$\frac{\partial c_1}{\partial y} = \frac{\partial c_1}{\partial y_1} = (1 - i_1)\frac{\partial c_1}{\partial y_2} = -\frac{\mathscr{D}_{31}}{\mathscr{D}} \quad (١٥ـ١٢)$$

فاى تغيير فى i_1 سوف يغير القيم الحاليه لدخل المستهلك المكتسب والاستهـلاكى الجارى اعتبر هذه التغييرات بـ i_1 والمصحوبه بتغيرات فى c_1 و c_2 بحيث ان مستوى موءشر المنفعة للمستهلك يظل بدون تغيير :

$dU = V_1\,dc_1 + V_2\,dc_2 = 0.$ لان (١٢ـ١١أ) تتطلب ان $V_2/V_1 = (1+i_1)^{-1}$ فيتبع هذا ان :

$$-dc_1 - (1+i_1)^{-1}\,dc_2 = 0$$

ومن (١٢ـ١٢) يتبع هذا ان :

$$-dy_1 - (1+i_1)^{-1}\,dy_2 + (y_2 - c_2)(1+i_1)^{-2}\,di_1 = 0$$

وبالتعويض فى (١٣ـ١٢)

$$\left(\frac{\partial c_1}{\partial i_1}\right)_{U=\text{const}} = -\mu(1+i_1)^{-2}\frac{\mathscr{D}_{21}}{\mathscr{D}} \quad (١٦ـ١٢)$$

وبتعويـض $-(y_1 - c_1)(1+i_1)^{-1} = (y_2 - c_2)(1+i_1)^{-2}$ الذى يتبع من شرط الميزانيـه وبالاستفاده من (١٥ـ١٢) و (١٦ـ١٢) فانه يمكن كتابة (١٤ـ١٢) كالتالى :

$$\frac{\partial c_1}{\partial i_1} = \left(\frac{\partial c_1}{\partial i_1}\right)_{U=\text{const}} + (y_1 - c_1)(1+i_1)^{-1}\left(\frac{\partial c_1}{\partial y}\right)_{i_1=\text{const}}$$

فمجموع التاثير لتغير فى معدل الفائده يكون حاصل جمع اثار الاحلال والدخل فاثـار

الدخل تساوى معدل التغير لمنصرفات الاستهلاك بالنسبه للزيادة فى القيمة الحاليه لدخل المستهلك المكتسب الجارى مرجحه بحصلته من السندات مضروبه بعامل التخفيض •

فمن السهل تحديد اشارة اثر الاحلال فمن شروط الدرجه الاولى $\mu > 0$ ومن شروط الدرجه الثانيه $\mathscr{D} > 0$ وبتقييم $\mathscr{D}_{21}$

$$\mathscr{D}_{21} = -\begin{vmatrix} V_{12} & -1 \\ -(1+i_1)^{-1} & 0 \end{vmatrix} = (1+i_1)^{-1} > 0$$

ولهذا فان اثر الاحلال بالنسبه لـ c_1 فى (١٢ ــ ١٤) يكون سالبا ويكون اثر الاحلال بالنسبه لـ c_2 هو :

$$\left(\frac{\partial c_2}{\partial i_1}\right)_{U=\text{const}} = -\mu(1+i_1)^{-2}\frac{\mathscr{D}_{22}}{\mathscr{D}}$$

ولان $\mathscr{D}_{22} = -1 < 0$ فان اثر الاحلال بالنسبه لـ c_2 يكون موجبا فاى زيادة فى معدل الفائده سوف يخصص المستهلك على تعويض (احلال) الاستهلاك فى الفترة 2 بالاستهلاك فى الفترة 1 كلما تحرك عبر منحنى سواء زمنى معطى وهذا يتبع من الحقيقه بان الزيادة فى معدل الفائده يكون مكافئا للزيادة فى اسعار السلع فى فترة السوق الزمنيه الاولى نسبة لتلك فى الفترة الثانيه • فلو خفض المستهلك استهلاكه فى الفترة 1 واشترى سندات فان مايكسبه من ربح سوف يكون اكبر وسوف يكون قادرا على ان يشترى كمية سلع اكبر فى فترة السوق الزمنيه الثانيه لكل ماقيمته ريال واحد من المشتروات المضحى بها فى الفترة الاولى •

وبالرغم من ان اى زيادة فى الدخل قد تسبب انخفاضا فى شراء سلعة معينه الا انه من الصعب ان نتخيل وضعا يكون فيه اى زيادة فى الدخل سوف تسبب انخفاضا فى منصرفات الاستهلاك الاجماليه فى اى فترة من فترات السوق الزمنيه فقد نفترض ان ثابت ثابت $(\partial c_1/\partial y)_{i_1=}$ تكون موجبه للجميع ماعدا الحالات الغير عاديه بالمرة فلو كان هذا حقيقة فان اتجاه اثر الدخل سوف يحدد باشارة وضع السندات $(y_1 - c_1)$ للمستهلك عند نهاية المتاجره فى الفترة الزمنيه الاولى فاذا كانت حصيلة المستهلك من السندات موجبة فان اى زيادة فى معدل الفائده سوف يرفع من دخله من الارباح ويكون مكافئا لاى زيادة فى دخله المكتسب فلو كان عليه دين فان اى زياده فى معدل الفائده سوف يزيد من مصروفات ربحه وتكون مكافئه لاى انخفاض فى دخله المكتسب ففى هذه الحاله يكون كلا الاثرين سالبا ، وسوف يكون مجموع الاثر $\partial c_1/\partial i_1$ سالبا فلو كانت حصيلة سنداته موجبه فان مجموع الاثر سوف يكون موجبا او سالبا معتمدا على ماذا كانت قيمة اثر الدخل اكبر او اصغر من القيمة المطلقه لاثر الاحلال •

١٢ . ٣ نظرية استثمار الوحدات الإنتاجية :

INVESTMENT THEORY OF THE FIRM

ان عملية الانتاج لاتكون عمليه فوريه الا نادرا لانه لابد من انقضاء بعض الوقت بعد تطبيق الدواخل لتامين الخوارج افترض ان (١) مالك الوحده يشترى دواخل ويبيع خوارج فقط وذلك ضمن الفترة الزمنيه فى افقه الزمنى •

(٢) وانه يقوم بالعمليه الفنيه للانتاج فى الوقت بين الفترات الزمنيه السوقيه •

(٣) فخلال الفترة الـ t يقوم بتطبيق الدواخل التى اشتراها فى الفترة الزمنيه الـ t

(٤) ويقوم بانتاج خوارجه فى الفترة الـ $(t + 1)$ حيث يقوم ببيعها •

وتخدم هذه الافتراضات لتعريض المتاليه الزمنيه للانتاج فالتحاليل التاليه قد تعتمد على مجموعات بديله لافتراضات المتاليه الزمنيه بدون ان نفقد اى نتيجه من نتائجه الهامه • نقدم هنا دالة انتاج لخوارج ودواخل متعددة:

A many-input–many-output production function

متضمنه البعد الزمنى فيها فافتراض عدم تغير اسعار الخوارج والدواخل يجعل من الممكن معالجه منصرفات الاستثمار والايرادات من المبيعات فى كل فترة سوق زمنيه ضمن الافق الزمنى لمالك الوحده الانتاجيه كالمتغيرات الوحيده وبخضع التحاليل فى البحث عن علاقة بعضهم ببعض وتاثيرات معدلات الربح •

لقد لعبت الحالات الخاصه دورا مهما فى تطوير نظرية الاستثمار من ناحية اقتصاد الوحدات microeconomic فالحالات هذه قد تميزت على اساس بنيات وقت الخوارج والدواخل وابسط هذه الحالات هى حالة داخل فى وقت محدد تماما وخارج وقت محدد تماما *point-input–point-output* والتى تعطى الاستثمار فى راس المال العامل working capital فجميع الدواخل قد اشتريت فى احد فترات السوق الزمنيه وجميع الخوارج قد بيعت فى الفترة السوقية الزمنيه التاليه فنمو الاشجار وترك الخل لوقت معين يمثلان امثله لهذا اما حالة داخل فى اوقات متعدده وخارج فى وقت محدد تماما تغطى حالة انتاج خارج يتطلب تطبيق دواخل خلال عدد من الفترات الزمنيه المتلاحقه فبناء السفن قد يقع تحت هذا التصنيف فحالة الداخل فى وقت محدد تماما وخارج فى اوقات متعدده تغطى الاستثمار فى سلعة من السلع التى تعمر طويلا (سلعة متينه) والتى اشتريت فى فترة زمنيه معينه واستخدمت لانتاج خوارج خلال عدد من الفترات الزمنيه المتلاحقه •

واخيرا ، الحاله العامه وهى حالة داخل وخارج فى اوقات متعدده • فطبعا تحتوى الحاله الرابعه الثلاثه الحالات الاولى ففى الفصل الحالى نركز الانتباه على الحاله العامه وكذلك حالة داخل فى وقت محدد تماما وكذلك الخارج •

دالة الإنتاج على فترات زمنية متعددة :
The Multiperiod Production Function

اعتبر احد مالكي الوحدات الانتاجيه الذى يرغب فى وضع خطه انتاج مثلى لافق زمني مكون من فترات زمنيه كامله عددها L وكذلك $(L+1)$ فترات سوق زمنيه • وباتباع الرموز المستخدمه فى الفصل (٤ ـ ٦) فانه يمكن كتابة دالته الانتاجيه على النمط الضمني كالتالى :

$$F(q_{12}, \ldots, q_{s,L+1}, x_{11}, \ldots, x_{nL}) = 0 \qquad (١٢ـ١٧)$$

حيث ان q_{jt} $(j = 1, \ldots, s;\ t = 2, \ldots, L+1)$ هى كمية الخارج الـ j المؤمن خلال الفترة الـ $(t-1)$ والمباع فى فترة السوق الزمنيه الـ t وان $(i = 1, \ldots, n; t = 1, \ldots, L)$ هى كمية الداخل الـ i المشترى فى فترة السوق الزمنيه الـ t والمتاح فى عمليه الانتاج خلال الفترة الـ t فاى خوارج قد يبيعها صاحب الوحدة فى فترة السوق الزمنيه المبدئيه تكون نتيجه قرارات انتاج سابقة وسوف تدخل مستوياتها المعادلة (١٢ـ١٧) كثوابت بدلا من متغيرات • ففى فترة السوق الزمنيه الـ $(L+1)$ يخطط صاحب الوحدة لبيع الخوارج المؤمنه خلال الفترة الـ L ولكنه لا يخطط لشراء داخل لانه لا يتوقع انتاج فى اى فترة زمنيه بعد الفترة الـ L فدالة الانتاج على فترات زمنيه متعدده تربط مستويات الدواخل والخوارج لجميع الفترات الزمنيه ضمن خطة صاحب الوحدة الزمنيه فالدواخل المطبقة خلال كل فترة زمنيه تضيف لانتاج الخوارج خلال جميع الفترات الزمنيه ومن المستحيل ان ننسب خارجا معينا لدواخل طبقت خلال فترة زمنيه معينه ولكن من المحتمل التثبت من تاثيرات التغيرات الحديه وحساب الانتاج الحدى لكل خارج او من خلال كل فترة زمنيه •

دالة فرص الاستثمار : The Investment-Opportunities Function

ان باستطاعة المنتج تحقيق الحد الاعلى من ربحه من انتاج الفترات الزمنيه المتعددة تحت شرط (١٢ـ١٧) بطريقه مماثله لتلك الموصوفه فى الفصل (٤ ـ ٦) فالقارئ يحتاج فقط لاستخدام القيم الحاليه للاسعار بدلا من الاسعار البسيطه simple prices ولتركيز الاهتمام على النواحى الزمنيه للانتاج نفترض هنا ان اسعار المستقبل والحاضر لها قيم معروفه وغير متغيرة ونعامل منصرفات الدواخل وايرادات الخوارج فى كل فترة زمنيه كتغيرات مركبه والتى تكون مرتبطه بدالة فرص الاستثمار الضمنيه •

$$H(I_1, \ldots, I_L, R_2, \ldots, R_{L+1}) = 0 \qquad (١٢ـ١٨)$$

حيث ان : $I_t = \sum_{i=1}^{n} r_{it}x_{it}$ and $R_t = \sum_{j=1}^{s} p_{jt}q_{jt}$

تكون سلع مركبه ممثله الاستثمار I_t والايرادات R_τ ولقد اشتقت الداله (١٢ــ ١٨) من (١٢ــ١٧) بحيث ان الافتراض بان الشروط الحديه المناسبه قد تحققت لجميع ازواج الداخل والخوارج المتغيره والموافقه لنفس الفترة الزمنيه فلو اعطينا جميع الايرادات وجميع منصرفات الاستثمار ماعدا واحده منها فان (١٢ــ١٨) سوف تعطى القيمه الادنى لما تبقى من منصرفات الاستثمار • وبالمثل لو اعطينا كذلك جميع منصرفات الاستثمار، فان (١٢ــ١٨) سوف تعطى القيمه العظمى لما تبقى من الايرادات •

يمتلك صاحب الوحدة الانتاجيه فرص استثمار داخليه وخارجيه فهو يستطيع شراء سندات ويستثمر فى وحدة الانتاج الخاصه به فمعدلات العوائد الخارجيه تكون هى نفسها للمستهلكين، كما هو معطى بالمعادلة (١٢ــ١) ففى الحاله العامه لا يمكن تعريف متوسط معدلات عوائد السوق بطريقة موازيه لمتوسط معدلات عوائد السوق لانه من غير الممكن ان نعزى كامل الايرادات فى فترة السوق الزمنيه الـ τ للاستثمارات فى اى فترة من فترات السوق الزمنيه فكل دخل يعتمد على جميع منصرفات الاستثمار ولكن يمكن تعريف معدلات العوائد الداخليه الحديه لاى زوج ايرادات واستثمار وبافتراض ان الاستثمارات الاخرى تظل بدون تغيير قيمات معدل العائد الداخلى الحدى من الاستثمار [1] فى فترة السوق الزمنيه الـ t بالنسبه للايرادات فى الفترة الـ τ نرمز له بالرمز $\rho_{t\tau}$:

$$\rho_{t\tau} = \frac{\partial R_\tau}{\partial I_t} - 1 = -\frac{\partial H/\partial I_t}{\partial H/\partial R_\tau} - 1 \qquad \begin{array}{l} t = 1, \ldots, L \\ \tau = 2, \ldots, L+1 \end{array} \qquad (١٢ــ١٩)$$

ويعتمد كل واحد من هذه المعدلات على مستويات جميع منصرفات الاستثمار والايرادات المخطط لها •

فدوال معدل العائد الداخل الحدى المعطاة بالمعادلة (١٢ــ١٩) تكون مستقلة عن معدلات فائدة السوق وفرص التسليف والاستلاف الخاصه بمالك الوحده الانتاجيه وتعطى

---

(١) لا يوجد اسما مقبولا عامة لهذه الفكرة فقد استخدم الاسم معدل العائد الداخلى الحدى "marginal internal rate of return." من قبل

Friedrich Lutz and Vera Lutz, *The Theory of Investment of the Firm* (Princeton, N.J.: Princeton University Press, 1951)

بينما استخدم الاسم معدل العائد الحدى فوق التكلفه

"marginal rate of return over cost."

Irving Fisher, *The Theory of Interest*, (New York: Kelley and Millman, 1954),

"marginal productivity of investment,"

"marginal efficiency of investment,"

"marginal efficiency of capital."

(١٢ــ١٩) لاسعار الدواخل والخوارج المعطاه وصفا ضمن الشكل الحدى للاطار الفنى الموضوعى الذى يعمل صاحب الوحدة من خلاله فقد تكون $\rho_{t\tau}$ ساليه لبعض مجموعات الايرادات والاستثمار •

خطة الاستثمار : The Investment Plan

يرغب صاحب الوحدات الانتاجيه فى اختيار احد مجموعات الايرادات والاستثمارات الجاريه التى تحقق (١٢ــ١٨) التى تحقق له القيمه الحاليه العظمى لارباحه الجاريه تكـــون الدالة :

$$\pi^* = \sum_{t=2}^{L+1} R_t(1+\xi_{1t})^{-1} - \sum_{t=1}^{L} I_t(1+\xi_{1t})^{-1} + \mu H(I, \ldots, R_{L+1})$$

..وضع اشتقاقاتها الجزئيه مساويه لصفر ، نحصل على :

$$\frac{\partial \pi^*}{\partial R_t} = (1+\xi_{1t})^{-1} + \mu \frac{\partial H}{\partial R_t} = 0 \qquad t = 2, \ldots, L+1$$

$$\frac{\partial \pi^*}{\partial I_t} = -(1+\xi_{1t})^{-1} + \mu \frac{\partial H}{\partial I_t} = 0 \qquad t = 1, \ldots, L$$

$$\frac{\partial \pi^*}{\partial \mu} = H(I_1, \ldots, R_{L+1}) = 0$$

حيث ان $\mu > 0$ (١) وبالتعويض من (١٢ــ١٩) نجد ان شروط الدرجه الاولى تتطلـــب بان :

$$\rho_{t\tau} = \xi_{t\tau} \qquad \begin{matrix} t = 1, \ldots, L \\ \tau = 2, \ldots, L+1 \end{matrix} \qquad (١٢ــ٢٠)$$

فصاحب الوحدة يجب ان يساوى كل واحد من معدلات العائد الداخليه الحديه بمعدل عائد السوق المقابل •

وتتطلب شروط الدرجة الثانيه بان :

$$\begin{vmatrix} H_{11} & H_{12} & H_1 \\ H_{21} & H_{22} & H_2 \\ H_1 & H_2 & 0 \end{vmatrix} < 0, \quad \begin{vmatrix} H_{11} & H_{12} & H_{13} & H_1 \\ H_{21} & H_{22} & H_{23} & H_2 \\ H_{31} & H_{32} & H_{33} & H_3 \\ H_1 & H_2 & H_3 & 0 \end{vmatrix} < 0 \ldots \qquad (١٢ــ٢١)$$

---

(١) تتطلب شروط الدرجة الاولى ان $\partial H/\partial I_t$ وان $\partial H/\partial R_t$ يكونا باشارتين مختلفتين ونفترض بان تكون دالة فرص الاستثمار بحيث ان $\partial H/\partial R_t > 0$ وان $\partial H/\partial I_t < 0$ وذلك لحظة الانتاج المثلى • فلو تحصلنا على حل يعكس الاشارة فانه من الضرورى فقط ان نعيد تعريف (١٢ــ١٨) على انها $-H$ وذلك للحصول على النمـــط المطلوب •

حيث ان H_j هى الاشتقاق الجزئى من الدرجة الاولى للدالة الضمنيه (١٢ـ١٨) بالنسبه للمتغير الـ j وان H_{jk} هى الاشتقاق الجزئى من الدرجة الثانيه بالنسبه للمتغيرين الـ j والـ k فجميع المحددات السابقه يجب ان تكون سالبه[٢] فهذه الشروط يجب ان تتحقق بغض النظر عن الترتيب الذى ذكرت به الايرادات والاستثمارات $2L$ •

وبفك المحددة الاولى من المعادلة(١٢ـ٢١)

$$2H_1H_2H_{12}-H_{22}H_1^2-H_{11}H_2^2<0 \qquad (١٢ـ٢٢)$$

فمعدل تغير معدل العائد الداخلى الحدى للاستثمار فى فترة السوق الزمنيه الـ t بالنسبه للايراد فى الفترة الـ τ يكون :

$$\frac{\partial\rho_{t\tau}}{\partial I_t}=\frac{\partial^2R_\tau}{\partial I_t^2}=-\frac{1}{H_2^3}(H_{11}H_2^2-2H_{12}H_1H_2+H_{22}H_1^2)$$

حيث ان $H_1=\partial H/\partial I_t$ وان $H_2=\partial H/\partial R_\tau$ وبما ان (١٢ـ٢٢) يجب ان تتحقق للمتيغيرات المدونه بهذا الترتيب ولان $H_2>0$ فان(١٢ـ٢٢) تتطلب بان :

$$\frac{\partial\rho_{t\tau}}{\partial I_t}<0 \qquad \begin{matrix} t=1,\ldots,L \\ \tau=2,\ldots,L+1 \end{matrix} \qquad (١٢ـ٢٣)$$

ولهذا فان شروط الدرجة الثانيه تتطلب بان يكون جميع معدلات العائد الداخليه الحديه فى تناقص •

فلو لم يتحقق شرطى (١٢ـ٢٠) و(١٢ـ٢٣) فان صاحب الوحدة يستطيع زيادة القيمة الحاليه لربحه اما عنطريق بيع السندات والتوسع فى استثماراته الداخليه او عن طريق شراء السندات وتقليص استثماراته الداخليه •

داخل وخارج فى وقت محدد تماماً Point-Input–Point-Output

ففى ابسط الحالات يقوم صاحب الوحدة بالاستثمار فى احد فترات السوق الزمنيه ويستلم الايراد الحاصل فى الفترة اللاحقه • فقد يعيد العمليه الانتاجيه عبر الزمن ولكنانتاجه فى فترة السوق الزمنيه الاولى سوف تؤثر فقط على ايراداته فى الفترة الثانيه ويتضمن افقه الزمنى المخطط الفعال على فترة زمنيه واحده كامله وفترتين من فترات السوق الزمنيه •

ان الممكن وضع ايرادات صاحب الوحدة كدالة موضحة بالنسبه لمنصرفات استثماراته:

---

(٢) تتطلب شروط الدرجه الثانيه بان تكون الحدود الرئيسيه الصغرى فى محددة هيسيان المكونه من اشتقاقات الدرجةالثانيه لـ π^* محددة باشتقاقات الدرجة الاولى لـ $H(I_1,\ldots,R_{L+1})$ متبادلة فى الاشارات بحيث تكون موجبه وسالبه وهكذا ونحصل على شروط (١٢ـ٢١) باخذ$\mu>0$ كعامل مشترك بحيث ان $\mu>0$ •

$$R_2 = h(I_1) \qquad (٢٤_١٢)$$

ففى هذه الحاله الخاصه تكون جميع الايرادات فى فترة السوق الزمنيه الثانيه منسوبه الى الاستثمارات المتخذه فى الفترة الاولى وانه من الممكن تعريف متوسط معدل العائـــد الداخلى :

$$\frac{R_2 - I_1}{I_1} = \frac{h(I_1)}{I_1} - 1$$

ويمكن مقارنة متوسط معدل العائد الداخلى بمعدل عائد السوق i_1 المقابل • فصاحب الوحدة يرغب فى تحقيق الحد الاعلى من القيمه الحاليه لارباحه من العمليـــه الانتاجيه :

$$\pi = R_2(1 + i_1)^{-1} - I_1$$

وبالتعويض من (١٢_٢٤) فانه يمكن ان تنص على π بدلالة I_1 فقط :

$$\pi = h(I_1)(1 + i_1)^{-1} - I_1$$

وباستخدام التفاضل ،

$$\frac{d\pi}{dI_1} = h'(I_1)(1 + i_1)^{-1} - 1 = 0 \qquad (٢٥_١٢)$$

وباعادة ترتيب الحدود ، وبالتعويض من (١٢_١) و(١٢_١٩) يصبح شرط الدرجـــه الاولى :

$$\rho_{12} = i_1 = \xi_{12}$$

فصاحب الوحدة يساوى معدل العائد الداخل الحدى بمعدل عائد السوق المقابـــل والذى هو معدل فائدة السوق فى هذه الحالة •

ويتطلب شرط الدرجه الثانيه بان:

$$\frac{d^2\pi}{dI_1^2} = h''(I_1)(1 + i_1)^{-1} < 0$$

فاذا كانت $i_1 > -1$ فان :

$$h''(I_1) < 0 \qquad (٢٦_١٢)$$

وهذا ينص على ان معدل العائد الداخلى الحدى يكون فى تناقص•

تخيل ان (١٢_٢٦) قد تحققت ولكن $\rho_{12} > \xi_{12}$ فان العائد الحدى من استلاف الارصده للاستخدام الداخلى سوف يفوق تكلفة ارباحها • ويستطيع صاحب الوحـــدة عندئذ من زيادة ربحه بالتوسع فى استثماراته وبالعكس لو ان $\rho_{12} < \xi_{12}$ فانه ســوف يكسب اقل على كل ريال حدى لاستثماراته الداخليه مما يجب عليه ان يدفع من اجلهـــا ويستطيع ان يزيد من ربحه بتقليص استثماراته لشراء السندات •

وبتفاضل (١٢_٢٥) تفاضلا تاما :

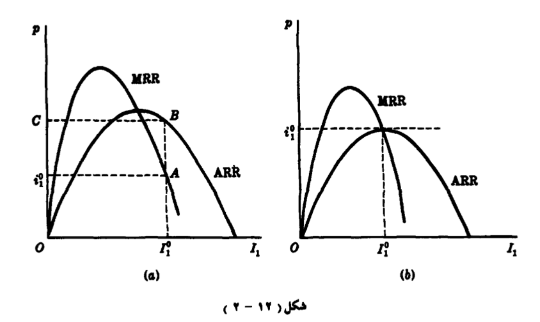
$$h''(I_1)\, dI_1 = di_1$$

وان

$$\frac{dI_1}{di_1} = \frac{1}{h''(I_1)} < 0 \qquad (٢٧_١٢)$$

فلو تحقق شرط الدرجه الثانيه فان (١٢ــ٢٧) سوف تكون سالبه اى زيادة فى معـــدل الفائدة سوف يجعل صاحب الوحدة مضطرا لتخفيض منصرفات استهلاكه •

ويوضح لنا الشكل (١٢ــ٢ ا) بعض صور (اشكال) دالتى متوسط العائد الداخلـــى ARR والعائد الداخلى الحدى المحتمله MRR •



شكل (١٢ - ٢)

فكلا المعدلين (المعدل المتوسط والمعدل الحدى) سوف يزداد ثم يبلغا القمــه ثم يعودا للانخفاض كلما ازدادت الاستثمارات فلو كان معدل الفائدة هو i_1^0 فان صاحب الوحدة سوف يستثمر مبلغ I_1^0 من الريالات • فمن اجل هذا المستوى من الاستثمارات يكون معدل عائد السوق مساوى لمعدل العائد الداخلى الحدى (وهذا شـــــرط الدرجه الاولى) ، ويكون المعدل الداخلى الحدى فى تناقص (وهذا شرط الدرجــه الثانيه) وتكون كامل تكلفة الربح معطاة بالمساحة $OI_1^0Ai_1^0$ ويكون كامل عوائـــده معطاة بالمساحة OI_1^0BC ويكون صافى عوائده معطاة بالمساحة i_1^0ABC

فتحت نظام المنافسه الكاملة سوف تساق صافى عوائد ممثل الوحدات لكل صناعة الى اسفل (او ازداد) حتى تصبح صفرا وذلك بسبب دخول entry (او خروج exit) وحدات اخرى ويصور الشكل (١٢ــ٢ب) توازن المنافسه على المدى الطويل ويكون استثمارات ، ممثل الوحدات المثلى هى I_1^0 ويكون معدلى متوسط وحدى العائد الداخلـــــى متساويين ويكون متوسط معدل العائد الداخلى مساويا الان لمعدل الفائدة •

١٢ – ٤ تحديد معدل الفائدة : INTEREST-RATE DETERMINATION

ان من الممكن الاستفاده من طرق تحاليل التوازن الجزئي وتوازن الاسواق المتعددة في اسواق السندات وان من الممكن ادخال تحديد معدل الفائدة ضمن عمليه التسعير العامه ويمكن الحصول على قياس قريب جدا من التحاليل المبكره لتوازن السوق اذا استخدمنا ارصدة الاقراض loanable funds بدلا من السندات كسلعة معروضة للبيع [١] فالطلب على السندات (اوعرض) يكون مطابقا لعرض ارصدة الاقراض (او الطلب ل) فمعدل الفائدة هو سعر استخدام ارصدة الاقراض فترة زمنيه معينه ونعبر بالطريقة التقليديه عن معدلات الفائدة كنسب للمبالغ المقترضه ولكن يمكن التعبير عنها في حدود النقود الحسابيه money of account مثل باقي الاسعار الاخرى •

د ع (100 ريال) تخدم كوحدة قوة الشراء فمعدل الفائدة i_t يكون عندئذ مطابقا (معادلا) لسعر $100i_t$ لكل وحدة من وحدات قوة الشراء •

اولا ، اعتبر تحاليل التوازن الجزئي لسوق ارصدة الاقراض ضمن شروط توازن الفرد المشتقه في الفصل (١٢–٢) و(١٢–٣) يمكن التعبير عن فائض الطلب الحالي لارصدة الاقراض من قبل كل مستهلك ومالك بدلالة معدلات الفائدة الجاريه والمتوقعه لانه من الاسهل استخدام دوال فائض الطلب بدلا من دوال العرض والطلب لان المستهلكين واصحاب الوحدات قد يطلبوا ارصدة اقراض عند معدل الفائده ويعرضوها عند معدل فائدة اخر •

يجب صياغة نظرية توقعات معدل الفائدة قبل ان تحدد توازن السوق ومن الممكن الاستفادة من نظريات توقع مختلفه فاحد الاحتمالات هو افتراض ان الافراد يتوقعون ان تكون معدلات الفائدة في المستقبل ثابته عند مستوى معين ثابتا بغض النظر عن المعدلات الجاريه ، فتدخل معدلات الفائدة المستقبليه عندئذ في دوال فائض الطلب الجاري كثوابت بدلا من متغيرات • هناك احتمال اخر هو ان تكون معدلات الفائدة في المستقبل مساوية لمعدلات الفائدة الحاليه $i_1 = i_2 = i_3 \ldots$ وهناك ايضا احتمالا اخر هو ان التوقع بان التغير المطلق الجاري لمعدل الفائدة سوف يتحقق في المستقبل :

$i_1 - i_0 = i_2 - i_1 = i_3 - i_2 = \ldots$ اوعلى وجه العموم $i_t = i_0 + t(i_1 - i_0)$

فكل واحد من هذه الافتراضات يسمح لفائض طلبات الافراد بان يكون بدلالة معدل الفائده الجاري فقط ونبني دالة فائض الطلب الاجمالي بالحصول على حاصل جمع دوال الافراد وبما ان فائض طلبات الافراد قد حولت الى دوال خاصه بمعدل الفائده الجاري

---

(١) لقد افترضنا في التحاليل الراهنه انه لا توجد نقود متداوله circulating money ولكن ارصدة الاقراض تمثل عامة قوة الشراء معبرا عنها في حدود النقود الحسابيه •

قبل القيام بتخطيه الاجمال ، فانه ليس من الضروري ان يخطط الافراد لافاق زمنيه باطوال متساويه فيكون معدل الفائده الجاري التوازني هو ذلك المعدل الذي يكون عنده فائض الطلب لارصدة الاقراض الجاريه تساوي صفر فهو يعكس التفضيل الزمني time preference وانتاجيه الاستثمار ففي حالة التوازن يكون معدل التفضيل الزمني لكل مستهلك ومعدل العائد الداخلي الحدي لكل منتج مساويان لمعدل الفائدة •

ويمكن توسيع نظرية اوازن الاسواق المتعددة لتحتوي على معدل الفائدة وتوقعات الفترات المتعدده فيجب تقديم نظريات الاسعار وتوقعات معدل الفائده لكي نسمح لفائض طلبات الافراد لكل سلعة وكذلك ارصدة الاقراض بان تكون بدلالة الاسعار الحالية ومعدل الفائدة الجاري فقط [1] ومن ثم نقرر توازن الاسواق المتعددة بالمتطلب بان يكون فائض الطلب لكل سلعة ولكل ارصدة الاقراض مساويا لصفر في نفس الوقت •

لقد تركنا صياغة المتطلبات الرياضيه للحالات الخاصه بتوازن السوق المنفردة والاسواق المتعددة كتمرين للقارئ •

١٢ – ٥ نظرية الاستثمار والدور الزمني :

INVESTMENT THEORY AND THE ROLE OF TIME

تتميز نظريه الاستثمار بالحقيقه التي تنص على انه لابد من مضي وقت بين استعمال الدواخل وبين الحصول على الحصيلة المرغوبه من الخوارج فطريقة الفترات المتعددة تميل الى حجب او ابهام بعض مفاهيم وقت الانتاج وزمنه فالمتغيرات سوف تحدد بوقت زمني معين dated ولكن تغيرات الايرادات والاستثمارات قد حددت بوحدات زمنيه متكاملة فالتعريف المنفصل او المتميز للزمن سوف يجعل من الصعوبه التعامل مع المسائل التي يكون فيها مضي الوقت الذي يتم فيه استثمارات الداخل مهم جدا • فالادوات الضروريه للمعالجه المتواصله للزمن قد طورت وطبقت في هذا الفصل فالتطبيقات والاستعمالات تعطينا امثله لحالات الداخل والخوارج في وقت محدد تماما وحالات الداخل المتصله والخوارج في وقت محدد تماما وحالات الداخل في وقت محدد تماما والخوارج المتصله •

the point-input–point-output, continuous-input–point-output, and point-input–continuous-output cases.

فالتحاليل الاجهزه المتينه في الفصل (١٢ــ٦) تعطي امثله لحالة الدواخل المتصلة

---

(١) راجع الكتاب التالي من اجل نظرية معينه لتوقعات الاسعار :

J. R. Hicks, *Value and Capital* (2d ed., Oxford: Clarendon Press, 1946), chap. XVI

والخوارج المتصله continuous-input–continuous-output •

التخفيض والتركيب المستمر Continuous Compounding and Discounting

نفترض هنا ان الزمن يكون متصلا وان الصفقات قد تتم عندى اى نقطه من الزمن فالفترة الزمنيه مثل السنة الواحده تكون ضرورية لتعطى وحدة نستطيع ان نقيس بها الزمن او الوقت ولكن ليس لها اى اهميه اخرى • وبما ان مضى الوقت elapsed time يكون الان بصفة متغير من المتغيرات فاننا ند ع $t = 0$ تمثل الزمن الحاضر وتكون القيمه $t = \tau$ تمثل نقطة ما فى فترة من فترات الزمن τ عندئذ حيث ان τ لاتحتاج لان تكون عدد صحيحا integer •

فالاجراءات المتبعه فى الفصل (١٢ــ١) لاتسمح بتحديد القيم الحاليه والمركبه لمجموعات مستحقه فى الفترات التى لاتكون فيها t عددا صحيحا ولاننا افترضنا ان الزمن يكون متغيرا متصلا فان الفائدة سوف يفترض ان تكون مركبه باستمرار (فائدة مركبة باستمرا) فلو كانت الفائدة فائدة مركبه مرة واحده فى السنه فان اى مبلغا اوليا w سوف يزداد الى $w(1+i)^t$ فى عدد t من السنوات فلو كانت الفائده مركبه مرتين فى العام فان نصف معدل الفائدة السنوى سوف يستعمل لكل سته اشهر وسوف تزداد w الى $w(1+i/2)^{2t}$ فى عدد t من السنوات •
وعموما اذا كانت الفائدة مركبه عدد n فى العام ، فان w سوف تزداد الى $w(1+i/n)^{nt}$ فى عدد t من السنوات •

ونحصل على اثر التركيب المتصل continuous compounding بجعل n تقترب من ∞ د ع $z = (1+i/n)^{nt}$ فبدلا من ايجاد $\lim_{n\to\infty} (z)$ فانه من الافضل ان ناخذ اللوغاريتم الطبيعى ثم نجد $\lim_{n\to\infty} [\ln (z)]$ فيمكن كتابة اللوغريتم الطبيعى كخارج قسمه دالتين بدلالة n :

$$\ln (z) = nt \ln (1+i/n) = \frac{\ln (1+i/n)}{1/nt} = \frac{h(n)}{g(n)} \qquad (١٢ــ٢٨)$$

فنجد ان كلا من المقام والبسط فى (١٢ــ٢٨) يقترب من صفر كلما اقتربت n من ∞.

وسوف نوظف قاعدة لوبيتال L'Hôpital's rule (١) لايجاد النهايه limit :

$$\lim_{n\to\infty} [\ln (z)] = \lim_{n\to\infty} \frac{h'(n)}{g'(n)} = \lim_{n\to\infty} \frac{-(i/n^2)/(1+i/n)}{-(1/n^2t)} = \lim_{n\to\infty} \frac{it}{1+i/n} = it$$

وحيث ان اللوغاريتم الطبيعى يمثل دالة متصله ،

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{i}{n}\right)^{nt}=e^{it}$$

حيث ان العدد الاصم(الغير جذرى) $e \approx 2.71828$ يكون القاعده لنظـــام اللوغريتمات الطبيعيه •

فلو كانت الفائدة مركبه باتصال ، فان قيمة المبلغ الرئيسى والربح المركب بعد t من السنين للاستثمار الحالى w هو we^{it} حيث ان i هى معدل الفائـــدة فى السنه والذى افترض فيه عدم التغير ، وحيث ان t قد تاخذ اى قيمه غير سالبــه • فالقيمه الحاليه للمبلغ u مدفوعا عند حلول الوقت t يكون ue^{-it} لان اى استثمار حالى بمبلغ ue^{-it} فى السندات سوف تكون له قيمة مساويه لـ u عند حلـــول الوقت t •

القيم المتوقفة والقيم عند نقطة ما فى الزمن : Point and Flow Values

لقد افترضنا ان الانتاج والاستهلاك يحدثان باستمرار واتصال عبر الزمن وذلـــك ضمن اطار الفترات المتعددة • ولكن تشترى الداخل وتتحمل التكاليف وتباع الخـوارج وتتحقق الايرادات وذلك فقط فى فترات السوق المنفصله او المميزة فهذه القيم عند نقطـه ما فى الزمن(point values) يمكن تعميمهـــا وبسهولة لتغطى الاطار المتصـــل فالصفقات قد تحدث فى اى نقطه من الزمن ، وقد تكون قيمها بدلالة الوقت الذى حدثت عنده • وللتوضيح دع R_T تكون الايرادات المحققه فى الوقت T ودع R_T تكون معطاة بالدالة المتصله $R(T)$ فتكون القيمه الحاليه للايرادات هى $R(T)e^{-iT}$ ويكون اشتقاقها الزمنى هو :

$$\frac{d[R(T)e^{-iT}]}{dT}=[R'(T)-iR(T)]e^{-iT}$$

وهذا الاشتقاق الزمنى هو الايراد الحدى المخفض بالنسبه للزمن •

ومن الممكن ايضا تحقيق الداخل والخوارج والتكاليف والايرادات ككميات متدفقه فى وقت ما وذلك فى التحاليل المتصله •فالكميات المتدفقه Flows قد تحدث بمعدلات ثابته عبر الزمن ، او قد تكون بدلالة الزمن (او الوقت) اعتبر ايرادات متصله متغيرة متغقـــه دع $R=R(t)$ تكون معدل التدفق عند الخطه t وتقاس بالريالات كل سنه •

ولكن لايمكن تحقيق ايرادات فى لحظة واحده • انما يمكن تحقيق ايرادات محـــدده وذلك عبر فترة زمنيه محدده • فالقيمة الحاليه للايرادات الجاريه $R(t)$ من $t=0$ الى $t=T$ والتى نرمز لها بالرمز R_{0T} تكون معطاة بالتكامل المحـــــــدد (definite integral) :

$$R_{0T} = \int_0^T R(t)e^{-it}\,dt$$

ويكون الاشتقاق الزمني time derivative للايراد المخفض الجاري:

$$\frac{dR_{0T}}{dT} = R(T)e^{-iT}$$

حيث انه يمثل القيمه الحاليه لمعدل التدفق عند $t = T$ •

فالرمز $R(T)$ استخدم ليدل على القيمه عند نقطة ما من الزمن point value وكذلك معدل التدفق عند نقطة ما عبر الزمن • فالتمييز بينهما يجب ان يكون واضحا من المحتوى الذى يستخدم فيه الرمز •

اعتبر الدخل الجارى $R(t)$ من صفر الى T واعتبر ايضا القيمه عند نقطة ما عبر الزمن T بقيمة حالة متساويه :

$$\int_0^T R(t)e^{-it}\,dt = R_T e^{-iT}$$

وبالحل لقيمة R_T

$$R_T = \int_0^T R(t)e^{-i(T-t)}\,dt \qquad (١٢_٢٩)$$

والتى تمدنا بالسبل لتحويل الكمية المتدفقه الى مايعادلها من قيمه عند نقطة ما عبرالزمن اعتبر الان تدفق دخل ثابت a بقيمة حالية مساويه لتلك الخاصه بقيمه عند نقطة ما لفترات زمنيه T عندئذ :

$$R_T e^{-iT} = \int_0^T ae^{-it}\,dt = a\int_0^T e^{-it}\,dt = a\delta$$

حيث ان :

$$\delta = \frac{1 - e^{-iT}}{i} = \int_0^T e^{-it}\,dt \qquad (١٢_٣٠)$$

تمثل القيمه الحاليه لدخل جارى بما قيمته ريالا واحدا لعدد T من السنين واخيرا ، بالحل لقيمة a :

$$a = \frac{i}{(e^{iT} - 1)} R_T$$

والتى تمدنا بالسبل لتحويل قيمة نقطة عند زمن ما الى ما يعادلها من تدفق ثابت•

داخل فى وقت محدد وخارج فى وقت محدد : Point-Input–Point-Output

ان ابسط مسائل الاستثمار التى يكون فيها عامل الزمن متغيرا هى تلك التى تحدث اذا استخدمت جميع الداخل عند نقطة واحده فى وقت محدد وان جميع الخوارج قد بيعت عند نقطة متاخرة فى وقت محدد ايضا •اعتبر مالك وحدة ما مندمجا فى عملية

التخليل (عملية الحصول على الخل) فهو يقوم بشراء برميلا من عصير العنب مقابـــل I_0 من الريالات وينتظر خلال عملية التخمر • افترض ان عمليه التخمر لا تكلف شيئـــا بحيث ان تكاليفه الاخرى تكون هى الفائدة الضائعه فقط foregone interest علـــى استثماره المبدئى • وافترض كذلك ان قيم بيع الخل قيمة عند نقطة ما عبر الزمـــن point value يكون بدلالة طول وقت تخمرها $R(T)$ •

فمسالة تحقيق الحد الامثل لصاحب الخل هى ان يختار فترة زمنية للتخمر اى ان عليه ان يختار قيمة لـ T تحقق له الحد الاعلى من القيمه الحاليه لربحه :

$$\pi = R(T)e^{-iT} - I_0$$

وبوضع اشتقاق π بالنسبه لـ T مساويا لصفر ،

$$\frac{d\pi}{dT} = [R'(T) - iR(T)]e^{-iT} = 0$$

وبالقسمه على $e^{-iT} \neq 0$ ثم اعادة ترتيب الحدود ، نحصل على :

$$\frac{R'(T)}{R(T)} = i \qquad (١٢_٣١)$$

فصاحب المشروع يجب ان يساوى معدل العائد الحدى النسبى له بالنسبه للوقـــت $[R'(T)/R(T)]$ بمعدل التكلفه الحديه النسبيه بالنسبه للزمن (i) •

ويتطلب شرط الدرجة الثانيه ان :

$$\frac{d^2\pi}{dT^2} = [R''(T) - 2iR'(T) + i^2R(T)]e^{-iT} < 0$$

وبالتعويض من (١٢_٣١) لـ i وبالضرب بـ $e^{iT}/R(T) > 0$

$$\frac{R''(T)R(T) - [R'(T)]^2}{[R(T)]^2} < 0 \qquad (١٢_٣٢)$$

وهذه هى اشتقاق $R'(T)/R(T)$ فمعدل العائد الحدى النسبى بالنسبه للزمـــن يجب ان يكون فى تناقص ، اى ان اشتقاقه يجب ان يكون سالبا • فلو تحققت كلا مـــن (١٢_٣١) و (١٢_٣٢) عند $T = T^0$ فان المكتسبات الحديه لصاحب الخل من الخـل سوف تفوق مكتسباته من استثمار $R(T)$ فى سوق السندات هذا اذا كانت فترة استثمـــاره اصغر بقليل من T^0 وسوف تكون مكتسبـات اقل مكتسباته من السندات هذا اذا كانت فترة الاستثمار اكبر بقليل من T^0 فمن الممكن تحديد اثر تغير معدل الفائدة على فترة التخمر بتفاضل (١٢_٣٠) تفاضلا تاما :

$$R''(T)\,dT - iR'(T)\,dT - R(T)\,di = 0$$

وانه كذلك :

$$\frac{dT}{di} = \frac{R(T)}{R''(T) - iR'(T)} < 0 \qquad (١٢_٣٣)$$

فبسط (١٢ــ٣٣) يكون موجبا • وتتطلب (١٢ــ٣٢) مع (١٢ــ٣١) ان مقام (١٢ــ٣٣) يكون سالبا • فاى زيادة فى معدل الفائدة سوف يقود صاحب النخل الى تقصير فترات التخليل، وان اى نقص فى معدل الفائدة سوف يقوده الى تطويل فترات التخليل •

دواخل متصلة وخارج عند وقت محدد : Continuous-Input–Point-Output

اعتبر العمليه الاستثماريه التى يتحصل من خلالها تكلفة متدفقة عبر الزمن مثال ذلك الشخص الذى يقوم بزرع الاشجار • فهو يقوم بشراء النباتات الصغيرة seedling بمبلغ I_0 من الريالات عند النقطه $t = 0$ من الزمن ويتحمل نفقات الزراعة المتدفقه والتى تساوى $G(t)$ من الريالات فى كل سنه وذلك بينما تاخذ النباتات الصغيرة فى النمو ، ثم يقوم ببيع النخله بمبلغ $R(T)$ من الريالات عند النقطه $t = T$ من الزمن •
فتكون القيمه الحاليه لربحه هى :

$$\pi = R(T)e^{-iT} - I_0 - \int_0^T G(t)e^{-it}\,dt$$

وبوضع اشتقاق π بالنسبه لـ T مساويا لصفر ،

$$\frac{d\pi}{dT} = [R'(T) - iR(T) - G(T)]e^{-iT} = 0$$

وبالضرب فى e^{iT} ثم باعادة ترتيب الحدود ،

$$\frac{R'(T) - G(T)}{R(T)} = i$$

فصاحب المزرعه سوف يبيع النخله عندما يكون معدل عائده الحدى النسبى بالنسبه للوقت غير متضمنا تكاليف الفلاحة والزراعه مساويا لمعدل الفائده • ويتطلب شرط الدرجه الثانيه بان يكون معدل عائده الحدى الصافى النسبى فى تناقص بالنسبه للزمن • فاى زيادة فى معدل الفائدة سوف يقصر من فترة النمو •

دواخل فى وقت محدد وخوارج متصلة : Point-Input–Continuous-Output

اعتبر الان الحاله التى يحقق فيها استثمارا واحدا وليكن فى الاجهزه المتينه ايراد جاريا عبر الزمن • افترض للتبسيط ان الاجهزه تكسب ايرادا بمعدل ثابت من الريالات فى السنه خلال حياتها مساويا لـ R وافترض ايضا ان تكلفة الاستثمار فى هذه الاجهزه تكون دالة متصله بالنسبه لعمر الاجهزه : $I_0 = I(T)$ حيث ان $I'(T) > 0$ وتكون القيمه الحاليه للربح من تشغيل الاجهزه هى :

$$\pi = \int_0^T Re^{-it}\,dt - I(T)$$

depreciation يمكن الان فصل مسالة تحقيق الامثليه لصاحب الاله الى جزئين:

(١) تحديد مستويات الداخل والخوارج المثلى لكل نقطة زمنيه وكذلك خلال الفترة التى تكون فيها الاله مستخدمه •

(٢) تحديد عمر الة واحده او اكثر •

وتعتبر اولا عطيه تحديد مستويات الداخل والخوارج المثلى • ثم تحدد بعد ذلـــك المقياس (او المعيار) لتحديد العمر الامثل لالة واحده ثم لسلسلة غير منتهيه مـــن الالات •

دالة شبه الريع (الايجار) The Quasi-Rent Function

افترض ان صاحب الاله قد قرر استعمالها من $t = 0$ الى $t = T$ فاذا اعطينا هذا الاقرار فانه من الممكن اهمال التكلفه المبدئيهوقيمة الخردة للالة وتكون مشكلة صاحـــب الاله هى تحقيق الحد الاعلى من القيمه الحاليه لتدفق شبه الريع من تشغيل الاله ، اى الفرق بين القيمه الحاليه لتدفق ايرادات البيع والقيمه الحاليه لتدفق التكلفه المتغيـــرة variable cost وبمـــــا ان الايرادات والتكلفات عند نقاط زمنيه مختلفه تكونمستقله فى الحالات المعتبره هنا ، فان صاحب الاله يستطيع تحقيق الحد الاعلى منالقيمـــه الحاليه لتدفق شبه الريع الخاص به خلال عمر الاله وذلك بتحقيق الحد الاعلى لمعـدل تخفيض تدفق شبه الريع عند كل نقطه زمنيه وزيادة على ذلك وبما ان عامل التخفيـــض e^{it} يكون ثابتا لاى قيمه ثابته لـ t فان صاحب الاله يستطيع الوصول الـــــى النتيجه المطلوبه بتحقيق الحد الاعلى من معدل تدفق شبه الريع عند كل نقطه زمنيـــه بدون تخفيض.

فيكون معدل تدفق شبه الريع عند اللحظه t هو Z_t :

$$Z_t = pq_t - C(q_t) - M(q_t, t) \qquad (١٢_٣٦)$$

وبوضع اشتقاق Z_t بالنسبه لـ q_t مساويا لصفر ،

$$\frac{\partial Z_t}{\partial q_t} = p - \frac{dC_t}{dq_t} - \frac{\partial M_t}{\partial q_t} = 0$$

$$p = \frac{dC_t}{dq_t} + \frac{\partial M_t}{\partial q_t} \qquad (١٢_٣٧)$$

فصاحب الاله يساوى معدل تدفق تكلفته الحديه ، والتى تكون فى هذه الحاله حاصـل جمع تكلفات الداخل والمحافظة على الاله ، بالمعدل الثابت لتدفق الايراد الحدى ، p ويمكن للقارئ التحقق من ان شرط الدرجه الثانيه يتطلب بان يكون حاصل جمـــع التكلفات الحديه فى ازدياد مع الخارج •

وبوضع اشتقاق π بالنسبة لـ T مساويا لصفر ،

وكذلك :

$$\frac{d\pi}{dT} = Re^{-iT} - I'(T) = 0$$

$$Re^{-iT} = I'(T) \qquad (٣٤_١٢)$$

وتحدث الحياة المثلى للاجهزة عند النقطه التى تكون عندها القيمه الحالية للايـــرادات الاضافيه من زيادة المتانه مساويه للتكلفه الحديه للمتانه :

ويتطلب شرط الدرجة الثانيه لتحقيق الحد الاعلى بان يكون :

$$\frac{d^2\pi}{dT^2} = -iRe^{-iT} - I''(T) < 0 \qquad (٣٥_١٢)$$

وسوف يكون من الضرورى تحقيقه اذا كانت التكلفه الحديه للمتانه فى تزايد اى انــه اذا كانت $I''(T) > 0$ وبتفاضل (١٢ــ٣٤) تفاضلا تاما تم حلها لـ dT/di.

$$\frac{dT}{di} = \frac{TRe^{-iT}}{-iRe^{-iT} - I''(T)} < 0$$

لان المقام يكون سالبا بـ (١٢ــ٣٥) فاى زيادة فى معدل الفائدة سوف يخفض مـــن المتانه ، وان اى تخفيض سوف يزيد من المتانه •

١٢ - ٦ تقاعد وابدال الأجهزة المتينة :

RETIREMENT AND REPLACEMENT OF DURABLE EQUIPMENT

ان اتخاذ اعتبارات اخرى للاجهزة المتينه المبنيه على مجموعة افتراضات اخرى تعطى امثلة الدواخل المتصله والخوارج المتصاة •

افتراضـات : Assumptions

اعتبر الة تستخدم لانتاج خارج واحد هو Q يباع بسعر تنافسى p غير قابـــل للتغير عبر الزمن • دع q_t تشير الى تدفق الخارج عند اللحظه t من الزمـــن فيكون الايراد المقابل المتدفق هو pq_t فهذه الاله قد تم شراؤها عند $t = 0$ بالتكلفه الثابته I_0 فالتكلفة المتدفقة للداخل C_t تكون بدلالة q_t وتكون التكلفه المتدفقه للمحافظة على الاله هى M_t بدلالة كلا من تدفق الخارج وعمر الاله :

$$C_t = C(q_t) \qquad M_t = M(q_t, t)$$

ومن الممكن بيع الاله كخرده scrap (تشليح) وذلك عندما يرغب صاحبها فى عــدم استعمالها للانتاج ، فتكون قيمة الخرده للالة عبر الزمن T. S_T دالة متناقصه بالنسبه لعمر الاله : $S_T = S(T)$ بحيث ان $S'(T) < 0$ فالاشتقاق $S'(T)$ يعطى معدل الحساره لقيمة السوق بسبب التمراريه استعمال الاله ويسمى " نقص القيمـــــه "

افترض ان (١٢ــ٣٧) قد يمكن حلها للقيمه المثلى لـ q_t بدلالة t وبتعويض هذه الداله فى (١٢ــ٣٦) فانه يمكن التعبير عن القيمه المثلى لشبه الريع الجارى بدلالة t :

$$Z_t = Z(t)$$

فدالة شبه الريع تعطى شبه الريع الامثل الذى يمكن الحصول عليه عند كل نقطه من الزمن من تشغيل الاله • وهذه الدالة مبنية على الاسس التى ارتكز عليها الخليط الامثل للداخل والخوارج وتتحقق دالة شبه الريع لجميع قيم t وسوف لا يتاثر شكلها العام باختيار قيمة معينه لعمر الالهولهذا فان دالة شبه الريع قد تستعمل لتحليل عمر الاله بدون تقديم واضح للخوارج والايرادات والتكلفات •

تقاعد آلة بمفردها : Retirement of a Single Machine

اعتبر ان احد اصحاب الوحدات الانتاجيه يرغب فى شراء الة واحدة ، ويرغب فى استثمار شبه الريع الجارى له فى سوق السندات بمعدل الفائدة الجارى ويرغب فى استثمار قيمة الاله الخرده فى سوق السندات عند نهاية عمر الاله ثم يرغب بعد ذلك فى ان يتقاعد • فالقيمه الحاليه لربحه من تشغيل الاله هو القيمه الحاليه لشبه ريعة الجارى، ناقصا تكلفة الاله ، زائدا القيمه الحاليه لما يستلمه مقابل الاله الخرده :

$$\pi_1 = \int_0^T Z(t)e^{-it}\,dt - I_0 + S(T)e^{-iT} \qquad (١٢ــ٣٨)$$

وبالقيام بعملية التفاضل ،

$$\frac{d\pi_1}{dT} = [Z(T) - iS(T) + S'(T)]e^{-iT} = 0$$

$$Z(T) + S'(T) = iS(T) \qquad (١٢ــ٣٩)$$

فصاحب الاله سوف يستغنى عنها (يقعدها) عنما تكون شبه الريع الحدى ناقصا تدفق نقص القيمه مساويا لعائد الفائدة من استثمار قيمة الاله كخرده فى سوق السندات• ويمكن للقارئ ان يتحقق بان شرط الدرجه الثانيه يتطلب بان يتناقص شبه الريع ناقصا تدفق نقص القيمه بسرعة اكبر من عائد سوق السندات البديل ويتطلب ايضا بان اى زيادة فى معدل الفائدة سوف يعجل من تقاعد الاله •

إبدال سلسلة من الآلات : Replacement for a Chain of Machines

اعتبر صاحب الوحدة الانتاجيه الذى يخطط لافق زمنى لانهائى ولسلسلة من الالات تحل كل واحدة مكان واحدة اخرى • وافترض ان دالة شبه ريعه ، وتكلفته المبدئيه ودالة

قيمه الاله كخرده تكون هى نفسها لكل اله ماعدا التواريخ وافترض ايضا ان عمــر الالات المخطط يكون متطابقا فتكون القيمه الحاليه للربح من تشغيل الاله الاولى معطــــا ب (١٢ــ٣٨) وتكون القيم الحاليه للارباح من تشغيل الالات الثانيه والثالثه هما :

$$\pi_2 = \int_T^{2T} Z(t-T)e^{-it}\,dt - I_0 e^{-iT} + S(T)e^{-i2T} = \pi_1 e^{-iT}$$

$$\pi_3 = \int_{2T}^{3T} Z(t-2T)e^{-it}\,dt - I_0 e^{-i2T} + S(T)e^{-i3T} = \pi_1 e^{-i2T}$$

وتكون عامة :

$$\pi_k = \left[\int_0^T Z(t)e^{-it}\,dt - I_0 + S(T)e^{-iT}\right]e^{-i(k-1)T}$$

فتكون القيم الحاليه للارباح من الات المتتاليه متطابقه ماعدا لقيمة عوامل التخفيض الــتى تعكس الوقت الذى اكتسب خلاله ارباح هذه الالات •

فتكون القيمه الحاليه لاجمالى الربح من سلسلة لانهاية من الالات هى :

$$\pi = \sum_{k=1}^{\infty} \pi_k = \frac{\int_0^T Z(t)e^{-it}\,dt - I_0 + S(T)e^{-iT}}{1-e^{-iT}}$$

حيث ان $1/(1-e^{-iT})$ هو حاصل الجمع اللانهائى للمتواليه الهندسيــــــــــــــــه $(1 + e^{-iT} + e^{-i2T} + e^{-i3T} + \dots)$ وبوضع اشتقاق π بالنسبه لـ T مساويا لصفر ،

$$\frac{d\pi}{dT} = \frac{[Z(T) - iS(T) + S'(T)]e^{-iT}(1-e^{-iT}) - ie^{-iT}\left[\int_0^T Z(t)e^{-it}\,dt - I_0 + S(T)e^{-iT}\right]}{(1-e^{-iT})^2}$$

$$= 0$$

وبالضرب فى $e^{iT}(1-e^{-iT})$ ثم باعادة ترتيب الحدود ،

$$Z(T) + S'(T) = \frac{1}{\delta}\left[\int_0^T Z(t)e^{-it}\,dt - I_0 + S(T)\right] \qquad (١٢ـ٤٠)$$

حيث ان δ كما عرفت ب (١٢ــ٣٠) هى القيمه الحاليه لدخل جارى بما قيمته ريــال واحد ولمدة T من السنين وسوف تبدل الاله عندما يكون المعدل الحدى لتدفق شبه الريع السنوى صافيا نقص القيمه مساويا للقيمه الحاليه لمتوسط العائد السنوى للالـــــه الجديدة صافيا تكلفة استثمارها ناقصا قيمه الاله كخردة للاله القديمه ويعطى الحد بين قوسين على الجانب الايمن لـ(١٢ــ٤٠) العائد لعدد T من السنين وبالقسمة علـى δ فذلك يحولها الى الاساس السنوى فشرط الدرجه الثانيه يتطلب بان يكون العائد الحدى للاله القديمه فى تناقص بسرعة اكبر من متوسط العائد للاله الجديده •

ان شرط الدرجة الاولى لحالة العدد اللانهائى للالات فى (١٢ــ٤٠) يكـــون

مختلفا تماما من شرط الدرجه الاولى لحالة الاله الواحده فى (١٢ــ٣٩) ويعكس الفرق بينهما الفرق بين الخيارات options المتوفرهلصاحب الالات ففى حالة الاله الواحده يكون له حق الا ختيار بين استمرار تشغيل الاله او استثمار قيمتها كخرده فى سوق السندات •

اما فى حالة العدد اللانهائى للالات فان له الحق فى الاختيار بين تشغيل اله قائمه وتشغيل الة جديدة •

١٢ – ٧ الموارد القابلة للنفاذ : EXHAUSTIBLE RESOURCES

اعتبر صاحب الوحدة الانتاجيه الذى يقوم باستخلاص خارج من مورد قابل للنفاد مثل منجم فحم او بئر من ابار الزيت واعتبر ايضا ان افقه الزمنى يمتد عبر n فترة زمنيه منفصله فكلمة " قابل للنفاد " "Exhaustible" فى المضمون الحالى تعنى ان عملية الاستخلاص تكون محدده باجمالى ثابت ومحدد فصاحب المورد يفترض فيه انه على علم باسعار خارجه الحاليه والمستقبلية وان يكون له اتصال بسوق السندات تنافس بمعدل فائدة غير متغير وللتبسيط افترض ان تكلفة الاستخلاص (الاستخراج) لكل فترة زمنيه يعتمد على الكميه المستخلصه خلال تلك الفترة حسب دالة التكلفه $C = C(q_t)$ حيث ان $C''(q_t) > 0$ فالنتائج المهمه التى توصلنا اليها فيما يلى سوف تتحقق لدوال تكلفة اكثر تعقيدا •

فصاحب المورد يرغب فى صيغة خطه تمكنه من تحقيق الحد الاعلى للقيمه الحاليه لربحه من الاستخلاص ولذا فانه يكون الدالة :

$$Z = \sum_{t=1}^{n} [p_t q_t - C(q_t)](1+i)^{-t} + \lambda\left(q^0 - \sum_{t=1}^{n} q_t\right)$$

حيث ان q^0 تمثل الكميه المستخلصه الاجماليه وبوضع الاشتقاقات الجزئيه مساويه لصفر ،

$$\frac{\partial V}{\partial q_t} = [p_t - C'(q_t)](1+i)^{-t} - \lambda = 0 \qquad (t = 1, \ldots, n)$$

$$\frac{\partial V}{\partial \lambda} = q^0 - \sum_{t=1}^{n} q_t = 0$$

$$\therefore \quad [p_t - C'(q_t)](1+i)^{-t} = \lambda \qquad (t = 1, \ldots, n) \qquad (١٢ــ٤١)$$

وتتحقق شروط الدرجةالثانيه نتيجه لافتراض تزايد التكلفه الحديه MC وتتطلب شروط الدرجه الاولى (١٢ــ٤١) بان تكون القيمه الحاليه للفرق بين السعر وMC هى نفسها لكل فترة زمنيه ويقدم مقدار المضروب λ مقياسا لندرة هذا المورد • فلو كان السعر ثابتا عبر الزمن ، فان الخارج سوف ينخفض عبر الزمن من اجل تحقيق (١٢ــ٤١) لذا فان صاحب المورد سوف يقوم بانتاج الخارج فى الوقت الراهن بسبب فرصة فى الاستثمار فى

سوق السندات فمن اجل الحفاظ على خارج مساو للاجيال الصاعدة ، اى ان $q_t = q$
$(t = 1, \dots, n)$ فان السعر يجب ان يزداد عبر الزمن بمعدل بدرجة كافيه لكى يسمح للهوه بين السعر والتكلفه الحديه بالازدياد عند معدل الفائدة وبالتحديد ، $p_{t+1} =$
$p_t(1+i) - iC'(q)$ فمعدل الزيادة فى السعر يقترب من معدل الفائدة وذلك كلما ازدادت t فالسعر يجب ان يزداد بسرعه اكبر لو ان الخارج ليزداد عبر الزمن •

١٢ – ٨ رأس المال الإنسانى (البشرى) HUMAN CAPITAL

انه ليس من الضرورى بان تكون داخل العمل Labor inputs باتساق وعدم تغير طاقة انتاجيه • ففى معظم الحالات يكون من الممكن الاستثمار فى راس المال البشرى، والحسى physical ويشتق عائد مثل هذه الاستثمارات من قيمه انتاج العمل المتزايد increased labor productivity فتكلفة الاستثمار فى راس المال البشرى تكون من نوعين:

(١) التكلفات المباشرة direct costs مثل رواتب (اجور) المهندسين والكتب الدراسيه •

(٢) تكلفة الارصده البديله للمكتسبات الضائعة • فلو لم يكن الطالب فى الجامعة للدراسه او للتدريب فانه قد يقدر على انتاج خارج وكسب دخل ونوضح تحاليل الاستثمار فى راس المال البشرى بثلاثة مسائل • فالمسالة الاولى تتطلب الاجابه بنعم او بلا لما اذا كان يجب للفرد ان يواصل تعليمه او يدخل القوة العماليه على اساس تفرغ وقتى كلى full-time وسوف نقدم حسابات معدلات العائد للاستثمار فى راس المال البشرى فى هذا المضمون • اما المسالة الثانيه، فانها تناقش وتحسب تكاليف تدريب العمال لمقابلة متطلبات اعمال معينه والمسالة الثالثه ، عبارة عن تطوير نموذج (موديل) يسمح بتحديد الاستثمار الامثل فى راس المال البشرى خلال كامل الدورة التى يكسب خلالها الفرد •

الاستثمار فى التعليم Investment in Education

افترض ان على شخص ما ان يقرر ما اذا كان عليه ان يدخل قوة العمل او ان عليه ان يواصل تعليمه فهو فى الحقيقه يختار بين دخلين جاريين • فالشكل (١٢ – ٣) يعطى مثالا افتراضيا • فالقرار يجب ان يتخذ حالما يتخرج هذا الشخص من المدرسه الثانويه فى الوقت $t = 0$ فالدخل الجارى سوف ينتهى بتقاعده عند $t = T$. فلو دخل هذا الشخص القوة العماليه حالا ، فان دخله الجارى يكون $g(t)$. ولكنه اذا دخل الجامعه

فان دخله الجارى يكون $f(t)$. لذا فان الجامعه تستدعى وتتطلب الاستثمار فى راس المال البشرى • ففرق الدخل :

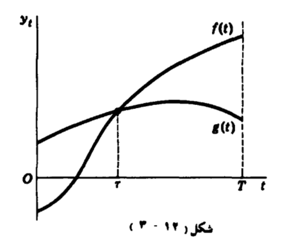
$$\int_0^{\tau} [g(t) - f(t)]\, dt$$

يكون هو تكلفته ويكون الفرق :

$$\int_{\tau}^{T} [f(t) - g(t)]\, dt$$

هو عائده فتكلفه الاستثمار تستلزم كلا من التكاليف المباشرة وتكاليف المكاسب الضائعه • ونحدد معدل عائد الاستثمار فى التعليم الجامعى ، المرموز له بالرمز r بمساواة القيم الحاليه لتكاليفه وعوائده :

$$\int_0^{T} [f(t) - g(t)] e^{-rt}\, dt = 0$$



شكل (١٢ - ٣)

فهذه المعادلة يمكن حلها لقيمة المتغير الوحيد فيها وهو r فالقرار الاخير سوف يتخذ بمقارنة r بمعدل فائدة السوق i . فلو كان $r > i$ فان الجامعة تكون استثمارا مرغوبا ولكن اذا كان $r < i$ فانها لاتكون استثمارا مرغوبا •

اعتبر المثال البسيط التالى حيث ان $T = 50$ و $f(t) = 800e^{0.12t}$
و $g(t) = 2400e^{0.08t}$ وهو مختلف عن المثال المعطى فى الشكل (١٢ــ٣)
فهنا $\tau \approx 27.5$ ولذا فان المتكامله السابقة تكون كالتالى :

$$\int_0^{50} [800e^{0.12t} - 2400e^{0.08t}] e^{-rt}\, dt = 800\left[\frac{(e^{(6-50r)} - 1)}{0.12 - r} - \frac{3(e^{(4-50r)} - 1)}{0.08 - r}\right] = 0$$

والتى يكون حلها هو $r \approx 0.088$ فيكون التعليم الجامعى استثمارا مرغوبا فيه اذا كانت معدلات الفائدة اقل من 8.8% •

الاستثمار فى التدريب : Investment in Training

اعتبر وحدة انتاج تنافسيه توظف قوة عمال متجانسه وتدفع اجرا مساويا لقيمة ناتجها الحدى ولتوضيح الاستثمار فى التدريب ، افترض ان الحكومه (الدولة من الوحدة الانتاجيه ان توظيف بعض اعضاء مجموعة من المجاميع المعدمه والتى تكون قيم ناتجها الحدى المبدئى ادنى بكثير جدا من معدل الاجر wage rate فبالتحديد ، دع سعر الخارج يساوى الوحده (ريال واحد فقط) وافترض ان MP لفرد من افراد المجموعه المعدمه هو $f(t)$ حيث ان $MP = f(t)$ $f(t) < w$ عندما تكون $t < T$ وان $f(t) = w$ عندما تكون $t \geqq T$ فتكلفة التدريب V تكون هى القيمة الحاليه للفرق بين معدل الاجر و $f(t)$:

$$V = \int_0^T [w - f(t)]e^{-it}\, dt$$

فتوزيع هذه التكلفات بين الوحدة الانتاجيه ، والفئه المعدمه والدوله سوف يعتمد على الوضع القانونى •

فكامل التكلفه سوف تتحمله الفئه المعدمه فى المجتمع التنافسى بدون اى تدخل من الحكومه • فالوحده الانتاجيه على سواء بين توظيف عامل مدرب (يد عامله ماهرة) باجر w ، وعامل من الفئه المعدمه باجر $f(t)$ هناك احتمال اخر هو ان تدع الدوله تقوم بدفع تكاليف التدريب للوحده الانتاجيه ومن ثم دع الوحدة الانتاجيه تقوم بدفع العامل من الفئه المعدمه الاجر w •

اعتبر المثال الذى تكون فيه $f(t) = w(1 - e^{-t})$ حيث ان t تقاس بالسنوات فمن الواضح ان $f(t)$ تقترب من w ، $f(t) \rightarrow w$ كلما اقتربت t من $t \rightarrow \infty$ وفى الحقيقة فان $f(t)$ سوف تكون تقاربيه بدرجه اكبر $f(5) = 0.99326w$ فالقيمه الحاليه لتكلفة التدريب لفترة عشرين سنه توظف بمعدل فائدة يساوى 8 تكون ،

$$\int_0^{20} [w - w(1 - e^{-t})e^{-it}]\, dt = w \int_0^{20} e^{-1.08t}\, dt = \frac{w(1 - e^{-21.6})}{1.08} \approx 0.926w$$

فالقيمه الحاليه لتكلفة التدريب تساوى اقل بقليل من اجر سنه واحده •

استثمار دورة الكسب : Earnings-Cycle Investment

ان راس المال البشرى، مثل راس المال الحسى ، معرض لنقص فى القيمه عبر الزمن فمعرفة الامس قد تكون قيمتها اقل من معرفة اليوم • ففى الغالب يمكن موازنة نقص القيمه وزيادة مخزون الفرد من راس المال البشرى وذلك من خلال الحصول على تعليم اعلى •

فتحديد المعدلات المثلى للاستثمار في راس المال البشرى خلال دورة كسب الانسان تقدم مسالة مهمة للتحاليل الاقتصاديه[(١)]

اعتبر شخصا ما بحيث ان دورة كسبه تمتد من $t=0$ الى $t=T$ ونرمز لمخزونه من من راس المال البشرى عند نقطه ما خلال دورة كسبه بالرمز K_t

$$K_t = K_{1t} + K_{2t} \qquad (١٢_٤٢)$$

حيث ان الارقام عند اسفل الحرف 1 ، 2 تشير الى كميات راس المال البشرى التي استخدمت في توليد الدخل وفي توليد راس مال بشرى اكثر وذلك على التوالي • فيكون الدخل عند الزمن t هو :

$$y_t = aK_{1t} \qquad (١٢_٤٣)$$

حيث ان $a>0$ فراس المال البشرى الجديد سوف ينتج من راس المال البشرى الحالى وذلك حسب دالة الانتاج المقعرة بانضباط •

$$q_t = \alpha K_{2t}^{\beta} \qquad (١٢_٤٤)$$

حيث ان $\alpha>0$ و $0<\beta<1$ وتعطى المعادلة التفاضليه التاليه معدل التغير في مخزون راس المال البشرى :

$$\frac{dK_t}{dt} = q_t - \delta K_t \qquad (١٢_٤٥)$$

حيث ان δ هى معدل نقص قيمة راس المال البشرى •

فتكلفه الاستثمار لانتاج راس المال البشرى C_t هى المكتسبات الضائعة :

$$C_t = aK_{2t} \qquad (١٢_٤٦)$$

ونعرف برنامج الاستثمار الامثل بانه البرنامج الذى يسعى لتحقيق الحد الاعلى من القيمه الحاليه لدخل الفرد الجارى

$$V = \int_0^T y_t e^{-it}\, dt \qquad (١٢_٤٧)$$

تحت شرط (١٢_٤٢) وحتى (١٢_٤٦) •

ويتطلب الحصول على حل متكامل لتحقيق الحد الاعلى لـ (١٢_٤٧) ادوات رياضيه فوق طاقة الاستفادة منها هنا • ولكن بعض اوجه هذا الحل الامثل يمكن استنتاجها وتحليلها • فالتكلفه الحديه لانتاج وحدة من وحدات راس المال البشرى عند t يمكن الحصول عليها بتفاضل (١٢_٤٦) تحت شرط (١٢_٤٤) :

$$\frac{dC_t}{dq_t} = \frac{a}{\alpha^{1/\beta}\beta}\, q_t^{(1-\beta)/\beta} \qquad (١٢_٤٨)$$

فبتفاضل اكثر لـ (١٢_٤٨) نثبت ان MC يكون متزايدا بالنسبه q_t ولكن يكون ثابتا بالنسبه لـ t فاضافه وحدة واحده من راس المال البشرى عند t سيولد دخلا

(١) انظر Y. Ben-Porath, "The Production of Human Capital and the Life Cycle of Earnings," *Journal of Political Economy*, vol. 75 (August, 1967), pp. 352-365.

جاريا مساويا a ناقصا منه نقص القيمه • وتكون القيمه الحاليه للايراد الحدى هـذا هى :

$$\frac{dR_t}{dq_t} = a\int_t^T e^{-(i+\delta)\tau}\,d\tau = \frac{a}{(i+\delta)}(e^{-(i+\delta)t} - e^{-(i+\delta)T}) \qquad (١٢_٤٩)$$

وبتفاضل (١٢_٤٩) اكثر نستطيع ان نثبت ان MR هذا يكون ثابتا بالنسبه لـ q_t ولكن يكون فى تناقص بالنسبه لـ t •

تقترح التجربه والملاحظة ان تكون هناك مراحل للاستثمار فى راس المال البشـرى • فخلال السنوات المبكرة الاولى من الافق الزمنى يكون $MR > MC$ لـ $K_{2t} = K_t$. فكامل مخزون راس المال البشرى قد يستخدم فى انتاج راس مال بشرى اكثر ولم يكن دخله سوى صفرا • اما خلال السنوات الوسطى من عمره وكلما تدنى MR فان مخـــزون راس المال البشرى قد يستخدم لانتاج راس مال بشرى اكثر ولتوليد الدخل ففى هذه المرحلة يكون $MR = MC$ فمساواة (١٢_٤٨) مع (١٢_٤٩)

$$q_t = \left\{\frac{\alpha^{1/(1-\beta)}\beta}{(i+\delta)}\left[e^{-(i+\delta)t} - e^{-(i+\delta)\tau}\right]\right\}^{\beta/(1-\beta)} \qquad (١٢_٥٠)$$

ويمكن للقارئ ان يثبت ان $dq_t/dt < 0$ ويتدنى انتاج راس المال البشرى باستمرار بتدنى MR وذلك خلال المرحلة الثانيه وفى النهايه نصل الى نقطة ما تكون عندهـــا الاضافات غير كافيه لتعويض نقص القيمه اى ان : $q_t < \delta K_t$, وان مخزن راس المـــال البشرى يتدنى اكثر •

١٢ – ٩ ملخص ما سبق SUMMARY

يجب ان يكون لدى المستهلكين والمقاولين مدخل حر الى سند السوق تام التنافـس وقد يكتفوا مدخولاتهم ومجالات انتاجهم طوال الوقت من خلال استعارة (بيع السندات) أو اقراض ــ تسليف (شراء السندات) يعبر معدل الفائدة عن تكلفة الاستعارة أو الدخـل من الاقراض • لفترة واحدة ، كجزء تناسبى من الكميه المستعارة أو المعاره (المقروضـــه) تتحدد معدلات عائد السوق ، للدوام اكثر من فترة واحدة كتركيبات من معدلات الفائدة التى تربط بين أزواج من الفترات المتتاليه • تعرف معدلات الخصم بانها مقلوب معادلات عائد السوق المناظرة • ويمكن اختصار الدخل الكلى أو التكلفه الجاريه الى عـدد واحد ، تقدر قيمته الحاليه ، بضرب كل عنصر من عناصره بمعدل الخصم المرافق ثم تجمع الناتج •

يعرف مؤشر فائدة (ربح) المستهلك كدالة فى الكميات ذات n ســــلعه الـــتى استهلكها خلال كل فترة من الفترات T من افق تخطيطه • فهو يريد ان يعظم مســـتوى

هذا المؤشر رهنا بفترات تقييد الميزانيه • وهذا يتطلب ان تتساوى القيمه الحاليـــه لانتاجـه مع موارد دخله المستحقه • اذا فرض ان الاسعار تبقى ثابته (لن تتغير) ، يمكن التعبير عن مؤشر ربحه كدالة من سرعة استهلاكه • يعرف المعدل الزمـــنى لتفضيـــل مستهلك للاستهلاك خلال فترة t (أكثر منها لفترة $\tau(>t)$) ، بانها أقل علاوة سوف يتقبلها كتعويض عن تأجيل قيمة الدولار الحديه لسرعة الانفاق • تتطلـــب شـــروط الدرجه الاولى لتعظيم الفائدة المقيدة أن يساوى المستهلك معدلات أفضلياته الزمنيـــه بمعدلات عائد السوق المناظرة • يمكن تحديد الاحلال وتأثيرات المدخولات بالنســـبه لتغيرات معدلات العائد بالتماثل مع حالة الفترة الواحدة •

نفترض ان يقوم المقاول بوضع خطة أنتاج لافق انتاجه تغطى L من الفترات $(L+1)$ من فترات التسويق • فى الفترة t للتسويق سوف يبيع المقاول خوارج انتاج الفترة $(t-1)$ ويشترى مدخولات اللازمه بعملية الانتاج خلال الفترة t • وهو يرغب فى تعظيم القيمـــه الحاليه لصافى دخله مع الخصوم بقوانين التقنيـه التى تميز دالة انتاجه متعدد الفترات•

يمكن تبسيط تحليل مشاكل استثمار المقاولين بافتراض ان الاسعار الحقيقيه والمتوقعه ستظل ثابته وأنه دائما سيجمع المدخولات وينتج المخروجات بحيث يتساوى RTS ، RPT مع نسب السعر المخصصه • تربط دالة استثمار فرص المقاول كل من معدلات اســـتثماره وريعه (دخله) بافتراض أنه ينجز هذه الامثليه الاوليه • تحدد معدلات الفائدة الحديه الداخليه لكل من الدخول (الريع) بالنسبه لكل من الاستثمارات • تتطلب شروط الدرجه الاولى ان يتساوى كل من معدل عائد حدى داخلى مع المعدل المقابل لعائد السوق • وتحتم شروط الدرجه الثانيه ان يكون كـــل من المعدلات الحديه الداخليه متناقصـــا • يطبق التحليل العام على الحالة الخاصه :

دخول نقطه ــ خروج نقطه :ــ

يمكن ان يمتد تحليل اتزان السوق المنفرد والسوق المتعدد لكى يشمل معـــدل الفائد الجارى وتوقعات الفترات الفترات المتعددة • وعند الاتزان يكون كل من معـــدل التفضيل الزمنى لكل مستهلك ومعدل العائد الداخلى الحدى لكل منتج مساويا لمعـــدل الفائدة •

لقد تم تطوير بنسبه مستمرة يتركب فيها الفائدة باستمرار ، ويمكن ان تحدث فيهـــا الصفقات التجاريه (التعاملات التجاريه) عند اى نقطه من الزمن ، ويمكن معالجة الزمـــن نفسه كمتغير • ويمكن استخدام هذه النسبه الثلاثة تطبيقات بالنتائج التاليه •

١ ــ نعطه دخول ــ نقطة خروج ــ بدخول ثابته وخوارج متغيرة ، يتساوى معدل العائـــد

الحدى الداخلى مع معدل الفائدة فى نهاية فترة الاستثمار الامثل •

٢ـ دخول مستمر ـ خروج نقطه بكل من الدخول والخروج متغيرين ، يكون معيار فترة الاستثمار كما هو فى (١) فيما عدا ان المعدل الحدى للعائد يحسب كصافى للتكلفه المتغيرة •

٣ـ دخول نقطتى ـ خروج مستمر بدخول متغير وخروج ثابت ، تكون القيمه الحاليه للدخل (الربح) الحدى عند نهاية فترة الاستثمار الامثل نتيجة لتطويل الفترة مساويا للتكلفه الحديه لمدها (لتطويلها) •

يعطى تشغيل التجهيزات المتبينه أمثلة لحالة الدخول المستمر ـ الخروج المستمر تعطى دالة (الايجار الظاهرى) اقصى فرق بين الربح (الدخل) تدفق التكلفه المتغير عند كل لحظه من الزمن • ونحصل عليها لمساواة مجموع الدخل الحدى وتدفق التكلفه الثابته مع السعر • سيجعل المقاول آله واحده للتقاعد يتساوى الايجارى الظاهرى الحدى مطروحا منه نقص العائد مع عائد الفائدة البديل على قيمة الخردة (البقايا) سوف تستبدل الآله داخل سلسله محدودة عندما يتساوى الايجارى الظاهرى الحدى لها مطروحا منه تدهور العائد مع متوسط صافى العائد لتكلفة الاستثمار لآلة جديدة •

يمثل الانفاق المباشر والاستحقاقات السابقه بكلفة الاستثمار فى رأس المال البشرى ، وتكون قيمة الزيادة فى الناحيه بعمل هى العائد •

يعين معدل العائد من الاستثمار فى عملية التعليم بمساواة القيمه الحاليه لمجالات الدخول التى سوف تستحق (تكتسب) بالتعلم وبدون تعلم • سيباشر الاستثمار اذا كان عائده يتعدى معدل الفائدة للسوق • تعطى تكلفة التدريب للمهنة بالقيمه الحاليه للفرق بين قيمة الانتاج الحدى للعامل المدرب وتلك القيمه للعامل أثناء فترة التدريب • فى نموذج بسيط لدائرة استحقاقات الفرد ، يفترض ان دخل الشخص يتناسب مع مخزونه من رأس المال البشرى • يزداد المخزون خلال الاستثمار مع تكلفة الاستحقاقات السابقة ، وتقل خلال تدهور القيمه مع الزمن • يمكن استخدام المخزون الكلى لرأس المال البشرى لانتاج مزيد من رأس المال البشرى خلال المرحله المبكرة من دائره الاستحقاق • بالرغم من ذلك فانه يعد مثل هذه المرحله يقل معدل الاستثمار فى رأس المال البشرى مع الزمن ،وبالطبع يكون الاستثمار أقل من النقص فى القيمة (التدهور) •

EXERCISES

12-1 Consider two alternative income streams: $y_1 = 300$, $y_2 = 321$, and $y_1 = 100$, $y_2 = 535$. For what rate of interest would the consumer be indifferent between the two streams?

12-2 A consumer's consumption-utility function for a two-period horizon is $U = c_1c_2^{0.6}$; his income stream is $y_1 = 1000$, $y_2 = 648$; and the market rate of interest is 0.08. Determine values for c_1 and c_2 that maximize his utility. Is he a borrower or lender?

12-3 An entrepreneur invests on one marketing date and receives the resultant revenue on the next. The explicit form of his investment-opportunities function is $R_2 = 24\sqrt{I_1}$, and the market rate of interest is 0.20. Find his optimum investment level.

12-4 Consider a bond market in which only consumers borrow and lend. Assume that all 150 consumers have the same two-period consumption-utility function: $U = c_1c_2$. Let each of 100 consumers have the expected-income stream $y_1 = 10{,}000$, $y_2 = 8400$, and let each of the remaining 50 consumers have the expected-income stream $y_1 = 8000$, $y_2 = 14{,}000$. At what rate of interest will the bond market be in equilibrium?

12-5 An entrepreneur will receive 1000 dollars at $t = 5$. Determine an equivalent constant continuous-income stream from $t = 0$ to $t = 5$ if the interest rate is 10 percent. Note: $e^{0.5} = 1.64872$.

12-6 Consider an entrepreneur engaged in a point-input–point-output wine-aging process. His initial cost is 20, the sales value of the wine is $R(T) = 100\sqrt{T}$, and the rate of interest is 0.05. How long is his optimal investment period?

12-7 An entrepreneur is engaged in a repeated point-input–point-output process. He invests I_0 dollars and receives a revenue of $R(T)$ dollars T years later. At T he will again invest I_0 dollars and receive another revenue of $R(T)$ dollars at $2T$. Assume that he repeats this cycle indefinitely. Interest is compounded continuously at the constant rate i. What is the present value of the entrepreneur's profit from such an infinite chain? Formulate his first-order condition for profit maximization. Compare this result with the first-order condition for the unrepeated case.

12-8 An entrepreneur is engaged in tree growing. He purchases a seedling for 4 dollars, incurs a cultivation cost flow at a rate of $G(t) = 0.4t$ dollars per year during the life of the tree, and sells the tree at $t = T$ for $R(T) = 4 + 8T - T^2$ dollars. The market rate of interest is 0.20. Determine an optimal length for his cultivation period, T. Apply the appropriate second-order condition to verify that your solution is a maximum.

12-9 An entrepreneur is considering the variable revenues and costs from the operation of a machine to produce the output Q which sells at the fixed price $p = 52$. His input cost flow would be at the rate $C_t = 5q_t^2$ dollars per year, and his maintenance cost flow would be at the rate $M_t = 2q_t + 3t$ dollars per year. Construct a quasi-rent function for the machine.

12-10 An entrepreneur plans for a one-machine horizon. He purchases the machine for 500 dollars. Its scrap value at time T is $S(T) = 500 - 40T$. The rate of interest is 0.05. The machine yields a quasi-rent flow at the rate $Z_t = 85 - 4t$ dollars per year. When should the entrepreneur retire this machine?

12-11 An entrepreneur with a two-year horizon desires to extract 100 units of output from an exhaustible resource. His extraction costs are $C_t = 0.5q_t^2$, the interest rate is 10 percent, and the constant selling price for the output is 100 dollars. How much output should he extract in each year?

SELECTED REFERENCES

Allen, R. G. D.: *Macro-economic Theory* (New York: St Martin's, 1967). Chap. 3 contains a discussion of investment theory using differential and integral calculus.

Fisher, Irving: *The Theory of Interest* (New York: Kelley and Millman, 1954). A classic statement of many of the concepts of this chapter which contains verbal, geometric, and mathematical descriptions.

Friedman, Milton: *A Theory of the Consumption Function* (Princeton, N.J.: Princeton, 1957). Chap. II contains a theory of multiperiod consumption. The remainder of the volume is devoted to its statistical verification.

Hicks, J. R.: *Value and Capital* (2d ed., Oxford: Clarendon Press, 1946). Parts III and IV and the mathematical appendix contain multiperiod analyses.

Lutz, Friedrich, and Vera Lutz: *The Theory of Investment of the Firm* (Princeton, N.. . Princeton, 1951). A detailed study of many different investment problems in which time is treated as a continuous variable. A knowledge of differential and integral calculus is helpful, but not absolutely necessary.

Modigliani, Franco, and Richard Brumberg: "Utility Analysis and the Consumption Function," in Kenneth K. Kurihara (ed.), *Post Keynesian Economics* (New Brunswick, N.J.: Rutgers, 1954), pp. 388–436. A theoretical and empirical study of lifetime consumption patterns. Some knowledge of calculus and mathematical statistics is required.

Nickell, S. J.: *The Investment Decisions of Firms* (Cambridge: Cambridge University Press, 1978). An exposition of modern theory using the calculus.

Smith, Vernon L.: *Investment and Production* (Cambridge, Mass.: Harvard, 1961). A detailed treatment of investment theory. Geometry and calculus are used.

ملحق رياضى

APPENDIX

MATHEMATICAL REVIEW مراجعة بعض المفاهيم الرياضية :

يحتوى هذا الملحق الرياضى على مراجعة قصيرة لبعض الافكار والمفاهيم الرياضيه التى نوقشت فى هذا الكتاب • ولقد حذفنا الاثباتات الصعبه وفى الحقيقه فان كثيرا من المنطوقات لم تثبت بالمرة •

ان معظم الادوات المستخدمه فى التحليل تكون مستقطبه من الجبر ومن حساب التفاضل والتكامل فحل المعادلات الاتيه simultaneous equations واستخدام المحددات determinants تكون ملحقه فى الفصل (١ ـ ١) (A-1) ونناقش اساسيات حساب التفاضل فى الفصل (١ ـ ٢) A-2 اما الفصل (١ـ٣) A-3 فانه يناقش تحاليل النهايات العظمى والصغرى maxima and minima ونراجع فى الفصل (١ـ٤) A-4 الخواص الاساسيه للتكاملات integrals وننهى الملحق الرياضى هذا بمناقشة المعادلات التفاضليه والمعادلات الفرقيه difference and differential equations فى الفصلين (١ـ٥) A-5 و(١ـ٦) A-6 على التوالى •

١ – المعادلات الآنية ، المصفوفات ، والمحددات :

A-1 SIMULTANEOUS EQUATIONS, MATRICES, AND DETERMINANTS

يمكن كتابة نظام المعادلات المكون من n معادلة محتويه على n متغير :

$$\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n &= b_n
\end{aligned}$$

حيث ان جميع الـ a تكون معاملات وان جميع الـ b تكون حدود ثابته فاى مجموعـــه من الاعداد التى تحافظ على جميع الـ n من المتساويات فى(١ــ) عندما نعوض بها مكان الـ x فتكون هى الحل لهذا النظام • ونورد فيما يلى مثالا بسيط لنظـــام المعادلات الاتيه التالى :

$$3x_1 - 5x_2 = 11$$
$$x_1 + 2x_2 = 11$$

ويكون حلها الوحيد هو : $x_1 = 7, x_2 = 2.$

ومن الممكن تجميع جميع الـ a والـ b والـ x فى(١ــ١) فى صفوف مستطيلـــــه تسمى المصفوفات matrices ونرمز لها بالحروف الغلظه :

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \text{ و } \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

فالمصفوفه المكونه من m من الصفوف rows و n من الاعمده columns تكون بالترتيب order $(m \times n)$ فاى مصفوفه بالترتيب $(m \times 1)$ تسمى كمية متجهه عموديـــــــه column vector وای مصفوفه بالترتيب $(1 \times n)$ تسمى كمية متجهه صفيـــــــه row vector ويمكن تسميه كل واحد منهما بكمية متجهة للتبسيط • فاى عنصر من عناصـر المصفوفه A مثل a_{ij} يرمز الى الصف والعمود الموجود فيه هذا العنصر حيـــث الحرف الاسفل الاول i يشير الى الصف ويشير الحرف السفلى الثانى j الى العمــود فى a فعمليتى الجمع والطرح للمصفافات تعرف عادة للمصفوفات التى تنتمى الى نفس الترتيب • ففى هذه الحاله تكون عناصر المصفوفات $C = A + B$ هى $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ فعملية الطرح تعرف بابدال علامات الجمع بعلامات الطرح فعمليتى الجمع والطرح لـــم تعرف للمصفوات التى لاتنتمى الى نفس الترتيب • فحاصل الضرب $C = AB$ يعــرف اذا كان وفقط اذا كان iff عدد الاعمده فى A هو نفسه عدد الصفوف فـــى B فلو كانت A بالترتيب $(m \times n)$ وكانت B بالترتيب $(n \times p)$ وكانت C بالترتيب $(m \times p)$ فان عناصر هذه المصفوفات سوف تكون :

$$c_{ij} = \Sigma_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}$$

ونورد هنا حالة خاصه لها وضع خاص وهى ان المصفوفه A تكون كمية متجهة صفيه وتكون B كمية متجهة عموديه بنفس عدد العناصر فيكون حاصل ضرب الكميات المتجهـــه AB هو حاصل جمع مضروب العناصر المتماثله العدد • ان المصفوفه المربعــــة square matrix يكون عدد الاعمده هو نفسه عدد الصفوف • فلو كانت A و B مصفوفتـــان مربعتان وبنفس الترتيب ، فان حاصل الضرب BA يعرف كما يعرف AB وعمومـــا

عمليات ضرب المصفوفات لا تكون ابداً اليه commutative حيث ان $BA \neq AB$ اما حاصل الضرب العددى scalar product kA حيث ان k اى عدد وان A اى مصفوفه فان عنصرا منه هو ka_{ij} يمكننا الان كتابة نظام المعادلات الخطيه (١ـ١) بطريقة مضغوطه بالرمز المصفوفى على النحو التالى : $Ax = b$ (١ـ٢) حيث ان A, x, b معرفون كما سبق •

وتعرف المحددة determinant بانها عدد مشتق من صف مربع من الاعداد وذلك حسب قواعد معينه ويرمز لها عادة اما بخطين عمود بين على كل جنب من جنبيها او بحرف • فلو رمزنا للمصفوفه بالحرف المغلظ A فاننا نرمز للمحدودة بالحرف الحقيقى:

$$\mathscr{A} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

فالقاعدة التى تمكننا من حساب المحددة من اى صف كالتالى •(١) نكون حواصل ضرب اعداد (او عناصر) من المصفوفه A بحيث ان كل حاصل ضرب يحتوى على عنصر واحد فقط من كل صف وعنصر واحد فقط من كل عمود وبهذا نكون قد عرفنا محددة فقط للصفوف المربعة ويمكن كتابة حواصل الضرب هذه بحيث تكون مؤشرات الصف فى ترتيب طبيعى $(1, 2, 3, \dots, n)$ ومثال هذا : حواصل ضرب $a_{11}a_{22}\dots a_{nn}$ و $a_{12}a_{21}a_{33}\dots a_{nn}$

فلو كان عدد التعاكسات inversions (٢) بين مؤشرات العمود وعدد زوجى فان اشاره حاصل الضرب سوف تترك بدون تغيير ولكن اذا كان عدد التعاكسات عدد فردى فان اشارة حاصل الضرب سوف تتغير من سالبه الى موجبه او من موجبه الى سالبه وتكون قيمة المحددة هى حاصل الجمع الجبرى algebraic sum لمثل حواصل الضرب هذه •اعتبر المحددة :

$$\mathscr{A} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

---

(١) لدراسة اكثر عمقا فى هذا الموضوع، راجع :

A. C. Aitken, *Determinants and Matrices* (New York: Interscience, 1951), chap. II; S. Perlis, *Theory of Matrices* (Cambridge, Mass.: Addison-Wesley, 1952), chap. IV; or G. Birkhoff and S. MacLane, *A Survey of Modern Algebra* (rev. ed., New York: Macmillan, 1953), chap. X.

(٢) فالتعاكس ما هو الا مثال للوقت الذى يكون فيه المؤشر الاسفل يتبع مؤشرا اعلا منه • فعلى سبيل المثال ، المؤشرين 1, 2 يكونا فى ترتيب طبيعى ، فالمتتاليه 2, 1 تحتوى على تعاكس واحد • اما المتتاليه 1, 3, 2, 5, 4 فانها تحتوى على تعاكسين لانها تحتوى على مثالين يكون فيهما المؤشر الاسفل يتبعة مؤشر اعلى منه : فالثلاثه 3 تاتى قبل الاثنين 2 والخمسه 5 قبل الاربعة 4 والمتتاليه : 4, 3, 2, 1, 5 تحتوى على تعاكسات•

فحسب القاعدة المذكورة اعلاه فانه لايمكن تكوين الا حاصلين للضرب فقط من المصفوفة A ونجد ان اشارة سالب تسبق الحد الثاني ، لانها تحتوى على تعاكس واحد (عدد فردى) من مؤشرات العمود وذلك عندما نكتب مؤشرات الصف في ترتيبها الطبيعي (١) فلو كانت المصفوفه كالتالي (٢) :

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$$

فان المحدودة تكون : $12 + 2 = 14$

فالقاعدة السابقة تسبب بعض المتاعب وخصوصا اذا كانت المصفوفه تحتوى على عدد كبير من الصفوف والاعمدة وعامة ، نستطيع تقييم محددة ما بسهولة اكثر وذلك بفك المحددة باستخدام المتعاملات cofactors فلاى عنصر a_{ij} من عناصر المصفوفة A تكون صفا بشطب الصف ال i والعمود ال j من المصفوفة الاصليه • فتكون محددة الصف المتبقى والتى تحتوى على $(n-1)$ من الصفوف و $(n-1)$ من الاعمدة، هي صغير محدد minor للعنصر a_{ij}. فالتعامل لهذا العنصر يكون هو صغيره المحدد مضروبا فى $+1$ اذا كان $(i+j)$ عدد زوجيا ومضروبا فى (-1) اذا كان $(i+j)$ عددا فرديا ويمكن كتابة المحدده كالتالى :

$$\mathscr{A} = a_{i1}\mathscr{C}_{i1} + a_{i2}\mathscr{C}_{i2} + \cdots + a_{in}\mathscr{C}_{in}$$

وذلك لاى مؤشر الصف i حيث ان $\mathscr{C}_{ij}$ هو المتعامل للعنصر فى الصف i

(١) يمكن الحصول على نفس النتيجه بحساب عدد التعاكسات بين مؤشرات الصف وذلك عندما تكتب مؤشرات العمود في الترتيب الطبيعي لها • ويمكن للقارئ ان يراجع ما اذا كانت مصفوفة ما محتويه على n من الصفوف و n من الاعمدة ، بحيث يكون عدد الحدود فى المحدودة الخاصة بها هو n اى ان :

$$n = n \cdot (n-1) \cdots 3 \cdot 2 \cdot 1.$$

ولمراجعة هذا الموضوع، انظر فى كتاب Aitken المشار اليه سابقا على الصفحات 26-36 •

(٢) فالمصفوفة او الصف نفسه سوف يكتب داخل اقواس مربعة او دائريه square or round brackets اما عملية تكوين المحددة فانها تظهر بالقضبان العمودية بدلا من الاقواس •

(٣) فقطر المصفوفه الجارى فى الاتجاه الشمالى الغربى ـ الجنوبى الشرقى يكون هو القطر الرئيسى للمصفوفه ونسمى صغار محدد Minors للعناصر الموجوده على القطر الرئيسى (اى انها لـ a_{11}, a_{22}, الخ) بصغار محدد الرئيسيه • فصغير محدد الرئيسى لـ a_{11} فى المحددة الاصليه يكون هو نفسه محددة بالترتيب $(n-1)\times(n-1)$ ويرمز لها بالحرف $\mathscr{A}_{11}$ وصغير محدد الرئيسى لـ a_{22} فى صغير محدد $\mathscr{A}_{11}$ هو المحدد بالترتيب $(n-2)\times(n-2)$

ونرمز لها بالرمز $\mathscr{A}_{11,22}$ وهى المحددة بالترتيب $(n-2)\times(n-2)$ نفسها تكون صغير محدد رئيسيه للمحددة الاصليه •

والعمود j وبالمثل ،

$$\mathscr{A} = a_{1j}\mathscr{C}_{1j} + a_{2j}\mathscr{C}_{2j} + \cdots + a_{nj}\mathscr{C}_{nj}$$

وذلك لأى مؤشر العمود j وبما انه يمكن فك أى محددة بالنسبه لأى صف أو عمود منفرد فأن ضرب أى صف أو عمود من المصفوفه A بالرقم k سوف يغير قيمة المحددة بنفس قيمة الرقم المضروب به •

تخيل ان الصف i للمصفوفة قد ضرب بالرقم k ومن ثم فان مفكوك المحددة الجديدة بالنسبه للصف i يكون كالتالى : (نرمز له بالحرف $\mathscr{A}^*$

$$\mathscr{A}^* = ka_{i1}\mathscr{C}_{i1} + ka_{i2}\mathscr{C}_{i2} + \cdots + ka_{in}\mathscr{C}_{in} = k\mathscr{A}$$

فالمفكوك من اجل $i \neq j$

$$a_{i1}\mathscr{C}_{j1} + a_{i2}\mathscr{C}_{j2} + \cdots + a_{in}\mathscr{C}_{jn}$$

ما هو الا المفكوك عن طريق المتعاملات الدخيله *alien cofactors* وتساوى صفر[1] •
فباستخدام هذه النظريه يمكن اثبات ان اضافة مضروب اى من الصفوف (او الاعمدة) الى اى صف (او عمود) اخر سوف يترك قيمة المحدده بدون تغيير • فعلى سبيل المثال ، نضرب الصف الـ j بى k ثم نضيفه الى الصف الـ i ونرمز للمحددة الجديدة بالحرف $\mathscr{A}^{**}$ فيفلك $\mathscr{A}^{**}$ بالنسبه لصفها الـ i :

$$\begin{aligned}\mathscr{A}^{**} &= (a_{i1} + ka_{j1})\mathscr{C}_{i1} + (a_{i2} + ka_{j2})\mathscr{C}_{i2} + \cdots + (a_{in} + ka_{jn})\mathscr{C}_{in}\\ &= a_{i1}\mathscr{C}_{i1} + a_{i2}\mathscr{C}_{i2} + \cdots + a_{in}\mathscr{C}_{in} + k(a_{j1}\mathscr{C}_{i1} + a_{j2}\mathscr{C}_{i2} + \cdots + a_{jn}\mathscr{C}_{in})\end{aligned}$$

وذلك لان الحد الموجود بين القوسين فى المعادلة الثانيه هو المفكوك بالمتعاملات الدخيله وعلى ذلك فانه يساوى صفر •

ومن الممكن ايضا حل نظام المعادلات الاتيه فى (١ ـ١) باستخدام قاعدة كريمر، والتى تنص على ان الحل لـ x_j يكون معطا بالنسبه بين محددتين بحيث ان المقام يكون مكونا من محددة معاملات coefficients نظام المعادلات وان البسط يكون مكونا من محددة معاملات العمود j الذى حل محلها العمود المكون من حدود ثابتة. هذا بشرط ان تكون قيمة المحددة فى المقام مساويه لصفر • فاولا نطبق القاعدة التى تنص على ان ضرب عمود ما فى المصفوفة هو بمثابة ضرب قيمة المحددة بنفس العدد ومن ثم نطبق القاعدة التى تنص على ان اضافة مضروبات اى عمود الى بعض الاعمدة الاخرى سوف لايغير قيمة المحددة ، ونشتق بعد ذلك الحل لـ x_1 كما يلى :

---

(١) راجع كتاب Birkhoff and MacLane, المشار اليه سابقا على الصفحه

$$x_1\mathscr{A} = \begin{vmatrix} a_{11}x_1 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21}x_1 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1}x_1 & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \dots$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_n & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

وذلك بتعويض عمود الثوابت من (١ــ١) بدلا من حواصل الجمع فى العمود الاول ونرمز للمحددة على الجانب الايمن بـ $\mathscr{A}_1$ فان الحل لـ x_1 يكون :

$$x_1 = \frac{\mathscr{A}_1}{\mathscr{A}} \qquad (١ ــ ٣)$$

وذلك كما نص عليها • ومنصوص(١ ــ ٣) لايكون له اى معنى اذ كانت $\mathscr{A} = 0$ ففى هذه الحاله لايوجد حل فريد ، وتكون صفوف المصفوفة مستقله خطيا *linearly dependent* أو ما يعادل ذلك فان المصفوفه تكون فريده *singular* (١)•

فلو كانت قيمة محددة ما هى صفر ، فان اى من المعادلات الـ n يمكن وضعها كتوافق خطى linear combination للمعادلات الـ $(n-1)$ المتبقيه فعلى سبيل المثال ، يمكن الحصول على المعادلة الـ n وذلك بضرب المعادلة الاولى بـ 6 ثم اضافه 3 مضروبه فى الثانيه الى الاولى ، فالمعادله الـ n لاتحتوى على معلومات جديدة ويمكن حذفها ، لانها تعتمد خطيا على المعادلات الـ $(n-1)$ الاوليه • فمثلا افترض ان المعادلة الـ n تكون بمثابة توافق خطى للمعادلات الـ $(n-1)$ الاوليه فتكون المعادلة الـ i هى :

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i$$

$$\sum_{i=1}^{n-1} c_i \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = \sum_{i=1}^{n-1} c_i b_i$$

حيث ان جميع الـ c تكون ثوابت ليس جميعا مساويه لصفر ، فاى مجموعة من الـ x التى تحقق المعادلات الـ $(n-1)$ الاولى سيكون من الضرورى انها تحقق المعادلة الـ n. فالمعادلة الاخيرة لاتضيف اى معلومات جديده • فيكون النظام قد خفض الى $(n-1)$ من

(١) نعرف صفوف المصفوفة A بان تكون مستقله خطيا اذا كان ممكنا ايجاد مجموعة من الاعداد $c_1, c_2, \dots, c_n$ بحيث ان $\sum_{i=1}^{n} c_i a_{ij} = 0$ لجميع قيم المؤشر j بحيث ان ليس جميع الـ c مساويين لصفر • ويمكن اثبات ان قيمة محددة المصفوفة سوف تكون صفرا اذا كان وفقط اذا كانت صفوف (او اعمدة) المصفوفة مستقلةخطيا • راجع فى هذا Aitken الذى سبق الاشارة اليه على الصفحتين 62 64

المعادلات محتويه على n من المتغيرات فلو لم يكن احدا من صغير محدد للصف $(n-1)$ مساويا لصفر ، فانه من الممكن الحصول على حل لاى واحد من الـ $(n-1)$ من المتيغيرات بالنسبه للحدود الثابته والمتغير المتبقى •

اذا كان النظام الاصلى المكون من n من المعادلات نظاما متجانسا (جميع الحدود الثابته تساوى صفر) فان جميع الـ x تكون صفرا وهذا اذا كانت محددة النظام غير صفر • فحسب قاعدة كريمر نجد ان كل x يمكن التعبير عنها ككسر • فالمقام لايكون صفرا بالافتراض ويتلاشى البسط لكل x لان جميع الـ b تساوى صفرا وتكون المحددة لاية مصفوفة محتويه على عمود من الاصفار ستكون هى نفسها صفرا فلو تلاشت المحددة فان من الممكن الحل فقط للقيم النسبيه للمتغيرات ويكون الحل فريدا ماعدا لعامل التناسب فعلى سبيل المثال ، فلو كان نظام المعادلات الاتيه كما يلى :

$$3x_1 - 4x_2 = 0$$
$$6x_1 - 8x_2 = 0$$

فان المحددة تكون $(3)(-8)-(6)(-4)=0$ وعلى هذا فان المعادلتين لاتكونا مستقلين، ويمكن الاستغناء عن المعادلة الثانيه [1] وعلى هذا فان :

$$3x_1 - 4x_2 = 0$$

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{4}{3}$$

فاى مجموعه قيم سوف تحقق النظام مادامت العلاقه القائمه بين x_1 و x_2 تكون $4:3$ فاختيار قيم عدديه للمتغيران يتم باختيار عشوائى لقيمة لاحدهما •

تعرف مرتبة المصفوفة بانها ترتيب اكبر محددة غير صفريه التى يمكن تكوينها من صفوفها واعمدتها • وبما ان المحدودة لم تعرف الا من خلال المصفوفه المربعه فلو ان، المصوفه A كانت بالترتيب $(m \times n)$ وكانت $m < n$ فان مرتبتها لاتفوق m وتكون المرتبه ايضا مساويه لعدد الصفوف المستقله خطيا (اومايعادله ، الاعمدة) فى المصفوفة • ويمكن النص على الشروط الضروريه وشروط الكفايه لحل نظام معادلات انيه بالنسبه لمرتبة مصفوفات معينه وتتحقق هذه الشروط بغض النظر عما اذا كان عدد المعادلات اكبر من ، مساو لـ ، او اقل من عدد المتغيرات • فلو اعطينا نظام المعادلات $Ax = b$ حيث ان A بالترتيب $(m \times n)$ فقد لايكون هناك حلا واحدا ، او حلا واحدا بالضبط او حلول متعددة • فاذا عرفنا C على اساس انها مصفوفة بالترتيب $[m \times (n+1)]$ بحيث ان الاعمده الـ n الاولى منها تكون هى المصفوفه A وتكون الاعمده الـ $(n+1)$ هى المصفوفة b فشرط الضرورة والكفايه لوجود حل (ليس من

[1] It does not matter which equation is omitted. Discarding the first leads to the same answer.

الضرورى ان يكون وحيدا) هو ان تكون مرتبة A مساويه لمرتبة C فلو كانت مرتبة C اكبر من مرتبة A فان النظام سوف لا يكون متطابقا او متوافقا inconsistent ولا يوجد له حل والمثال على هذا هو :

$$5x_1 + 2x_2 = 10$$
$$10x_1 + 4x_2 = 11$$

فمرتبة A تكون الوحدة ومرتبة C تكون اثنين • وبطرح اثنين مضروبه فى المعادله الاولى من المعادلة الثانيه فاننا نتحصل على النتيجه المستحيله $0 = -9$

١ - ٢ حساب التفاضل والتكامل : CALCULUS

الدوال والنهايات والاتصال : Functions, Limits, Continuity

تعنى العلاقه $y = f(x)$ (وتقرا : y دالة x) بانه توجد قاعدة يمكن من خلالها انساب قيم للمتغير y الى قيم للمتغير x وامثلة هذا $y = 1/x$ ، $y = 3x^2$، $y = \ln \sin x$ ، $y = 1$ وذلك عندما تكون x عددا صحيحا فرديا وتكون $y = 0$ لاى قيمة اخرى لـ x ففى كل حالة تكون قيم y موافقة لقيم معطاة لـ x حسب القاعدة المنصوص عليها فى شكل الدالة •

فالداله قد لا تكون معرفة لجميع القيم المحتمله لـ x فالمثال $y = 1/x$ لا يمكن تقييمه عندما تكون $x = 0$ والمثال $y = \ln \sin x$ لا يمكن تقييمه ايضا لقيم x التى تكون عندها قيمة $\sin x$ سالبه • فالجزء من مجموعة الاعداد الحقيقيه التى تكون الدالة معرفة عنده يسمى " مجال " domain الدالة • فمجال الدالة $y = x^2$ على سبيل المثال هو جميع الاعداد الحقيقيه • اما قيم الدالة المقابلة لقيم x فى المجال فهى نفسها تكون جزءا من مجموعة الاعداد الحقيقيه ، ويسمى هذا مدى range الدالة فمدى الدالة $y = x^2$ هو الاعداد الحقيقيه الغير سالبه •

تكون العلاقه $y = f(x)$ "دالة صريحة" explicit function لان y صيغت بالنسبه لـ x فلو ان العلاقه الدالية functional relation بين y و x يشار لها بى $g(y, x) = 0$ فان y سوف تكون" دالة ضمنيه" لـ x implicit function فتحديد قيمة لـ x يعرف ضمنا قيمة لـ y بحيث ان الصيغه (او التعبير) على الجانب الايسر تخفض الى صفر عندما نعوض فيها بالقيم المناسبه لـ (x) و (y) فالعلاقات :

$$y = \sqrt[3]{x}\ ,\ y = ax + b,\ y = x^2$$

تمدنا بامثله للدوال الصريحة اما الصيغ :

$$e^y + y - x + \ln x = 0\ ,\ x^2 - y^2 = 0,\ ax + b - y = 0$$

فانها تمدنا بامثله للدوال الضمنيه • فمن اجل اعادة صيغة دالة ضمنيه فى شكل صريح فانه من الضرورى حل المعادلة $g(y,x)=0$ لقيم y, وهذا لايكون ممكنا دائمـا • فالدالة الضمنيه : $e^y+y-x+\ln x=0$ لايمكن اعادة صيغتها فى شكل صريح لان ، المعادله لايمكن حلها تحليليا لـ x او y اما الدوال الصريحه فان الممكن دائما اعادة صيغتها على شكل دالة ضمنيه • فمثلا الدالة الصريحه : $y=3x^4+2\sin x-1$ تصبح $y-3x^4-2\sin x+1=0$ على الشكل الضمنى •

قد يكون للدالة اكثر من متغير واحد • ففى هذه الحاله تكون دالة متعـــــددة المتغيرات function of several variables ويرمز لها بـ $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ او ندع $\mathbf{x}$ تكون الكميه المتجهة vector $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ وعندئذ نرمز لها بـ $f(\mathbf{x})$ فالمفاهيم المناقشة سابقا تكون محققه بالمساواة ايضا للدوال المتعدده المتغيـــرات تعرف الدالة $f(x)$ بانها محدبه " convex عبر الفترة او البُعد over the interval (a,b) اذا كان :

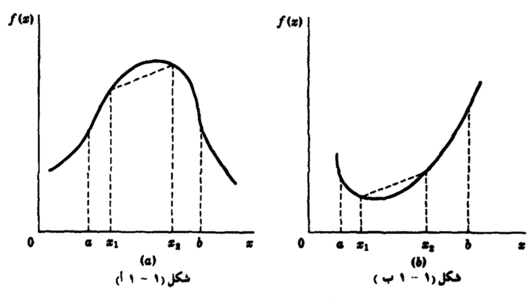
$$f[\lambda x_1+(1-\lambda)x_2] \leqq \lambda f(x_1)+(1-\lambda)f(x_2) \quad (١ــ٤)$$

وذلك لجميع $a \leqq x_1$, $x_2 \leqq b$, وجميع $0 \leqq \lambda \leqq 1$ وتـكون محدبـــه بانضباط strictly convex عبر الفترة لو ان المتباينه المنضبطه strict inequality تتحقق فى (١ــ٤) لجميع $0<\lambda<1$. وتكون الدالة " مقعرة" concave عبـر الفترة (a,b) اذا كان :

$$f[\lambda x_1+(1-\lambda)x_2] \geqq \lambda f(x_1)+(1-\lambda)f(x_2) \quad (١ــ٥)$$

وذلك لجميع $0 \leqq \lambda \leqq 1$ وتكون الدالة مقعرة بانضباط اذا تحققت المتباينـــه المنضبطه لجميع $0<\lambda<1$

يعطى طرفى المعادلتين (١ــ٤) و (١ــ٥) الايسر قيم دالة عند النقط التى تكـــون مقحمة interpolations بين قيمتى x_1, x_2 اما الجانبين الايمنيين فانهمــا يعطيا اقحاما لقيم الدالة المقابلة لـ x_1, x_2 ويعنى التحوب المنضبط (او التقعر المنضبط) عبر فترة ما انه لاى زوج من قيم x فى الفترة x_1, و x_2 بحيث ان $x_1<x_2$, فان قيم الدالة $f(x)$ · $x_1<x<x_2$ تقع اسفل (اعلى) قطعة الخـــط line segment الواصلم بين $f(x_1)$, $f(x_2)$ فالدالة المصوره فى الشكل (١ــ١١) تكـون مقعرة عبر الفترة (a,b) اما الدالة المصوره فى الشكل (١ ــ ١ب) فانها تكون محدبه عبر الفترة (a,b) وفى الحقيقه فان الدالة تكون محدبه عبر فترة اكثر اتساعا • فاى دالــة خطيه linear function, سوف تحقق المتساويات في (١ــ٤) وفى (١ــ٥) ، وكذلك الاقحامين سوف يعطيان قيم متطابقه وعلى هذا فان الدالة الخطيه تكون محدبه (ولكن ليس محدبه بانضباط) • ومقعرة معا (ولكن ليس مقعرة بانضباط) •



شكل (١ - ١ أ) شكل (١ - ١ ب)

شكل (١ - ١)

ان من الممكن تبنى هذه التعريفات والمفاهيم للدوال متعددة المتغيرات فالدالة $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ تكون دالة محدبه عبر منطقة ما اذا كان :

$$f[\lambda x_1^{(1)} + (1-\lambda)x_1^{(2)}, \lambda x_2^{(1)} + (1-\lambda)x_2^{(2)}, \ldots, \lambda x_n^{(1)} + (1-\lambda)x_n^{(2)}] \leq \lambda f(x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, \ldots, x_n^{(1)}) + (1-\lambda)f(x_1^{(2)}, x_2^{(2)}, \ldots, x_n^{(2)}) \quad (١_٦)$$

وذلك لزوجى النقاط $(x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, \ldots, x_n^{(1)})$ $(x_1^{(2)}, x_2^{(2)}, \ldots, x_n^{(2)})$ فى المنطقة وكذلك جميع $0 \leq \lambda \leq 1.$ وتكون الدالة محدبه بانضباط اذا تحققت المتباينه المنضبطه لجميع $0 < \lambda < 1.$ وتكون الدالة مقعرة عبر المنطقه اذا كانت

$$f[\lambda x_1^{(1)} + (1-\lambda)x_1^{(2)}, \lambda x_2^{(1)} + (1-\lambda)x_2^{(2)}, \ldots, \lambda x_n^{(1)} + (1-\lambda)x_n^{(2)}] \geq \lambda f(x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, \ldots, x_n^{(1)}) + (1-\lambda)f(x_1^{(2)}, x_2^{(2)}, \ldots, x_n^{(2)}) \quad (١_٧)$$

وتكون الدالة مقعرة بانضباط اذا تحققت المتباينه المنضبطه لـ $0 < \lambda < 1$ هناك مفهوم رياضى مختلف ولكن له صلة بالمواضيع السابقه وهو موضوع شبه التقعر quasi- concavity اعتبر الدالة السابقه المحتويه على n من المتغيرات وذلك عند نقطتين هما :

$$\mathbf{x}^{(2)} = (x_1^{(2)}, x_2^{(2)}, \ldots, x_n^{(2)}), \quad \mathbf{x}^{(1)} = (x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, \ldots, x_n^{(1)}).$$

فتكون الدالة شبه ــ مقعرة عبر منطقة ما اذا كان :

$$f[\lambda \mathbf{x}^{(1)} + (1-\lambda)\mathbf{x}^{(2)}] \geq \min[f(\mathbf{x}^{(1)}), f(\mathbf{x}^{(2)})] \quad (١_٨)$$

وذلك لجميع $\mathbf{x}^{(1)}$ ، $\mathbf{x}^{(2)}$ فى المنطقة ولجميع $0 \leq \lambda \leq 1$ وتكون الدالة شبه ــ مقعرة بانضباط وذلك اذا تحققت المتباينه المنضبطه لـ $0 < \lambda < 1$ اما تعاريف شبه ــ التحدب المنضبط فانها تعرف بقلب reversing المتباينه فى (١ــ٨) •

ان من السهوله اثبات ان كل دالة مقعرة تكون دالة شبه ــ مقعرة • ولا نفقد شيئا من العموميه اذا افترضنا ان $f(\mathbf{x}^{(1)}) \geqq f(\mathbf{x}^{(2)})$.
وبوضع تعريف المتقعر فى (١ــ٧) بمعرفة الكميات المتجهه نحصل على :

$$f[\lambda \mathbf{x}^{(1)} + (1-\lambda)\mathbf{x}^{(2)}] \geqq \lambda f(\mathbf{x}^{(1)}) + (1-\lambda) f(\mathbf{x}^{(2)}) \geqq f(\mathbf{x}^{(2)})$$

مثبتين بذلك شبه ــ التقعر ولكن شبه ــ التقعر لا يتطلب التقعر • فلو كانت $f(\mathbf{x}^{(1)}) = f(\mathbf{x}^{(2)}) = y,$ فان (١ــ٨) تصبح :

$$f[\lambda \mathbf{x}^{(1)} + (1-\lambda)\mathbf{x}^{(2)}] \geqq y$$

وهذه الحاله الخاصه تكون مهمة جدا وتبرز اهتماما معينا فى نظرية سلوك المستهلك وكذلك فى نظرية الوحدات الانتاجيه •

ان اى متتاليه عدديه ماهى الاعبارة عن قائمة اوسرد اعداد مثل :
$1, 2, 3, 4, 5, \ldots$ أو $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \ldots$ أو $2, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \ldots$ أو $1, 0, -1, 0, 1, \ldots$
فكل عدد فى المتتاليه سوف يعطى موءشرا موضحا مقدار بعده فى المتتاليه وعليه فــان $x_2 = 1$ فى المتتاليه السابقه ونقول بان المتتاليه توءول الى converges to النهاية K اذا وجد عددا K بالخصايه بان القيمه العدديه للفرق بين K ومفردة فى المتتاليه يكون صغيرا جدا (ويمكن عمله باى صغر الشخص يرغب) وذلك اذا اخــذ الشخص مفرده ما فى المتتاليه ببعد كاف ، اى مفردة بموءشر عالى بدرجة كافيه ، وكذلك اذا ظل الفرق بذلك الصغر على الاقل لكل مفرده item فى المتتاليه حتى ولو كانت بموءشر عالى • فالمتتاليه الاولى والرابعه من المتتاليات السابقه لايكون لها نهاية • اما الثانيه والثالثه فان لهما نهاية مساويه لصفر •

تقترب الدالة الصريحه (او ما هو نفس الشيء المتغير y) من النهايه L كلما اقتربت من العدد a، وذلك اذا ظلت قيمة الدالة على الاقل قريبه من L لجميع قيم x حتى تكون قريبه من a ويمكن تصور عمليه ايجاد نهاية $f(x)$ عندما تكــون $x = a$ بالطريقة التاليه • ناخذ القيم المتلاحقه $x_1, x_2, \ldots$ للمتغير x والتى تكــون متتاليه توءول الى العدد a. نعوض هذه القيم لـ x فى $f(x)$ فينتج عن هــذا متتاليه من القيم $f(x_1), f(x_2), \ldots,$ فلو الت هذه المتتاليه الى العدد L فان $f(x)$ سوف يكون لها النهايه L عندما تكون $x = a$. وتكون النهايه قائمه (موجوده) اذا كانت L محدودة finite ونرمز لعملية ايجاد النهاية للدالة $f(x)$ بالرمز :

$$\lim_{x \to a} f(x) = L.$$

ان الدالة $f(x) = 1 + 1/x$ توءول الى النهايه 1 كلما اقتربت x من ∞ • ولكن، على كل حال ، وهذه النتيجه لايمكن الحصول عليها بتعويض ∞ مكان x فــى

$1 + 1/x$ لان $1/\infty$ لاتساوى صفرا • فالمتساويه $A/B = C$ تتطلب ان $A = BC$ فلو كانت $1/\infty = 0$ فان $(\infty)(0) = 1$ وبما ان هذه النتيجه غير صحيحه ، فان المسالة تتطلب منطقا مختلفا ، وبالتحديد تطبيق تعريف النهايه • ففى الحقيقه ∞ ليست عددا ولكنها بالاخرى اتجاها a direction فظهورها فى اى صيغة يكون معادلا لطلب تقديم قائمه للاعداد الصحيحه الموجبه بالترتيب التصاعدى وان تعدد هذه الارقام الى ابعد رقم ممكن ، ان نجد النهايه فيمكن جعل قيمة y لاتكون مختلفه من 1 وباقل من 0.1 وذلك باختيار قيمة لـ x اكبر من 10 فلو كانت $x = 20$, $1 + 1/x = 1.05$ فانها تختلف من (١) فقط بـ 0.05 وبالمثل فان بالامكان جعل y مختلفه من (١) باقل من 1/1,000,000 وذلك باختيار قيمة لـ x اكبر من 1,000,000 الـ y التى تكون كبيرة بدرجة كافيه • فالدالة $f(x)$ تكون متصله عند النقطه $x = a$ اذا تحققت الشروط التاليه :

(١) اذا كانت النهايه قائمه ، اى $\lim_{x \to a} f(x)$

(٢) اذا كانت الدالة $f(a)$ قائمة •

(٣) اذا كانت $f(a) = \lim_{x \to a} f(x)$ [١] فاى دالة متصله فى الفترة $a < x < b$ فانها تكون متصله عند كل نقطة من نقاط هذه الفترة فهذا التعريف للاتصال يتطلب بان تكون الدالة " متصلة " باستخدام الجارى اليومى لهذه الكلمه : فاى شخص يستطيع ان يرسم الدالة بدون رفع مرسامه من الورق[٢] ويمكن الحصول على تعاريف مشابهة لنهاية الدالة لوجود الاتصال للدوال المتعددة •

---

(١) فعند هذه النقطه $x = a$ يجب ان تكون قيمة الدالة محدودة وان تكون هذه القيمه مساويه لنهاية الدالة عندما تقترب x من a فالدالة $y = 1$ عندما تكون x عددا صحيحا فرديا وتكون $y = 0$ لاى قيمة اخرى لـ x لاتكون متصله عندما تكون x عددا صحيحا فرديا فلو كانت $f(x)$ و $g(x)$ دالتين متصلتين عند $x = a$ فان:

$f(x) + g(x)$) وكذلك ($f(x)/g(x)$ (بحيث ان $g(x) \neq 0$) يكونا ايضا متصلين •

(٢) لاحظ ان الدالة التى لها " اركان " "corners" " او نتوءات "kinks" ولكن ليس فيها فرجات gaps اى ان اى من اطرافها متباعدا من الاخر فانها تكون دالة متصله ونعرف القيمه المطلقه absolute value للرقم x (ونرمز لها بـ $|x|$) كالتالى :

$$|x| = x \quad \text{اذا كانت} \quad x \geq 0$$
$$|x| = -x \quad \text{اذا كانت} \quad x < 0$$

وعليه فان الدالة $y = |x|$ يكون لها نتوءا عند $x = 0$. ولكنها فى نفس الوقت دالة متصلة •

مشتقات الدوال ذات المتغير الواحد :

Derivatives for Functions of One Variable

افترض ان الدالة $y = f(x)$ تكون متصله فى فترة ما • فلو تغير المتغير المستقل x بمقدار صغير وليكن $\Delta x,$ فان قيمة الدالة سوف تتغير بالمقدار $\Delta y.$ •وعليه فان $y + \Delta y = f(x + \Delta x)$ ويمكن صيغة التغير فى قيمة الدالة بالنحو التالى :

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) \qquad (١ _ ٩)$$

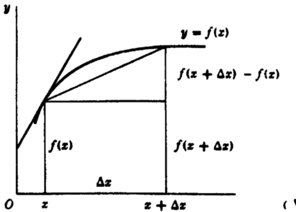
وبقسمة كلا طرفى (١ــ٥) ب Δx

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \qquad (١ _ ١٠)$$

وهذه المعادلة تعطى متوسطا معدل التغير ل y لكل وحدة تغير فى x للفترة من x الى $x + \Delta x$ فمثلا تخيل انه لو مشى سخص ما لمدة نصف ساعه اخرى فانه بالتاكيد سوف يغطى مسافة اضافيه بما يعادل ميلين ، وعليه فان المتغير المستقل وهو الزمن فى هذه الحاله قد تغير من x الى $x + \frac{1}{2}$ من الساعات وهكذا فان $\Delta y = 2$ من الاميال وتكون $\Delta x = \frac{1}{2}$ من الساعات وتكون $\Delta y/\Delta x = 4$ وهو متوسط السرعه (اربعه اميال فى الساعة) • ونعرف مشتقة (اشتقاق) $f(x)$ ونرمز له بالرمز $dy/dx.$ او $f'(x)$ او $y,$ على انها معدل تغير $f(x)$ كلما اقتربت Δx من صفر

$$\frac{dy}{dx} = f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

فالاشتقاق يكون عبارة عن معدل التغير (او السرعة فى المثال السابق) او وضعها بصورة اخرى ، هى نهاية متوسط معدل التغير (متوسط السرعه) وذلك عندما تقترب Δx (الفترة الزمنيه) من صفر • فلو رسمنا $f(x)$ فان الاشتقاق محسوبا عند النقطه $x = a$ سوف يكون هو ميل المنحنى ممثلا $f(x)$ عند النقطه $x = a.$ • ويكون متوسط معدل التغير هو ميل القاطع secant بين النقطتين على المنحنى ويكون الاشتقاق هو ميل •



شكل (١ ٢٠)

خط التماس للمنحنى عند نقطه معطاه • ويشرح الشكل (١ــ٢) هذه المفاهيم فاتصـــال $f(x)$ يكون شرط ضروريا ولكنه غير شرط كافيا ، لوجود (القيام) الاشتقاق • فالدالة $y = |x|$ تكون متصله فى كل مكان ، ولكن النهايه لاتوجد عند نقطة الاصل ، اى ان :

$$\lim_{\Delta x \to 0} (\Delta y/\Delta x)$$ لا يوجد

ونرمز لدالة الدالة ، والتى هى عبارة عن اشتقاق الدالة الثانى ، بالرمز d^2y/dx^2، ونعرفها كالتالى :

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f'(x + \Delta x) - f'(x)}{\Delta x}$$

فالاشتقاق الثانى ما هو الا عبارة عن معدل تغير الاشتقاق الاول ، اى انه المعـــــدل الذى يتغير عنده ميل الدالة • وبلغة المثال السابق ، تكون هى العجلـــــــــــة acceleration او معدل تغير السرعة وتعرف اشتقاقات بمراتب عالبه بطريقة مشابهة •

طرق التفاضل : Techniques of Differentiation

فعندما نقوم بتفاضل دالة ما فاننا نقوم بايجاد اشتقاقها • ونسرد فيما يلى بعض قوانين التفاضل بدون اثباتات :(١)

1. $f(x) = c$ (constant), $f'(x) = 0$
2. $f(x) = x^n$, $f'(x) = nx^{n-1}$
3. $f(x) = g(x)h(x)$, $f'(x) = g'(x)h(x) + g(x)h'(x)$
4. $f(x) = g(x)/h(x)$, $h(x) \neq 0$, $f'(x) = [g'(x)h(x) - g(x)h'(x)]/[h(x)]^2$

وهذه هى قاعدة دالة الدالة •

5. $f(x) = g[h(x)]$, $f'(x) = g'[h(x)]h'(x)$
6. $f(x) = \ln x$, $f'(x) = 1/x$
7. $f(x) = \ln [g(x)]$, $f'(x) = g'(x)/g(x)$
8. $f(x) = e^{g(x)}$, $f'(x) = g'(x)e^{g(x)}$
9. $f(x) = a^x$, $f'(x) = a^x \ln a$

اما القاعدة الاخيره فهى اذا كانت $y = f(x)$ متصله وذات قيمه منفرده وكان من الممكن كتابتها على النمط المقلوب مثل $x = g(y)$ بحيث ان $f'(x)$ تكون متصله ولاتساوى صفرا فان :

$$dy/dx = 1/(dx/dy) \quad \text{أو} \quad \neq 0,\ f'(x) = 1/g'(y)$$

وهذه هى قاعدة دالة المقلوب •

---

(١) اثباتات هذه القوانين موجوده فى اى كتاب للتفاضل والتكامل فيمكن مراجعـــة :

R. Courant, *Differential and Integral Calculus* (2d ed., New York: Interscience, 1936), vol. I, pp. 136–140, 173, 175; or A. C. Chiang, *Fundamental Methods of Mathematical Economics* (2d ed., New York: McGraw-Hill, 1974), pp. 164–184.

الاشتقاقات الجزئية للدوال المتعددة المتغيرات :

Partial Derivatives for Functions of Many Variables

ان من السهولة تعميم تعريفات النهايات والاتصال تغطى الدوال المتعـــددة المتغيرات افترض وجود الدالة المحتويه على n من المتغيرات المستقلــة

$$y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

فيكون اشتقاقها الجزئى بالنسبه لـ x_i هى :

$$f_i = \frac{\partial y}{\partial x_i} = \lim_{\Delta x_i \to 0} \frac{f(x_1, x_2, \ldots, x_i + \Delta x_i, \ldots, x_n) - f(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{\Delta x_i}$$

وهذا الاشتقاق الجزئى عبارة عن معدل تغير الدالة بالنسبه لـ x_i مع بقاء جميـــع المتغيرات الاخرى فى حالة ثابته اما طرق التفاضل فانها هى نفسها طرق تفاضل الدوال ذات المتغير الواحد ، ونعامل المتـغيرات جميعا ماعدا x_i كثوابت فمثلا اذا كانت

$$y = 3x_1x_2^2 + x_2 \ln x_1$$

فالاشتقاقات الجزئيه لها تكون كالتالى:

$$\frac{\partial y}{\partial x_2} = 6x_1x_2 + \ln x_1 \quad \text{و} \quad \frac{\partial y}{\partial x_1} = 3x_2^2 + \frac{x_2}{x_1}$$

وتتحدد اشتقاقات الترتيب الاعلى بالتفاضل الجزئى المتلاحق فالاشتقاق الجزئـــــى $\partial^2 y/\partial x_i^2$ هو اشتقاق f_i بالنسبه لـ x_i، (نرمز له بالرمز : f_{ii}) •

اما $\partial^2 y/\partial x_i\, \partial x_j$ فهى الاشتقاق الجزئى لـ f_i بالنسبه لـ x_j ونرمز لها بالرمز f_{ij}. فبالنسبه للمثال السابق •

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x_2\, \partial x_1} = 6x_2 + \frac{1}{x_1}$$

وتكون $f_{ij} = f_{ji}$. اذا كانت الاشتقاقات الجزئيه لامتقاطعة الاولى والثانيه متصله • امـا الاشتقاقات الجزئيه للـدالة الضمنيه :

$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$ فاننا نحصل عليها بافتراض ان :

$y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ ثم نحسب $\partial y/\partial x_1$ وكذلك $\partial y/\partial x_2$ ، وهكذا

التفاضل الكلى : The Total Differential

يرمز $\frac{dy}{dx}$ للاشتقاق لدالة ذات متغير واحد وتكتب :

$$\frac{dy}{dx} = f'(x)$$

ولكن لا يمكن تفسيرها على انها كسر مكون من الكميتين dy و dx فلو عرفنا dy, على انها زيادة فى او التغير فى المتغير المستقل فانه يمكن كتابة dx. كالتالى :

$$dy = f'(x)\, dx \qquad (١ — ١١)$$

وهذه تكون هى تفاضليه differential $f(x)$ فعند نقطة معينه x^0 تكون قيمة الداله هى $y^0 = f(x^0)$ وتكتب (١ــ١١) باستخدام الانحرافات deviations من هذه النقط) كالتالى :

$$y - y^0 = f'(x^0)(x - x^0) \qquad (١ــ١٢)$$

وهذه هى معادلة خط التماس للدالة $y = f(x)$ عند النقطه (x^0, y^0) ولهذا فان (١ ــم) هى الصيغة العامه لمعادلة خط التماس لدالة • اما (١ ــ١٢) فانها تعطى قيمة تقريبيه للتغير المقابل فى $f(x)$ وذلك عندما تحدث تغيرات فى x •
ونعرف التفاضليه الكامله لدالة متعددة المتغيرات (n متغير فى هذه الحالة كالتالى :

$$dy = f_1\, dx_1 + f_2\, dx_2 + \cdots + f_n\, dx_n \qquad (١ــ١٣)$$

وهذه هى المعادلة العامه لمعادلة مستوى التماس tangent plane للسطح المعروف $y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ surface وتعطى هذه المعادله ايضا قيمة تقريبيه للتغير فى الدالة عندما يسمح لجميع المتغيرات بان تتغير بشرط ان تكون التغيرات فى المتغيرات المستقله صغيرة فيكون الاشتقاق الكلى للدالة بالنسبه لـ x_i هى

$$\frac{dy}{dx_i} = f_1 \frac{dx_1}{dx_i} + \cdots + f_i + \cdots + f_n \frac{dx_n}{dx_i}$$

او ان معدل تغير y بالنسبه لـ x_i عندما يسمح لجميع المتغيرات الاخرى بالتغير بحيث ان جميع x_j تكون دوال معينه لـ x_i •

والان لنضع الاشتقاقات الجزئيه من الدرجة الاولى يرمز لها بالكميه المتجهة $\nabla f = (f_1, f_2, \ldots, f_n)$ والتى تسمى انحدار gradient f: اعتبر قيما لـ dx بحيث ان قيمة الدالة تظل بدون تغيير $dy = 0$. ويمكن كتابة هذه الحاله الخاصه من (١ ــ١٣) كخارج ضرب كمية متجهه •

$$\nabla f\, dx = 0 \qquad (١ــ١٤)$$

حيث ان $dx = (dx_1, dx_2, \ldots, dx_n)$. تعرف (١ ــ١٤) منحنيات مستويات لـ f وتكون dx هى الكميه المتجهة المذاحه الماسه لمنحنيات المستويات ويكون الانحدار عموديا على خط التماس ويشير الى الاتجاه الذى تتزايد خلاله الدالة (محليا) بسرعة اكبر •

ونحصل على التفاضليه الثانيه لـ $y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ باخذ التفاضليه الكليه لـ (١ ــ١٣)

$$d^2y = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} f_{ij}\, dx_i\, dx_j$$

والتى تعطى قيمة تقريبيه للتغير فى قيمة الدالة عندما يسمح لجميع المتغيرات بالتغير ضمن نطاق جوار صغير •

افترض ان :

$$y = f(x_1, x_2),\ \ x_1 = g(w_1, w_2),\ \ x_2 = h(w_1, w_2).$$

وتتحدد الاشتقاقات الجزئيه لـ y بالنسبه لـ w_1 و w_2 باستخدام قاعدة الدوال المركبه *composite- function rule* او المؤلفهوالمشتقه لاحقا وباخـــذ التفاضلات الكليه التاليه :

$$dy = \frac{\partial y}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial y}{\partial x_2} dx_2 \qquad (١ــ ١٥)$$

$$dx_1 = \frac{\partial x_1}{\partial w_1} dw_1 + \frac{\partial x_1}{\partial w_2} dw_2 \qquad (١ــ ١٦)$$

$$dx_2 = \frac{\partial x_2}{\partial w_1} dw_1 + \frac{\partial x_2}{\partial w_2} dw_2 \qquad (١ــ ١٧)$$

وبتعويض (١ ــ١٦) و(١ ــ١٧) فى (١ ــ١٥) ثم بتجميع حدود dw_1 و dw_2.

$$dy = \left(\frac{\partial y}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial w_1} + \frac{\partial y}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial w_1}\right) dw_1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial w_2} + \frac{\partial y}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial w_2}\right) dw_2 \qquad (١ــ ١٨)$$

فالتغير (١ ــ١٨) هو نفسه تفاضليه كليه حيث ان الحد الاول الموجود بين القوسين يساوى $\partial y/\partial w_1$ والثانى يساوى $\partial y/\partial w_2$ وعليه فان :

$$\frac{\partial y}{\partial w_1} = \frac{\partial y}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial w_1} + \frac{\partial y}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial w_1} = f_1 g_1 + f_2 h_1$$

$$\frac{\partial y}{\partial w_2} = \frac{\partial y}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial w_2} + \frac{\partial y}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial w_2} = f_1 g_2 + f_2 h_2 \qquad (١ــ ١٩)$$

فلو كانت المتغيرات المستقله للدالة $f(x_1, x_2)$ هى نفسها دوال المتغيرات اخرى مثل w_1 و w_2، فان $f(x_1, x_2)$ سوف تفاضل جزئيا بالنسبه لـ w_1 و w_2 حسب (١ ــ١٩) وهذه هى قاعدة الدالة المركبه (او المؤلفه) • وبتفاضل اكثـــر للمعادلة الاولى من(١ ــ١٩)

$$\frac{\partial^2 y}{\partial w_1\,\partial w_2} = f_{11} g_1 g_2 + f_{12}(g_1 h_2 + g_2 h_1) + f_{22} h_1 h_2 + f_1 g_{12} + f_2 h_{12}$$

فاذا اعطينا الدالة الضمنيه $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$ فانه يمكن الحصول على $\partial x_j/\partial x_i$ وذلك بايجاد التفاضليه الكليه اولا :

$$f_1\,dx_1 + f_2\,dx_2 + \cdots + f_n\,dx_n = 0$$

وبالقسمه على dx_i

$$f_1 \frac{dx_1}{dx_i} + f_2 \frac{dx_2}{dx_i} + \cdots + f_j \frac{dx_j}{dx_i} + \cdots + f_i + \cdots + f_n \frac{dx_n}{dx_i} = 0$$

وبوضع جميع التفاضلات عدا dx_j و dx_i مساويه لصفر ، نحصل على :

$$f_j \frac{\partial x_j}{\partial x_i} + f_i = 0$$

$$\therefore \quad \frac{\partial x_j}{\partial x_i} = -\frac{f_i}{f_j} \qquad (١ _٢٠)$$

فالمعادلة (١ _٢٠) هي قاعدة الدالة الضمنيه • وبتفاضل اكثر لـ (١ _٢٠) نحصل على :

$$\frac{\partial^2 x_j}{\partial x_i^2} = -\frac{f_j[f_{ii} + f_{ij}(\partial x_j/\partial x_i)] - f_i[f_{ij} + f_{jj}(\partial x_j/\partial x_i)]}{f_j^2} = -\frac{f_{ii}f_j^2 - 2f_{ij}f_if_j + f_{jj}f_i^2}{f_j^3}$$

الأغلفة : Envelopes

دع $f(x, y, k) = 0$ تكون دالة ضمنيه للمتغيران x و y. ولقد افترضنا ان صيغة هذه الدالة سوف تعتمد على قيمة الكمية المتغيره k. parameter (او الوسيط k.) وعلى وجه العموم فان $f(x, y, k) = 0$ تصف منحنى فى مستوى xy xy plane ولذا فانه سوف يكون هناك منحنا مختلفا مقابلا لكل قيمة محتمله لـ k. فيكون الغلاف لهذه العائله من المنحنيات هو نفسه منحنا بالخاصيه بانه ماسا لكل عضو من اعضاء العائلة ونحصل على معادلة الغلاف باخذ الاشتقاق الجزئى لـ $f(x, y, k)$ بالنسبه لـ k ثم نتخلص من k من المعادلتين :

$$f(x, y, k) = 0$$
$$f_k(x, y, k) = 0$$

والطريقة هذه لايجاد الغلاف تكون عامه قابلة للتطبيق ، بشرط ان :

$f_{kk} \neq 0$ وان $f_xf_{yk} - f_yf_{xk} \neq 0$ (١).

مبرهنة الدالة الضمنية والجاكوبيات :
Implicit-Function Theorem and Jacobians

افترض ان الدالة الضمنيه $f(x, y) = 0$ تكون متصله ويكون لها اشتقاقات جزئيه اولى متصله • اعتبر النقطه (x^0, y^0) بحيث ان :

$f(x^0, y^0) = 0$ ثم افترض ان $f_y(x^0, y^0) \neq 0$ تنص مبرهنة الدالة الضمنيه على انه يوجد جوار مكون من نقط حول النقطه (x^0, y^0) بحيث انه لاى قيمه لـ x فى هذا الجوار يكون هناك قيمة فريده لـ y مقابلة لها فى نفس الجوار بالخاصيه بان $f(x, y) = 0$. وبهذا فان مبرهنة الدالة الضمنيه تؤكد وجود حلا فريدا $y = \phi(x)$ وذلك تحت الشروط المنصوص عليها (٢) • فهى تعطى شرطا كافيا للتكافؤ المحلى الوحدوى

---

(١) بالاضافه الى ان الحل سوف يكون قابلا للتفاضل تحت الشروط المنصوص عليها والمشار اليه سابقا. W. F. Osgood, *Advanced Calculus* (New York: Macmillan, 1925), pp. 186-193.

(٢) للحصول على الاثبات راجع :

للحلول *local univalence* فالحلول قد توجد اذا كانت :
$f_y(x^0, y^0) = 0,$ ولكن اذا تلاشت f_y فى كل مكان من كامل الجوار فانه عندئـــذ
لايوجد حل فريد فى ذلك الجوار • وهذا يكون صحيحا بالتزكيه اذا تلاشـــت f_y
تطابقيا •

والمثال الذى يكون فيه $f_y(x^0, y^0) = 0,$ ولكن يوجد حلا فريد يكون معطا بـ $f(x, y)$
$(x - y)^2 =$ فالمعادله $(x - y)^2 = 0$ يكون لها الحل الفريد : $y = x$ وبالرغم من هذا فان:
$f_y = -2(x - y) = 0$ عند اى نقطه تحقق المعادلة الاصليه والمثال الذى تكون فيـــه
$f_y(x, y) = 0$ فى كل مكون فى الجوار تكون معطاة بـ $f(x, y) = x - 1$ فمن الواضـــح
ان $f(x, y) = 0$ تتحقق بـ $x = 1$ by واى قيمة لـ y ولهذا فانه لايوجد حلا فريدا.(١)
تتطلب مسالة وجود حلا فريدا ومحليا للمعادلات الاتيه وعددها n والمحتوية على n
من المتغيرات تعميما المبرهنة الدالة الضمنيه وفكرة الجاكوبيات اعتبر نظام المعادلات
الاتيه التاليه :

$$\begin{aligned} f^1(x_1, x_2, \dots, x_n) &= y_1 \\ f^2(x_1, x_2, \dots, x_n) &= y_2 \\ &\cdots\cdots\cdots \\ f^n(x_1, x_2, \dots, x_n) &= y_n \end{aligned} \qquad (١ــ٢١)$$

فجاكوبية (١ ــ٢١) هى عبارة عن محددة الاشتقاقات الجزئيه الاولى للدوال ونشيـر
اليها بـ :

$$\mathscr{J} = \frac{\partial(y_1, y_2, \dots, y_n)}{\partial(x_1, x_2, \dots, x_n)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \frac{\partial y_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial y_1}{\partial x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial y_n}{\partial x_1} & \frac{\partial y_n}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial y_n}{\partial x_n} \end{vmatrix} \qquad (١ــ٢٢)$$

فتعميم مبرهنة الدالة الضمنيه يكون كما يلى : فلو كانت الدوال التاليه $f^i(x_1, x_2, \dots, x_n)$
$(i = 1, 2, \dots, n)$ متصله ولها اشتقاقات جزئيه اولى وكانت جاكوبية (١ ــ٢٢) غيـــر
متلاشيه عند النقطه $(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$ التى تحقق (١ ــ٢١) فانه عندئذ يوجد فـــى
بعض الجوارات حول النقطه $(y_1^0, y_2^0, \dots, y_n^0)$ مقلوب دوال فريدة مثل $x_i = \phi^i(y_1, y_2, \dots, y_n),$
$(i = 1, 2, \dots, n)$ وكما هو الحال فى مبرهنة الدالة الضمنيه البسيطه ، فانه لايمكـــن
التصريح بتاكيد عام اذا تلاشت الجاكوبية عند $(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$ ولكن اذا كانــت
$\mathscr{J} = 0$ فى حوار كلى حول $(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0),$ فان التكافوء المحلى الوحدوى ســوف

(١) للحصول على اثباتات متعمقه ومناقشات هندسيه راجع :
Courant, vol. II, pp. 111–122.
والمشار اليه سابقا •

يتحقق واثبات هذه المبرهنه يمكن ايضاحه كما يلى فى حالة المتغيران فقط اعتبـــــر المعادلتان :

$$f(x_1, x_2) = y_1 \qquad (١ ـ ٢٣)$$

$$g(x_1, x_2) = y_2 \qquad (١ ـ ٢٤)$$

فلو لم تتلاشى الجاكوبيه ، فان ليس جميع الاشتقاقات الجزئيه تكون مساويه لصفـر. افترض ان $f_1 \neq 0.$ فعندئذ باستخدام مبرهنة الدالة الضمنيه •

$$x_1 = \phi(x_2, y_1) \qquad (١ ـ ٢٥)$$

وبالتعويض فى (١ ـ ٢٤)

$$F = g[\phi(x_2, y_1), x_2] - y_2 = 0 \qquad (١ ـ ٢٦)$$

$$\frac{\partial F}{\partial x_2} = g_1\phi_1 + g_2 \qquad (١ ـ ٢٧)$$

وبتعويض (١ ـ ٢٥) فى (١ ـ ٢٣)

$$G = f[\phi(x_2, y_1), x_2] - y_1 = 0$$

وبما ان G تكون مطابقة تماما لصفر ، فان اشتقاقاتها الجزئيه بالنسبه لـ x_2 يكون مطابقا لصفر ايضا :

$$\frac{\partial G}{\partial x_2} = f_1\phi_1 + f_2 = 0 \qquad (١ ـ ٢٨)$$

وبحل (١ ـ ٢٨) لـ ϕ_1 ثم بتعويض قيمتـها فى (١ ـ ٢٧) •

$$\frac{\partial F}{\partial x_2} = g_1\left(-\frac{f_2}{f_1}\right) + g_2 = \frac{f_1g_2 - f_2g_1}{f_1} \qquad (١ ـ ٢٩)$$

وبما ان الجاكوبيه (وهى المقام) و f_1 لايتلاشيان بالافتراض ، فان $\partial F/\partial x_2 \neq 0$ و (١ ـ ٢٦) يمكن حلهما لـ $x_2.$ وعلى هذا :

$$x_2 = h(y_1, y_2) \qquad (١ ـ ٣٠)$$

وبتعويض (١ ـ ٣٠) فى (١ ـ ٢٥) نتحصل على الحل لـ x_1

تنص نظرية اخرى لهلا علاقة بما سبق بان وجود الدالة $H(y_1, y_2, \ldots, y_n) = 0$ اى ان الاعتماد الدالى بين معادلات (١ ـ ٢١) يكون ضروريا وكافيا لتلاشى الجاكوبيه (١ ـ ٢١) فى كل مكان فى جوار النقطه $(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$ •

ويمكن اقتراح اثبات الكفايه كالتالي :

افترض وجود استقلال دالى $\overline{H(y_1, y_2)} = 0$ وباخذ التفاضليه الكليه ،

$$H_1\, dy_1 + H_2\, dy_2 = 0$$

وبالتعويض ب dy_1 ، dy_2 فاننا نحصل على قيمهما بتفاضل (١ ــ٢٣) و (١ ــ٢٤) ثم نجمع الحدود

$$(H_1f_1 + H_2g_1)\,dx_1 + (H_1f_2 + H_2g_2)\,dx_2 = 0$$

وبما ان هذه يجب ان تتحقق لجميع قيم dx_1, dx_2 فان الحدود المقوسه يجب ان تساوى صفر

$$H_1f_1 + H_2g_1 = 0 \qquad H_1f_2 + H_2g_2 = 0$$

وبتحريك الحدود الثانيه الى الجانب الايمن وبقسمة المعادلة الاولى على الثانيه ،

$$\frac{H_1f_1}{H_1f_2} = \frac{-H_2g_1}{-H_2g_2}$$

$$f_1g_2 - f_2g_1 = 0 \qquad (١ ــ٣١)$$

فالطرف الايسر ل (١ ــ٣١) هو الجاكوبيه التى تساوى صفرا •

مثال : اعتبر الدالتين :

$$x_1^2 - 2x_2 - 2 = y_1$$
$$x_1^4 - 4x_1^2x_2 + 4x_2^2 = y_2$$

فيكون الاعتماد الدالى بينهما معطا ب $(y_1+2)^2 - y_2 = 0$ وتكون الجاكوبيه :

$$\frac{\partial(y_1, y_2)}{\partial(x_1, x_2)} = \begin{vmatrix} 2x_1 & -2 \\ 4x_1^3 - 8x_1x_2 & -4x_1^2 + 8x_2 \end{vmatrix} = (-8x_1^3 + 16x_1x_2) - (-8x_1^3 + 16x_1x_2) = 0$$

حيث انها تتلاشى تطبيقيا •

فلو كانت الدالتين (١ ــ٢٣) و(١ ــ٢٤) دالتين خطيتين ، فان المبرهنة الاولى سوف تتحول الى المقترح المعروف بان محددة مصفوفة المعاملات يجب ان لا تتلاشى ويتحقق هذا الشرط لو كان عدد المعادلات مساويا لعدد المتغيرات وكذلك لو كانت المعادلات غير مستقله داليا • فلو تلاشت جاكوبيه نظام المعادلات انيه ، فان المعادلات ستكون مستقله خطيا (راجع الفصل ١ ــ١)•

ونقصد بالتكافوء المحلى الوحدوى هنا وجود حل فريد فى حوار معين • اما التكافوء الشامل الوحدوى Global فانه يعنى وجود حل فريد عبر منطقة كامله فمن الواضح ان التكافوء الشامل يتطلب التكافوء المحلى ولكن الجاكوبيه الغير متلاشيه سوف لا تضمن التكافوء الشامل تعتمد عادة على خواص الدوال المعنيه ، وعلى سبيل المثال ، التقعر المنضبط[١] وسوف تناقش باختصار التكافوء الشامل فى الفصل (١ ــ٣) ولقد ناقشنا مبرهنتين لها فى الفصل (١٠ ــ١)•

(١) راجع: H. Nikaido, *Convex Structures and Economic Theory* (New York: Academic, 1968), chap. 13.

١ – ٣ النهايات العظمى والنهايات الصغرى

A-3 MAXIMA AND MINIMA

ان النهايه العظمى النسبيه (relative) maximum (او النهايه الصغرى)لدالـة ذات متغير واحد او اكثر تكون هى النقطه القصوى extreme point ضمن مجـال الدالة domain بحيث ان جميع النقط الاخرى المحققه فى جوار صغير يكون لها قيم دالـة ليست اكبر من قيمة النقطه القصوى (او اصغر منها)٠

ان جميع النقط القصوى تكون نقط توقف stationary points اى النقط الـتى لاتتغير عندها قيمة الدالة • ولكن ليس جميع نقاط التوقف تكون نقاط قصوى فالنهايـة العظمى المنضبطه (او الصغرى) تكون اكبر انضباط من (او اصغر من) النقـاط المجاورة اما النهاية العظمى الشامله global maximum (او الصغرى الشاملـه) فانها تكون اكبر القيم (او اصغرها) حول جميع النقاط المحققه ضمن مجال الدالة •واما النهاية العظمى الغير مقيدة unconstrained (أو الصغرى) فقد تكون فى اى مكان ضمن مجال الدالة ولكن النهاية العظمى المقيدة constrained لاتحدث الا نقـط عند النقاط ضمن المجال التى تحقق قيدا أو أكثر من القيود المعينه •

النهايات العظمى والصغرى الغير مقيدة : Unconstrained Maxima and Minima

دع $y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ وارمز لها بـ $y = f(\mathbf{x})$ حيث ان $\mathbf{x}$ عبارة عن كمية متجهة مكونه من n من العناصر ونستخدم مفكوك مسلسلة تيلور Taylor series expansion; لنقدم اثبات للشروط الضروريه للنهاية العظمى الغير مقيدة[(١)] •

افترض ان النقطه $\mathbf{x}^0$ تعطى نهاية عظمى ودع $\Delta\mathbf{x} = (\Delta x_1, \ldots, \Delta x_n)$ تمثل ازاحـة displacement فى الفضاء للمتغيرات $\mathbf{x}$ ودع كذلك θ_1 ، θ_2 تمثلان عـددان بحيث ان θ_1 منضبطه على ان تكون موجبه وان θ_2 تكون $0 < \theta_2 < 1$

فاذا لوكانت $f(\mathbf{x})$ دالة متصله بحيث ان لها اشتقاقات جزئيه اوليه وثانويه متصـلـه وتكون قيمة الدالة عند النقطه $\mathbf{x}^0 + \theta_1\Delta\mathbf{x}$ اى عند النقطه المزاحه من موقف النهايـة العظمى بالكميه المتجه $(\theta_1\Delta\mathbf{x})$ كما يلى :

$$f(\mathbf{x}^0 + \theta_1\Delta\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}^0) + \theta_1 \sum_{i=1}^{n} f_i(\mathbf{x}^0)\Delta x_i + \frac{\theta_1^2}{2} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} f_{ij}(\mathbf{x}^0 + \theta_1\theta_2\Delta\mathbf{x})\Delta x_i \Delta x_j$$

وبما ان $f(\mathbf{x}^0)$ تكون نهاية عظمى ، فان $f(\mathbf{x}^0) \geq f(\mathbf{x}^0 + \theta_1\Delta\mathbf{x})$ وذلك لقيم صغيـره

(١) راجع A. C. Chiang, *op. cit.*, pp. 268–270.

ل θ_1، بدرجة صغيره ، وعندئذ تتطلب المعادلة (١ــ٣٢)

$$\theta_1 \sum_{i=1}^{n} f_i(\mathbf{x}^0)\Delta x_i + \frac{\theta_1^2}{2} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} f_{ij}(\mathbf{x}^0 + \theta_1\theta_2\Delta\mathbf{x})\Delta x_i \Delta x_j \leq 0 \qquad (١ــ٣٣)$$

وبقسمة طرفى المعادلة (١ــ٣٣) بـ θ_1 ثم نأخذ النهاية عندما تقترب θ_1 من صفر •

$$\sum_{i=1}^{n} f_i(\mathbf{x}^0)\Delta x_i \leq 0 \qquad (١ــ٣٤)$$

وبما ان $\Delta\mathbf{x}$ عبارة عن كمية متجة عشوائيه ، فهذه النتيجه تتحقق ايضا للكميه المتجهه $\Delta\mathbf{z} = (-\Delta x_1, \ldots, -\Delta x_n)$ وفى مثل هذه الحاله تصبح (١ــ٣٣) كالتالى :

$$-\sum_{i=1}^{n} f_i(\mathbf{x}^0)\Delta x_i \leq 0 \qquad (١ــ٣٥)$$

فالطريقة الوحيده التى تحقق فيها كلا من (١ــ٣٤) و (١ــ٣٥) هو ان تكون $f_i(\mathbf{x}^0) = \partial f(\mathbf{x}^0)/\partial x_i = 0$ وذلك لجميع $i = 1, \ldots, n$. وكنتيجه لذلك فان الشرط الضرورى للنهاية العظمى (وللنهاية الصغرى) هو ان تكون الاشتقاقات الجزئيه من الدرجه الاولى مساويه لصفر • والا فانه ليس من المحتمل تحقيق (١ــ٣٤) و (١ــ٣٥) وهذه المتساويات تسمى شروط الدرجة الاولى •

وبتعويض صفر بدلا من $f_i(\mathbf{x}^0)$ فى (١ــ٣٣) وبالقسمه على $\theta_1^2/2$ ثم نــدع θ_1 تقترب من صفر ، نحصل على :

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} f_{ij}(\mathbf{x}^0)\Delta x_i \Delta x_j \leq 0 \qquad (١ــ٣٦)$$

فالجانب الايسر من (١ــ٣٦) هو الشكل التربيعى quadratic form بحيث ان Δx_i تمثل المتغيرات وان الاشتقاقات الجزئيه من الدرجة الثانيه تمثل المعاملات • وتتطلب المتباينه (١ــ٣٦) بان يكون الشكل التربيعى سالبا نصف محدد اى انه اما سالبا أو صفرا لجميع احتمالات $\Delta\mathbf{x}$. ونسمى الشروط المضمنه فى الاشتقاقات الجزئيه من الدرجه الثانيه بشروط الدرجه الثانيه • اما شروط الدرجه الاولى فانها نفسها للنهايات العظمى والصغرى ويجب ان يكون الشكل التربيعى على يسار (١ــ٣٦) موجبا نصف محدد فى حالة النهايه الصغرى ، اى يكون موجبا او صفرا لجميع احتمالات $\Delta\mathbf{x}$ •

ومن الممكن اثبات ان (١ــ٣٦) تكون سالبه محددة definite (اى سالبه لجميع احتمالات $\Delta\mathbf{x}$ ماعدا $\mathbf{x} = 0$ ذلك اذا كان وفقط اذا كانت القيم الصغرى المحدده الرئيسيه المستخلصه من محددة هيسيان المكونه من الاشتقاقات الجزئيه من الدرجه الثانيه :

$$\begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} & \cdots & f_{1n} \\ f_{21} & f_{22} & \cdots & f_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f_{n1} & f_{n2} & \cdots & f_{nn} \end{vmatrix}$$

وذلك بحذف الاعمدة والصفوف $(n-i)$ الاخيرة$(i = n-1, n-2, \ldots, 0)$ التى تتبـــادل الاشارات :

$$f_{11} < 0, \begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{vmatrix} > 0, \ldots, (-1)^n \begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} & \cdots & f_{1n} \\ f_{21} & f_{22} & \cdots & f_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f_{n1} & f_{n2} & \cdots & f_{nn} \end{vmatrix} > 0$$

ويكون الشكل التربيعى موجبا محددا وذلك اذا كان وفقط اذا كانت القيم الصـــــغرى المحددة الرئيسيه جميعها موجبه [1] . وتحدد القيم القصوى بحل المعادلات ال n :

$$f_1(x^0) = 0, f_2(x^0) = 0, \ldots, f_n(x^0) = 0$$

لقيم ال n متغيرات $x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0$ ثم تحسب اشارات القيم الصغرى المحـــددة الرئيسيه لهيسيان ، ومن ثم نحدد ما اذا كانت مناسبة لنهاية عظمى أو لنهاية صغرى .

د ع $f(x)$ تمثل دالة ذات متغير واحد فتكون الشروط للنهاية العظمى عند $x = x^0$ هى:

$$\text{(A)} \quad f'(x^0) = 0 \quad \text{and} \quad f''(x^0) \leq 0$$

وتكون شروط الكفايه :

$$\text{(B)} \quad f'(x^0) = 0 \quad \text{and} \quad f''(x^0) < 0$$

اما بالنسبه لحالة النهاية الصغرى فان المتباينات سوف تكون عكس ما هى عليه فى حالـة النهاية العظمى . فالشروط فى (A) ليست كافيه كما ان الشروط فى (B) ليست ضروريـه . ونمثل للحالة (A) بالدالة $f(x) = x^3$ فتكون $f'(x) = 3x^2$ وتكون $f''(x) = 6x$. فعندما تكـون $x = 0$ فان شروط (A) تتحقق ولكن لا يكون للدالة نقطة قصوى عند صفر (بالرغم مـن ان لها نقطة توقف) ونمثل لحالة (B) بالدالة $f(x) = -x^4$ والتى تكون نهايتها العظمـى عند نقطة الاصل بالرغم من ان اشتقاقها الثانى (وكذلك الاول) يتلاشى عنـــد تلك النقطه . فلو كان الاشتقاق الثانى للدالة $y = f(x)$ صفرا فان يكون هنـاك ثـــلاث احتمالات :

(١) $d^3y/dx^3 \neq 0$

(٢) $d^3y/dx^3 = 0$ and $d^4y/dx^4 \neq 0$

(٣) $d^3y/dx^3 = 0$ and $d^4y/dx^4 = 0$

فلو تحققت (١) فان الدالة سوف يكون لها نقطة انعطاف inflection point (اى ان للاشتقاق الاول قيمه قصوى) بدلا من نهاية عظمى أو صغرى . اما اذا تحققت

---

(١) ان ترقيم المتغيرات يعمل بطريقة عشوائيه وتتطلب اشارات الشروط على القيم الصغرى المحددة الرئيسيه بان تكون لجميع القيم الصغرى المحددة بترتيب معين نفـــس الاشارات فمثلا في حالة النهاية العظمى ذات المتغيرين فان الشرطيـن $f_{11} < 0$ و $f_{11}f_{22} - f_{12}^2 > 0$ تتطلب بان تكون f_{22} سالبه .

(٢) فان الدالة سوف يكون لها نهاية عظمى أو صغرى • وذلك حسب ما اذا كـــان الاشتقاق الرابع سالبا او موجبا • فاذا تحققت (٣) فان اشارات الاشتقاقات الخامس والسادس يجب اختيارها ونطبق (١) و (٢) بحيث ان :

(d^5y/dx^5) تحل مكان (d^3y/dx^3) وان تحل (d^6y/dx^6) مكان (d^4y/dx^4)

وهذه الطرق لاتغطى جميع الحالات كما توضح الدالة التاليه هذ $y = e^{-1/x^2}$ $x \neq 0$ و $y = 0$ ط $x = 0.$ فالدالة تكون لها نهاية صغرى عند الاصل[1] ويكون لهـــا عددا غير محددا من الاشتقاقات التى لها قيمة مساويه لصفر وذلك عند نقطة الاصـــل• وتتحقق جميع الاعتبارات للدوال المتعدده المتغيرات •

فعند تحقيق شرط الدرجة الاولى عند نقطة ما في اى فترة تكون خلالها الدالــــة متفاضله مرتين وتكون دالة مقعرة بانضباط (محدبة بانضباط) فان هذا يمثل شــــرطا ضروريا وكافيا لوجود نهاية عظمى فريده شامله (نهاية صغرى) عند تلك النقطه • فلـو اننا اهملنا حالة تلاشى الاشتقاق الثانى المشار اليها فى الفقرة السابقة فان الاثبات يكون سهلا[2] اعتبر حالة الدالة المقعرة بانضباط • اختار قيمتين متميزتين من x وليكونا x_1 و x_2, ضمن الفترة اعد كتابة (١ـ٥) بدلالة λ •

$$g(\lambda) = f[\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2] - \lambda f(x_1) - (1-\lambda)f(x_2) > 0$$

وذلك لـ $0 < \lambda < 1$ بحيث تكون القيمتين المحددتين $g(0) = 0$ و $g(1) = 0.$ فيتبـــع من اتصال $f(x)$ ان $g(\lambda)$ يكونا لها نهاية عظمى فى الفترة المغلقه $0 \leq \lambda \leq 1$ ويكون شرط الدرجة الاولى لهذه النهايه العظمى •

$$g'(\lambda) = f'(x)(x_1 - x_2) - f(x_1) + f(x_2) = 0$$

حيث ان x تمثل ($\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2.$) ويكون شرط الدرجه الثانيه[3] :

$$\frac{d^2g(\lambda)}{d\lambda^2} = f''(x)(x_1 - x_2)^2 < 0$$

والتى يتطلب بان تكون $f''(x) < 0.$ وبالامكان التوصل الى اشتقاق مماثل يتطلـــب بان تكون $f''(x) > 0$ لحالة الدالة المحدبه بانضباط • ولهذا فان التقعر المنضبـــط

(١) راجع K. Sydsaeter, "Letter to the Editor on Some Frequently Occurring Errors in the Economic Literature Concerning Problems of Maxima and Minima," *Journal of Economic Theory*, vol. 9 (December, 1974), pp. 464–466.

(٢) ان الاشتقاق الثانى لدالة محدبه او مقعرة بانضباط لايتلاشى الا فقط عند النقط المعزوله ، ولكنها لاتتلاشى عند الجوار •

(٣) لقد استخدمنا قاعدة دالة الدالة للاشتقاقات الثانيه • وعموما اذا كانت $\phi(x) = \psi[h(x)]$ فان : $\phi''(x) = \psi''[h(x)]h'(x)^2 + \psi'[h(x)]h''(x).$

(التحدب المنضبط) يضمن تحقيق شرط الدرجه الثانيه لنهاية عظمى (نهاية صغرى) ٠
والان ، لندع x^0 تعطى نهاية عظمى بحيث ان $f'(x^0) = 0$ وبما ان $f''(x) < 0,$
$f'(x) < 0$ لجميع $x > x^0$ وان $f'(x) > 0$ لجميع $x < x^0$ فانه لايمكن ان يكون هنـاك قيمة ثانيه لـ x يكون عندها الاشتقاق الاول مساويا لصفر ، x^0 تكون نهاية عظمـى فريده شامله ٠ وبالمثل فان النهايات الصغرى للدوال المحدبه بانضباط تكون فريـده شامله ٠ واما فى حالة الدوال المحتويه على n من المتغيرات فان مناقشة مماثله تحقق كل طلباتها ٠ افترض التقعر المنضبط ودع $\mathbf{x}$ تشير الى كمية متجه ، ففى هذه الحاله:

$$g'(\lambda) = \sum_{i=1}^{n} f_i(\mathbf{x})(x_{1i} - x_{2i}) - f(\mathbf{x}_1) + f(\mathbf{x}_2) = 0$$

وكذلك :

$$g''(\lambda) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} f_{ij}(\mathbf{x})(x_{1i} - x_{2i})(x_{1j} - x_{2j}) < 0$$

والتى تتطلب بان تكون مصفوفة هيسيان هى مصفوفة الاشكال المربعة السالبه المحددة والتى تكون كافيه (مع شروط الدرجة الاولى) للنهاية العظمى والتى يمكن اثباتها لتكون فريدة شامله ٠

تنص المبرهنات الحليفه Allied theorems بانه اذا كانت $f''(x) > 0$ عبر الفترة فان $f(x)$ تكون محدبه بانضباط عبر الفترة وانه اذا كانت $f''(x) < 0$ عبر الفترة فان $f(x)$ تكون مقعرة بانضباط عبر الفترة ٠ وتمدنا هذه المبرهنات بوسائل سهلة لاختبـــار التحدب او التقعر لدوال معينه ٠ فمثلا ، نعتبر الدالة : $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x.$
فيكون اشتقاقها الثانى هو $f''(x) = 6x - 6$ والذى يكون سالبا لـ $x < 1$ ويكون موجبـا لـ $x > 1$ ولذا فان $f(x)$ تكون مقعرة بانضباط لـ $x < 1$ وتكون محدبه بانتظام لـ $x > 1$
اما فى حالة وجود n من المتغيرات فان المحددات المعطاة بـ (ا ــ ٣٧) ســوف تمدنا بوسائل لاختبار التقعر والتحدب لدوال محدده ٠ فاذا كانت المحـــددات تتبادل فى الاشارات كما هو واضحا من (ا ــ ٣٧) عبر الفترة ، فان الدالة المقابلــه سوف تكون مقعرة بانضباط عبر الفترة ، ولكن اذا كانت المحددات فى (ا ــ ٣٧) موجبه جميعها عبر الفترة ، فان الدالة تكون محدبه بانضباط عبر الفترة ٠ فمثلا اعتبر الدالة :

$$f(x_1, x_2) = 2x_1^{0.5}x_2^{0.4}.$$

وبتقييم المحددتين الاوليتين من (ا ــ ٣٧) ،

$$f_{11} = -0.5x_1^{-1.5}x_2^{0.4} \qquad f_{11}f_{22} - (f_{12})^2 = 0.08x_1^{-1}x_2^{-1.2}$$

فيتبع من هذا ان $f(x_1, x_2)$ تكون مقعرة بانضباط لـ $x_1 > 0, x_2 > 0$ قد يكون للدوال المتعددة المتغيرات نقاط توقف ليست نهاية عظمى ولا نهاية صغرى فمثل نقاط التوقـف هذه قد تكون نقاط انعطاف (كما هو الحال فى حالة المتغير الواحد) او قد تكـون

نقاط سرج saddle point وهذه النقاط الاخيره(نقاط السرج) هى عبارة عن نقاط توقف للدالة ولا يوجد لها نقاط مقابلة فى حالة المتغير الواحد ، وتتميز بالحقيقه بان الداله تصل الى نهايتها العظمى عبر بعض الاتجاهات ولكنها ايضا تصل الى نهايتها الصغرى عبر اتجاهات اخرى • فمثلا الدالة $f(x, y) = x^2 - y^2$ يكون لهـا نقطة سرج عند نقطة الاصل •

النهايات العظمى والصغرى بقيود على شكل متساويات :

Maxima and Minima with Equality Constraints

ان مسائل النهايات العظمى والصغرى فى الاقتصاد تكون بحيث ان المتغيرات المستقله لايسمح لها بان تاخذ جميع قيمها المحتمله فالمتغيرات تكون " مقيـده" لتحقيق بعض العلاقات الجانبيه • فمسالة النهاية العظمى المقيده تكون عبارة عن تحقيق الحد الاعلى للدالة $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ تحت شرط القيد بان القيم $x_1, x_2, \ldots, x_n$ فقط هى التى تحقق المعادلة ، وتكون جائزة admissible :

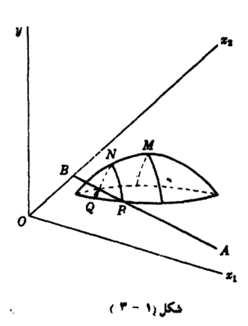
$$g(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$$

فمثلا ، الدالة :

$$f(x_1, x_2) = (x_1 - 1)^2 + (x_2 - 2)^2$$

يكون لها نهاية عظمى غير مقيده عند النقطه $x_1 = 1,\ x_2 = 2.$ ولكن لو كانت هـذه الدالة معرضه للمتطلبات : $x_1 - x_2 - 2 = 0$ فان قيمتها الصغرى سوف تتحقق عند النقطه $x_1 = \frac{5}{2},\ x_2 = \frac{1}{2}.$ فالدالة $f(x_1, x_2)$ تعرف سطحا فى فضاء بابعاد ثلاثـة three-dimensional space. ان المعادلة $x_1 - x_2 - 2 = 0$ تعرف خطا مستقيما فـى المستوى x_1x_2 السطحى • ونعرف مسالة النهاية الصغرى المقيده بانها المسالـة التى نبحث فى ايجاد ادنى نقط السطح المعرف بـ $f(x_1, x_2)$ بحيث ان هذه النقطه تكون فوق الخط المستقيم المعرف بالقيد • وهذه المفاهيم تكون موضحة بالنسبـة لمسالة النهاية العظمى كما فى الشكل (١ ـ٣) فالنهاية العظمى الغير مقيد تحدث عند النقطه $M.$ • اما القيد فانه يكون معطا بالخط $AB.$ وتكون جميع النقاط علـى السطح ماعدا تلك التى تقع فوق الخط $AB,$ وهى النقط عبر الخط المنحـنى $PNQ,$ ليست ذات علاقه وتقع النهايه العظمى المقيده عند النقطه $N.$ وتكون النتيجه عامـه مختلفه عن حالة عدم التقيد •

وتكون النهاية العظمى المقيده ادنى من النهايه العظمى الغير مقيده ولايمكـن ان تكون بطبيعة الحال اعلى • تشتق شروط الكفاية للنهاية العظمى لمثال المتغيرين المقيد بـن بالاشارة الى حالة عدم التقيد • ونذكر هنا فقط منطوق شروط الكفاية لحالة الـ $n.$



شكل (١ - ٣)

متغير بدون اثبات •

لتدع $f(x_1, x_2)$ تكون دالة لتحقيق الحد الاعلى منها عرضة للقيد $g(x_1, x_2) = 0.$
لنفترض ان احد اشتقاقات $g(x_1, x_2),$ الجزئيه على الاقل ، وليكن $\partial g/\partial x_2,$ ، لا يتلاشى في بعض المناطق • فعندئذ باستخدام مبرهنة الدالة الضمنيه ، يمكن لنا ايجاد حلا فريدا $x_2 = h(x_1)$ ثم بالتعويض في الدالة التى نريد ان تحقق حدها الاعلى فنحصل على : $f[x_1, h(x_1)].$ •وهذا يكون دالة بمتغير واحد ، وتحقق نهايتها العظمى الغير مقيدة بالنسبه لـ x_1 للقيد • وكما اسلفنا فان شروط الكفاية للنهاية العظمى تكون :

$$df[x_1, h(x_1)]/dx_1 = 0, \qquad d^2f[x_1, h(x_1)]/dx_1^2 < 0.$$

وبالتفاضل للحصول على شرط الدرجه الاولى :

$$\frac{df}{dx_1} = f_1 + f_2\frac{dh}{dx_1} = 0 \qquad (١ _٣٨)$$

ولكن $dh/dx_1 = dx_2/dx_1 = -g_1/g_2$ وذلك لان القيد يجب ان يتحقق لجميع قيم (x_1, x_2) المتوفرة فيها الشروط $g_1dx_1 + g_2dx_2 = 0.$ ومن ثم فان :

$$f_1 + f_2\left(-\frac{g_1}{g_2}\right) = 0 \qquad (١ _٣٩)$$

والان ، دعنا نعرف $-f_2/g_2 = \lambda.$ فعندئذ تصبح (١ _٣٩)،

$$f_2 + \lambda g_2 = 0 \qquad (١ _٤٠)$$

وايضا :

$$f_1 + \lambda g_1 = 0 \qquad (١ _٤١)$$

وتكون المعادلتين (١ _٤٠) و(١ _٤١) وكذلك القيد هى شروط الدرجة الاولى

للنهاية العظمى •

ويمكن الحصول ايضا على شروط الدرجة الاولى باستخدام دالة لاقرانج •

$$F(x_1, x_2, \lambda) = f(x_1, x_2) + \lambda g(x_1, x_2) \quad (١ _ ٤٢)$$

حيث ان λ تسمى مضروب لاقرانج وبوضع مشتقاتها الجزئيه بالنسبة x_1, x_2, λ مساويا لصفر ، فان هذا سوف يعطى ثلاثة معادلات محتوية على ثلاثة من المتغيرات x_1, x_2, λ, ويعطى الحل لهذا النظام من المعادلات النقطه او النقط التى تتحصل عندها الدالة $f(x_1, x_2)$ على نهايتها العظمى (بشرط ان يتحقق شرط الدرجة الثانيه الذى سوف نناقشه فيما يلى) وذلك عرضة لـ $g(x_1, x_2) = 0.$ (١) •

يتطلب شرط الدرجة الثانيه بان يكون اشتقاق الدالة : $f[x_1, h(x_1)]$ الثانى سالبا • وبتفاضل (١ _ ٣٨) بالنسبه لـ x_1 •

$$\frac{d^2f}{dx_1^2} = f_{11} + f_{12}\frac{dh}{dx_1} + f_{21}\frac{dh}{dx_1} + f_{22}\left(\frac{dh}{dx_1}\right)^2 + f_2\frac{d^2h}{dx_1^2} < 0 \quad (١ _ ٤٣)$$

وبملاحظة ان $f_{12} = f_{21}$ للدوال التى تكون اشتقاقتها الجزئيه الثانيه متصلة وان $dh/dx_1 = -g_1/g_2,$ فان (١ _ ٤٣) تصبح :

$$\frac{d^2f}{dx_1^2} = f_{11} - 2f_{12}\left(\frac{g_1}{g_2}\right) + f_{22}\left(\frac{g_1}{g_2}\right)^2 - f_2\left[\frac{[g_{11} + g_{12}(-g_1/g_2)]g_2 - [g_{21} + g_{22}(-g_1/g_2)]g_1}{g_2^2}\right]$$

$$= \frac{1}{g_2^2}\left[f_{11}g_2^2 + f_{22}g_1^2 + 2f_{12}g_1g_2 - \left(\frac{f_2}{g_2}\right)(g_{11}g_2^2 + g_{22}g_1^2 - 2g_{12}g_1g_2)\right] < 0$$

ونلاحظ ايضا ان $-f_2/g_2$ قد عرفت على انها $\lambda,$ وهذه تصبح

$$\frac{d^2f}{dx_1^2} = \frac{1}{g_2^2}[(f_{11} + \lambda g_{11})g_2^2 + (f_{22} + \lambda g_{22})g_1^2 - 2(f_{12} + \lambda g_{12})g_1g_2] < 0 \quad (١ _ ٤٤)$$

وبما ان $g_2^2 > 0$ (لاحظ انه لكى نتمكن من تطبيق مبرهنة الدالة الضمنيه فان g_2 يجب ان نفترض من ان لا تكون مساويه لصفر) فان الشرط (١ _ ٤٤) سوف يتحقق بسهولة ويكون معادلا لـ الشرط التالى لمحددة هيسيان الحدوديه +

$$\begin{vmatrix} f_{11} + \lambda g_{11} & f_{12} + \lambda g_{12} & g_1 \\ f_{12} + \lambda g_{12} & f_{22} + \lambda g_{22} & g_2 \\ g_1 & g_2 & 0 \end{vmatrix} > 0$$

فتكون الحدود فى الجزء الايسر الاعلى هى المشتقات الجزئيه الثانيه للدالة $F(x_1, x_2, \lambda)$ بالنسبه لـ $x_2; x_1$ ويحتوى العمود الموجود فى اقصى اليمين والصف السفلى على الاشتقاقات الجزئيه الاولى للقيد ، ويكون العنصر الموجود فى الركن

---

(١) لو ان الدالة F قد تكونت بكتابة $g - \lambda g$ بدلا من $f + \lambda g,$ فان الفرق الوحيد سوف يكون تغيرا فى اشارة $\lambda.$ •

الجنوبى الشرقى مساويا لصفر • ويكون شرط الدرجه الثانيه(١ــ٤٥) معادلا للمتطلب بان الشكل التربيعى :

$\Sigma_{i=1}^{2}\Sigma_{j=1}^{2} f_{ij}\, dx_i\, dx_j$ يكون سالبا لجميع قيم dx التى تحقق :

$$g_1\, dx_1 + g_2\, dx_2 = 0 \text{ except } dx_1 = dx_2 = 0.$$

تعطى المعادلتان (١ ــ٤٠) و(١ ــ٤١) شروط الدرجه الاولى للنهاية الصغرى المقيدة فى حالة المتغيران • ويتطلب شرط الدرجة الثانيه بان تكون محددة هيسيان المحددة سالبه • ففى هذه الحاله يجب ان يكون الشكل التربيعى موجبا لقيم dx التى تحقق : $g_1\, dx_1 + g_2\, dx_2 = 0$ ماعدا $dx_1 = dx_2 = 0$ •

ويمكن اشتقاق شروط الكفايه من الدرجه الاولى والثانيه للنهايات العظمى والصغرى للدوال المحتويه على n من المتغيرات بحيث ان يكون لها $m < n$ من القيود • وذلك على نمط مشابه لما سبق • فمسالة القيد الواحد هى ان تتحقق الحد الاعلى من $f(x_1, \ldots, x_n)$ عرضة لـ $g(x_1, \ldots, x_n) = 0$ نكون الان دالة لاقرانج :

$$F(x_1, \ldots, x_n, \lambda) = f(x_1, \ldots, x_n) + \lambda g(x_1, \ldots, x_n)$$

وتتطلب شروط الدرجة الاولى بان تتلاشى الاشتقاقات الجزئيه الاولى للدالة F لكل من النهايات العظمى والصغرى • وهذا الشرط يعطى $(n+1)$ من المعادلات المحتوية على $(n+1)$ من المتغيرات •

$$\frac{\partial F}{\partial x_1} = f_1 + \lambda g_1 = 0$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{\partial F}{\partial x_n} = f_n + \lambda g_n = 0 \qquad (١ ــ٤٥)$$

$$\frac{\partial F}{\partial \lambda} = g(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$$

وتضمن المعادلة الاخيرة بتحقيق القيد • ويعطى حل هذا النظام من المعادلات الاتيه النقطه او النقط التي يحقق عندها $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ نهاية عظمى(او صغرى) عرضـه لـ $g(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0.$

ويتطلب شروط الدرجة الثانيه بان يكون الشكل التربيعى :

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} f_{ij}\, dx_i\, dx_j$$

سالبا للنهاية العظمى(موجبا للنهاية الصغرى) لجميع قيم dx التى تحقق :

$$g_1\, dx_1 + g_2\, dx_2 + \cdots + g_n\, dx_n = 0$$

ماعدا $dx_i = 0$ جميع $i.$ نكون الان المحددات :

$$\begin{vmatrix} F_{11} & F_{12} & g_1 \\ F_{21} & F_{22} & g_2 \\ g_1 & g_2 & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} F_{11} & F_{12} & F_{13} & g_1 \\ F_{21} & F_{22} & F_{23} & g_2 \\ F_{31} & F_{32} & F_{33} & g_3 \\ g_1 & g_2 & g_3 & 0 \end{vmatrix}, \ldots, \begin{vmatrix} F_{11} & F_{12} & \ldots & F_{1n} & g_1 \\ F_{12} & F_{22} & \ldots & F_{2n} & g_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ F_{n1} & F_{n2} & \ldots & F_{nn} & g_n \\ g_1 & g_2 & \ldots & g_n & 0 \end{vmatrix}$$

والتى تتكون من ربط حدود القيم الصغرى المحددة الرئيسيه لمحددة هيسيان المكونــه من الاشتقاقات الجزئيه الثانيه للدالة F بالصف والعمود المحتويان على الاشتقاقات الجزئيه الاوليه للقيد • ويكون العنصر فى الركن الجنوبى الشرقى لكل واحدة من هذه المصفوفات مساويا لصفر •

وسوف تتحقق شروط الدرجة الثانيه للنهاية العظمى المقيدة اذا كانت هذه المحددات المحدودة تتبادل فى الاشارة ومبتدئه بالموجب ، اى ان اشارات المحددات من اليسار الى اليمين يجب ان تكون $+, -, +,$ وهكذا وسوف تتحقق شروط الدرجه الثانيـــه للنهاية الصغرى المقيده اذا كانت جميعها سالبه • وتكون هذه الشروط مع (١ ـ ٤٥) شروط كفاية للنهايات العظمى والصغرى المقيده (١) •

ان دالة لاقرانج لحالة المتغيرات تكون :

$$F(x_1, \ldots, x_n, \lambda_1, \lambda_2) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) + \lambda_1 g^1(x_1, x_2, \ldots, x_n) + \lambda_2 g^2(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

حيث ان λ_1 و λ_2 يمثلان مضروبات لاقرانج الغير محددة • فشروط الدرجة الاولـــى للنقاط القصوى تتطلب :

$$\frac{\partial F}{\partial x_1} = f_1 + \lambda_1 g_1^1 + \lambda_2 g_1^2 = 0$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\frac{\partial F}{\partial x_n} = f_n + \lambda_1 g_n^1 + \lambda_2 g_n^2 = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial \lambda_1} = g^1(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial \lambda_2} = g^2(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$$

تتطلب شروط الدرجة الثانيه بان يكون الشكل التربيعى المكون من الاشتقاقات الجزئيــه من الدرجه الثانيه سالبا فى حالة النهاية العظمى (موجبا فى حالة النهاية الصغرى)

---

(١) راجع كتـــاب Samuelson, المذكور سابقا فى الملحق ٨ وايضا كتـــاب Allen, : المذكور سابقا فى الباب ١٩ وللحصول على معالجة اكثر عمقـــا لبعض افكار هذه المسألة راجع :

"Definite and Semi-definite Quadratic Forms," *Econometrica*, vol. 20 (April, 1952), pp. 295-300.

لجميع مجموعات القيم (القيم الغير بديهيه nontrivial) لـ dx التى تحقق •

$$g_1^1\,dx_1 + g_2^1\,dx_2 + \cdots + g_n^1\,dx_n = 0$$
$$g_1^2\,dx_1 + g_2^2\,dx_2 + \cdots + g_n^2\,dx_n = 0$$

ويربط القيم الصغرى المحددة الرئيسيه للهيسيان الخاصه بـ F بحدود الاشتقاقات الجزئيه الاولى للقيدين :

$$\begin{vmatrix} F_{11} & F_{12} & F_{13} & g_1^1 & g_1^2 \\ F_{21} & F_{22} & F_{23} & g_2^1 & g_2^2 \\ F_{31} & F_{32} & F_{33} & g_3^1 & g_3^2 \\ g_1^1 & g_2^1 & g_3^1 & 0 & 0 \\ g_1^2 & g_2^2 & g_3^2 & 0 & 0 \end{vmatrix}, \ldots, \begin{vmatrix} F_{11} & \ldots & F_{1n} & g_1^1 & g_1^2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ F_{n1} & \ldots & F_{nn} & g_n^1 & g_n^2 \\ g_1^1 & \ldots & g_n^1 & 0 & 0 \\ g_1^2 & \ldots & g_n^2 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

ففى حالة القيدين ، فان شروط الدرجة الثانيه للنهاية العظمى سوف يتحقق اذا تبادلت المحددات العليا فى الاشارات ، مبتدئه بالسالب ، وتلك للنهاية الصغرى سوف تتحقق اذا كانت جميعها موجبه • فلو كان هناك $m < n$ من القيود فاننا سوف نربط حدود القيم الصغرى المحددة الرئيسيه من الدرجة $(m + 1)$ الى n بالاشتقاقات الجزئيه للقيود الـ m وسوف تتحقق شروط الدرجة الثانيه للنهاية العظمى اذا ، تبادلت المحددات فى الاشارة ، مبتدئه بالاشاره $(-1)^{m+1}$ وتلك للنهايه الصغرى سوف تتحقق اذا كانت جميع المحددات المقررة خاضعة للاشارة $(-1)^m$. •

الامثليات المقيدة وشبه المتقعرة (شبه التحدب)

Constrained Optima and Quasi-Concavity (Quasi-Convexity)

لقد ثبت باستخدام طرق رياضيه متقدمه بان $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ لايمكن ان يكون لها اكثر من نهاية عظمى مقيده واحده (نهاية صغرى) فى الفترة وذلك اذا تحققت الشروط المحددة للنهاية العظمى المقيده (النهايه الصغرى) عبر الفترة وفى هذه يكون تحقيق الشروط (١ــ٤٥) كافيا لوجود نهاية عظمى وحيدة شاملة (نهاية صغرى) ضمن الفترة •

تكون المحددة التاليه بربط حدود هيسيان f مع الاشتقاقات الجزئيه من الدرجه الثانيه الخاصة بها :

$$\begin{vmatrix} f_{11} & \cdots & f_{1n} & f_1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f_{n1} & \cdots & f_{nn} & f_n \\ f_1 & \cdots & f_n & 0 \end{vmatrix} \qquad (١ــ٤٦)$$

فلو كانت f شبه مقعرة فان القيم الصغرى المحددة الرئيسيه من الدرجة (٢) الى الدرجه n لـ(١ ـ٤٦) سوف تتبادل بحيث تكون غير سالبه[1] او المنحنيات[2] فلو كانت f شبه مقعرة بانضباط منتظم ضمن المجال فمثل هذه النقاط سوف لا توجد ضمن ذلك المجال وتكون القيم الصغرى المحددة الرئيسيه لـ (١ ـ٤٦) موجبه بانضباط وسالبه بانضباط •

اما فى حالة القيد الواحد فانه لو كانت f شبه مقعرة بانضباط منتظم وكانت g خطيه فان شروط الدرجه الثانيه النهاية العظمى المقيدة سوف تتحقق عندما تتحقق شروط الدرجة الاولى •

وبتعويض $f_i = \lambda g_i$ من(١ ـ٤٥) فى (١ ـ٤٦) ثم بقسمة الصف الاخير والعمود الاخير لمحددة الحصيلة بالمقدار $1/\lambda$ بحيث ان (١ ـ٤٦) تصبح :

$$\lambda^2 \begin{vmatrix} f_{11} & \cdots & f_{1n} & g_1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f_{n1} & \cdots & f_{nn} & g_n \\ g_1 & \cdots & g_n & 0 \end{vmatrix}$$

وتكون قيمها الصغرى المحدده الرئيسيه باشارات يتطلبها تحقيق شروط الدرجه الثانيه وبالمثل ، اذا كانت f شبه محدبة بانضباط منتظم فالحصول على نهايتها الصغرى تحت شرط القيد الخطى فان شروط الدرجه الثانيه سوف تنبع من شروط الدرجة الاولى •

فاذا وجد اكثر من قيد واحد وكانت f او كانت g غير خطيه ، فان االارتباطات بين شروط الدرجه الثانيه وشبه التقعر (شبه التحدب) تصبح اكثر تعقيدا فلو كانت g غير خطيه فى حالة القيد الواحد ، فان $f_{ij} \neq F$ وان شبه التقعر المنضبط بانتظام سوف لا يكون كاف بعد ذلك لضمان شروط الدرجه الثانيه فى حالة النهاية العظمى المقيده • وهذه الحاله سوف تغطى بالتمرين (١ ـ١١) •

النهايات العظمى والصغرى بقيود على شكل متباينات :

Maxima and Minima with Inequality Constraints

يرغب الانسان فى بعض الاحيان من الحصول على النهاية العظمى للدالة $f(x_1, \ldots, x_n)$ عرضة لمجموعتين من القيود على شكل متباينات :

---

(١) راجع

K. J. Arrow and A. C. Enthoven, "Quasi-Concave Programming," *Econometrica*, vol. 29 (October, 1961), pp. 779–800.

(٢) ولمراجعة امثلة لمثل هذه الدوال ، راجع :

D. W. Katzner, *Static Demand Theory* (New York: Macmillan, 1970), pp. 54, 211.

$$g^i(x_1, \ldots, x_n) \geqq 0 \qquad i = 1, \ldots, m \qquad (١ \text{ــ} ٤٧)$$

$$x_1, \ldots, x_n \geqq 0 \qquad (١ \text{ــ} ٤٨)$$

فالمجموعة الاولى تضبط العلاقات بين جميع الـ x والمجموعة الثانيه تتطلب بان تكون المتغيرات غير سالبه فهذه مساله برمجه غير خطيه nonlinear-programming وقد تنص على شروط الكفايه والضرورة للنهاية العظمى بدلالة دالة مشابهة لدالة لاقرانج التى استخدمت فى حالة القيود على شكل مستاويات ، لذا نكون الدالة :

$$F(x_1, \ldots, x_n, \lambda_1, \ldots, \lambda_m) = f(x_1, \ldots, x_n) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i g^i(x_1, \ldots, x_n) \qquad (١ \text{ــ} ٤٩)$$

وتكون شروط كون وتكر *Kuhn-Tucker conditions* (١ ــ ٤٩) كالتالى :

$$\frac{\partial F}{\partial x_j} = f_j + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i g^i_j \leqq 0 \qquad j = 1, \ldots, n \qquad (١ \text{ــ} ٥٠)$$

$$\frac{\partial F}{\partial \lambda_i} = g^i \geqq 0 \qquad i = 1, \ldots, m \qquad (١ \text{ــ} ٥١)$$

$$x_j \geqq 0 \qquad j = 1, \ldots, n \qquad (١ \text{ــ} ٥٢)$$

$$\lambda_i \geqq 0 \qquad i = 1, \ldots, m \qquad (١ \text{ــ} ٥٣)$$

$$\left(f_j + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i g^i_j\right) x_j = 0 \qquad j = 1, \ldots, n \qquad (١ \text{ــ} ٥٤)$$

$$\lambda_i g^i = 0 \qquad i = 1, \ldots, m \qquad (١ \text{ــ} ٥٥)$$

فمجموعتى الشروط الاولى (١ ــ٥٠) و (١ ــ٥١) تكونا مشابهين لشروط الدرجة الاولى فى حالة القيود على شكل مستاويات • والفرق هو ان هذه الاشتقاقات الجزئيه ليس شرط ان تكون صفرا ولكن غير سالبه وغير موجبه على التوالى ويضمن زوج الشرط الثانى ان جميع المتغيرات ، بما فى ذلك مضروبات لاقرانج ، تكون غير سالبه • اما المجموعة الاخيره من الشروط فانها تكون الشروط التكميلية complementarity اما اسباب وجود متباينات فى (١ ــ٥٠) و (١ ــ٥١) فانه سوف يعطى بطريقة بديهيه بالنسبه لحالة المتغير الواحد عرضة لمتطلب الغير سلبيه nonnegativity تصور ان احدا من الناس يرغب فى الحصول على النهاية العظمى للدالة $f(x)$ عرضه لـ $x \geqq 0$ فهناك احتمالين ، اذا وجدت نهاية عظمى :

(١) تحدث نهاية عظمى غير مقيده عن بعض النقاط حيث ان x تكون اما موجبه او صفر • ففى هذه الحاله يكون شرط الدرجة الاولى المناسب : $f'(x) = 0$

(٢) يوجد نهاية عظمى غير مقيده عند نقطة ما بحيث ان $x < 0$ وبما ان القيم السالبه لـ x غير مقبولة بمنطوق المسالة ، فان اكبر قيمة مقبولة للدالة يجب ان تحدث عند $x = 0$ ولكن الدالة عند هذه النقطه يجب ان تكون متنازلية فى القيمه ، اى ان $f'(x)$

يجب ان تكون سالبه ، لانه لو ان هذا غير صحيحا ، فان النهاية العظمى الغير مقيده سوف تحدث عند بعض القيم الموجبه لـ x متضاربه مع الافتراض بانها لاتحدث •لذا فان $f'(x) \leq 0$ سوف تعطى جميع الحالات المحتمله وذلك عندما نفرض الانضباط $x \geq 0$ وبالاضافه لهذا فان هذا سوف يعطي تعزيزا بديهيا للشرط التكميلى (١ ــ٥٤) ، ويجب ان تكون $x \; f'(x)$ مساويه لصفر عند النهاية العظمى : اذا كانت $x > 0$ فــان $f'(x)$ يجب ان تساوى صفرا كما ذكرنا سالفا ، اما اذا كانت $f'(x)$ غير صفريه(اى سالبه) فان x يجب ان تساوى صفرا وتحدث النهاية العظمى عندئذ عند نقطة الاصل •

لو كانت $f(x_1, \ldots, x_n)$ وكانت $g^i(x_1, \ldots, x_n) \;\; i = 1, \ldots m$ جميعها مقعرة فــان شروط كون وتكر سوف تكون شروط كفاية للنهاية العظمى • وبمعنى اخر لو تحققت التقعر فان الكميات المتجهة x^0 λ^0 والتى تحل (١ ــ٥٠) الى (١ ــ٥٥) تمتــلك الخاصية بان x^0 تحل مسالة النهاية العظمى، وتكون شروط كون وتكر شروطا ضرورية للنهاية العظمى اذا تحققت مايسمى بشرط " القيد المشــروط constraint-qualification ويضمن هذا الشرط اساسا ان منطقة النقط فى الفراغ x لم تلغــى بالقيود وتسمى " المنطقة المرئية " ويكون لها شكلا منتظما ولكن بالمعنى المذكور هنــا لاتكون المناطق المرئيه منتظمه اذا اصبحت القيود ملامسة لبعضها (راجع التمريــن (١ ــ١٥) فمث هذه المناطق لاتواجه فى الاقتصاد • ففى هذا الكتاب سوف نفترض ان القيد المشروط سوف يتحقق بحيث اننا لو اعطينا دوالا مُقعرة ، فان شروط كون وتكــر سوف تكون شروط ضرورة وكفاية •

فالاطار السابق يمكن تكييفه ليضم عملية الحصول على النهاية الصغرى تحت شــرط القيود التى على شكل متباينات • فبعكس المتباينات فى (١ ــ٤٧) و (١ ــ٥٠) و (١ ــ٥١) تكون شروط كون وتكر شروطا ضروريه وكفاية لحالة النهاية الصغرى هــذا اذا كانت الدوال تحت الاعتبار جميعها محدبة وان القيد المشروط قد تحقق •وكبديل • فان من الممكن القيام بعملية الحصول على النهاية العظمى باستخدام الدالة بعلامــة سالبه ويكون المطلوب هو النهاية الصغرى بدون تغيير فى الشروط •

ان مضروبات لاقرانج فى حالة القيود على شكل متباينات سوف يكون لها غسيــرا مماثلا للمضروبات فى حالة القيود على شكل متساويات والمتغيرات الثنائيه للبرمجــه الخطيه (راجع الفصل ٥ــ٧) فهم يعطوا المعدل الذى يزداد عنده القيمة المثلــى للدالة المطلوبة لكل وحدة زيادة فى القيود وذلك اذا كانت الاشتقاقات الجزئيــه المناسبه قد عرفت • فلو حققت القيم المثلى للمتغيرات اى قيد مثل المتباينه المنضبطــة فان المتغير الثنائى المقابل سوف يساوى صفرا •

١ - ٤ التكاملات : A-4 INTEGRALS

ان تكامل اى دالة $f(x)$ هى عبارة عن دالة اخرى $F(x)$ بحيث ان اشتقاقها يساوى $f(x)$ ؛ $F'(x) = f(x)$ ويكون التكامل فريدا ماعداى لقيمة ثابت c مضاف لها بطريقة عشوائيه ، لان هذا الثابت سوف يتلاشى عندما نقوم بعملية التفاضل • ولهذا فانه اذا كانت $F(x)$ تكاملا للدالة $f(x)$ فان $F(x)+c$ هى كذلك تكاملا للدالة $f(x)$ ونعرف التكامل بانه عملية ايجاد التكامله وهى عبارة عن تفاضل مالمقلوب•ونسمى التكامله $F(x)+c$ تكامله غير محدودة indefinite integral ونرمز لها كالتالى:

$$\int f(x)\, dx = F(x) + c$$

ان طرق وفنيات ايجاد التكاملات الغير محددة لانواع مختلفه من الدوال قد تكون صعبه ونسرد فيما يلى بعض طرق التكامل البسيطه بدون اثبات : (١)

1. $f(x) = g'(x),\ \int f(x)\, dx = g(x)$
2. $f(x) = g(x) + h(x),\ \int f(x)\, dx = \int g(x)\, dx + \int h(x)\, dx$
3. $f(x) = cg(x)$ (c a constant), $\int f(x)\, dx = c \int g(x)\, dx$
4. $f(x) = x^k\ (k \neq -1),\ \int f(x)\, dx = x^{k+1}/(k+1)$
5. $f(x) = 1/x,\ \int f(x)\, dx = \log x$
6. $f(x) = e^{ax},\ \int f(x)\, dx = \frac{1}{a} e^{ax}$
7. $x = g(u)$, then $\int f(x)\, dx = \int f[g(u)]g'(u)\, du$
8. $u = u(x),\ v = v(x),\quad \int u'(x)v(x)\, dx = u(x)v(x) - \int u(x)v'(x)\, dx$

ونسمى هذه تكامل بالاجزاء Integration by parts

قد نستخدم التكامل في ايجاد المساحة تحت المنحنى • فالدالة المرسومة فى الشكل (١ ــ ٤) هى الدالة $f(x)$ فالحساب المساحة بين محور x والمنحنى بين نقطتى a b فاننا نقوم بعملية تقسيم جزئى للمسافة $(b-a)$ الى قطع بعرض Δx_i ثم نقيسم مستطيلات بطول $f(x_i)$ على كل قطعة فيكون ارتفاع كل مستطيل عبارة عن قيمة الدالة مقيمه عند الحدود على الجانب الايسر لكل قطعة • فتكون المساحة المطلوبه A. هى $\Sigma f(x_i)\, \Delta x_i$ (٢) فكلما صغر عرض المستطيلات فكلما اقترب $\Sigma f(x_i)\, \Delta x_i$ من المساحه الصحيحه اكثر فاكثر وفى الحقيقه:

---

(١) راجع كتاب Courant والذى سبق ذكره pp. 141–143, 207–210. vol. 1.

(٢) ان حاصل جمع هذه المستطيلات لايقدر بالضبط المساحة تحت المنحنى • فلو اعطيت اطوال المستطيلات بقيمة الدالة المقابله للحدود على الجهة اليمنى لكل قطعة فان عملية التقريب سوف تزيد عن تقدير المساحه الصحيحه وكلا الطريقتين مسموح بها لغرض التحليل •

$$A = \lim_{\Delta x_i \to 0} \Sigma f(x_i)\,\Delta x_i$$

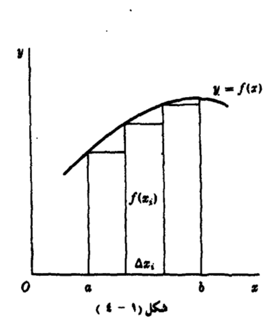
وذلك بشرط ان هذه النهاية سوف تكون موجوده exists [١] الان ، نغير الحدود على الطرف الايمن (هى b) للمساحة تحت الاعتبار الى حدود متغيرولتكن x فتكون المساحه من a الى الحدود على الطرف الايمن المتغيره x بدلالة x وسوف نرمز لها بالرمز $A(a, x)$ فينتج عن هذا مساحه اكبر بعض الشئ هذا اذا كانت الحـــدود المتغيره بعيدة اكثر الى جهة اليمين اى ان هذه الحدود تكون $x + \Delta x$ سوف نرمز الى حصيلة المساحه الناتجه بالرمز $A(a, x + \Delta x)$ ويكون الفرق بين هاتين المساحتين :

$$A(a, x + \Delta x) - A(a, x) = A(x, x + \Delta x)$$

وتكون المساحه بين النقطتين x و $x + \Delta x$ معطاة بعرض الفترة Δx مضروبه فى قيمة الدالة $f(x)$ عند اى نقطه بين x و $x + \Delta x$ نـرمز لهذة القيمـــــــة لـ x بالحروف x_0 :

$$A(a, x + \Delta x) - A(a, x) = f(x_0)\,\Delta x$$

$$\frac{A(a, x + \Delta x) - A(a, x)}{\Delta x} = f(x_0)$$



شكل (١ - ٤)

---

(١) وسوف تكون هذه النهاية موجودة (قائمة) اذا كانت الدالة $f(x)$ متصلة .

وهذا يثبت ان اشتقاق المساحه تحت دالة ما هى الدالة نفسها او ان تكامل الدالـــه سوف يكون المساحة تحتها • وتكون المساحه $A(a, b)$ هى التكامل المحـــــــدد definite integral للدالة $f(x)$ بين النقطتين a b فلو كانـــت $F(x)$ هى التكامل الغير محدد للدالة $f(x)$ فان التكامل المحدد بين a b يكون:

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

ونعطى فيما يلى مثالا للتكامل المحدد :

$$\int_0^b \alpha e^{-rx}\,dx = -\frac{\alpha e^{-rb}}{r} + \frac{\alpha}{r} = \frac{\alpha(1 - e^{-rb})}{r}$$

تنص مبرهنة القيمة الوسطى فى التكامل mean value theorem على انه اذا كانت $f(x)$ متصلة عبر الفترة من a الى b فان :

$$\int_a^b f(x)\,dx = f[a\theta + b(1-\theta)](b-a)$$

وذلك لبعض $0 \leqq \theta \leqq 1$ وهذا يعنى ان التكامل المحدد يساوى عرض الفترة مضروبا فـــى الدالة المكامله integrand مقيمة عند نقطة مناسبة فى الفترة •

قد تكون نهايات التكامل بدلالة المتغير x كما هو الحال فى $g(x) = \int_{\psi_1(x)}^{\psi_2(x)} f(x, y)\,dy.$

ففى هذه الحالة يكون اشتقاق التكامل كالتالى :

$$g'(x) = \int_{\psi_1(x)}^{\psi_2(x)} \frac{\partial f(x, y)}{\partial x}\,dy - \psi_1'(x) f[x, \psi_1(x)] + \psi_2'(x) f[x, \psi_2(x)]^{\dagger}$$

١ – ٥ المعادلات الفرقية : DIFFERENCE EQUATIONS

اعتبر المتتاليه العدديه $1, 4, 9, 16, 25,$ وارمز لهم كالتالى $y_1, y_2, \ldots, y_t, \ldots.$ فتكون الفروق الاولى لهذه المتتاليـــه :

$$\Delta y_1 = y_2 - y_1 = 3, \quad \Delta y_2 = y_3 - y_2 = 5, \quad \Delta y_3 = y_4 - y_3 = 7,$$

وهكذا • وتكون الفروق الثانيه هى الفروق بين الفروق الاولى او

$$\Delta^2 y_2 = \Delta y_3 - \Delta y_2 = 2, \quad \Delta^2 y_1 = \Delta y_2 - \Delta y_1 = 2,$$

وهكذا • ففى هذه المتتاليه العدديه بالذات تكون الفروق الثانيه ثـابتـه وتساوى ويمكن كتابتها كالتالى :

$$\Delta^2 y_t = 2 \qquad (١ _٥٦)$$

ومعادلة(١ _٥٦) يمكن ايضا كتابتها كالفرق بين اثنين من الفروق الاولى او

$$\Delta y_{t+1} - \Delta y_t = 2 \qquad (١ _٥٧)$$

ويمكن ايضا كتابة كل من الفروق الاولى فى (١ _٥٧) كالفرق بين عضوين من المتتاليه،

او $(y_{t+2} - y_{t+1}) - (y_{t+1} - y_t) = y_{t+2} - 2y_{t+1} + y_t = 2$ (١ ــ ٥٨)

فالمعادلة (١ ــ ٥٨) تكون معادلة فرقيه ، ولقد وضعت باعتبارات فروقات متتاليه عدديه فهي تربط العضو ال $(t+2)$ في المتتاليه بالعضو ال $(t+1)$ والعضو ال t وعموما فان المعادلات الفرقيه تربط العضو ال t للمتتاليه باعضاء اخرى سابقة وتكون المعادلة الفرقيه العامه الخطيه من الدرجه n بمعاملات ثابته كالتالي :

$$a_0 y_t + a_1 y_{t-1} + a_2 y_{t-2} + \cdots + a_n y_{t-n} + b = 0 \qquad (١ ــ ٥٩)$$

فمعادلة (١ ــ ٥٩) تكون معادلة خطيه لانه لايوجد اى y مرفوعه الى اى قوة اكبر من واحد ولانها لاتحتوى على اى خارج ضرب او اى دوال اخرى بدلالة y فهي من الدرجه n لان اقصى قيمة ل y المعتمده عليها y_t هي y_{t-n} ولهذا فان (١ ــ ٥٨) تكون معادلة فرقيهخطيه من الدرجة الثانيه بمعاملات ثابته وتكون المعادلة الفرقيه متجانسه اذا كانت $b = 0$ ولكن المعادلة (١ ــ ٥٨) ليست متجانسه •

طبيعة الحل : The Nature of the Solution

ان المعادلة التاليه هي عبارة عن معادلة متجانسه من الدرجة الاولى :

$$y_t = a y_{t-1} \qquad (١ ــ ٦٠)$$

وباعطاء المعلومات بان $y_0 = 2$، فان بالامكان تحديد $y_1 = 2a$ من (١ ــ ٦٠) وذلك بتعويض قيمة y في الجانب الايمن ، ولذا فان: $y_2 = a(2a) = 2a^2$ وبهذه الطريقة يكون من الممكن حساب قيمة y لاى قيمة ل t ولكن هذه الطريقه تكون صعبة بعض الشيء ويمكن تلافيها بايجاد حلا عاما للمعادلة الفرقية فالحل العام هو عبارة عن تعبير، عادة بدلالة t يعطي قيمة y_t حالما يتم تعويض القيمه المرغوبة ل t فيجب ايجاد دالة t. بحيث ان $y_t = f(t)$ فاى دالة مثل هذه سوف تكون حلا اذا حققت المعادلة الفرقيه ففي حالة الدرجة الاولى فان الحل $f(t)$ يجب ان يحقق[١] :

$$f(t) = af(t-1) \qquad (١ ــ ٦١)$$

وبالاضافة لهذا فان الحل يجب ان يكون ايضا متوافقا consistent مع الشروط الابتدائيه initial conditions فالشروط الابتدائيه هي عبارة عن منطوقا عن قيمة y نقطة واحده معينه او اكثر في المتتاليه ويجب ان يكون عدد الشروط الابتدائيه مساويا لنفس درجة المعادلات وذلك من اجل الحصول على حلا كاملا ولهذا فانه يوجد فقط شرطا ابتدائيا واحدا ضروريا في حالة الدرجة الاولى • وهذا كان معا

---

(١) ان من الممكن اعتبار اى معادلة فرقيه كتعريف ل y بدلالة t فكل قيمة من قيم t توجد قيمة من قيم y مقابلة لها بشرط ان المتغير المستقل t يستطيع ان يتحصل على قيم تكامليه فقط ، اى : 0, 1, 2, 3,

ب $y_0 = 2$ فى المثال السابق • ولكن المشكله هى فى ايجاد حلا او حلولا تحقق المعادله الفرقيه ومن ثم اختيار الحل الذى تحقق الشروط الابتدائيه ايضا (١) وسوف نركـــز اهتمامنا فيما يلى على المعادلات الفرقيه الخطيه من الدرجة الاولى بمعاملات ثابته •

المعادلات المتجانسة : **Homogeneous Equations**

يمكن كتابة المعادلة (١ ــ ٦٠) كالتالى :

$$\frac{y_t}{y_{t-1}} = a$$

وذلك لجميع t

$$y_t = \frac{y_t}{y_{t-1}} \frac{y_{t-1}}{y_{t-2}} \cdots \frac{y_2}{y_1} \frac{y_1}{y_0} y_0 = a^t y_0$$

ان الحد a^t هو نفسه حلا لانه يحقق (١ ــ ٦٠) :

$$a^t = a(a^{t-1})$$

فلو كانت $f(t)$ حلا فان $cf(t)$ سوف تكون حلا ايضا حيث ان ثابته فالحد a يعطى بالمعادلة الفرقيه والحد c سوف يحدد على اساس الشرط الابتدائى بحيث ان الحل العام ca^t سوف يكون متوافقا معها • ففى المثال السابق نجد ان الشـــرط الابتدائى قد اعطى ب $y_0 = 2$. $y_0 = ca^0 = c = 2$ ويكون الحل العام هو $y_t = 2a^t$.

المعادلات الغير متجانسة : **Nonhomogeneous Equations**

يتطلب الحصول على حل للمعادلات الفرقيه الغير متجانسه خطوتين • فالخطـــوة الاولى تكون لايجاد الحل $f(t)$ للمعادلة المتجانسه المقابله • اما الخطوة الثانيـــة فهى لايجاد الحل الخاص *particular solution* والذى يرمز له بالرمز $g(t)$

ويكون الحل العام الاخير هو: $f(t) + g(t)$

فاذا كانت المعادلة الغير متجانسه كالتالى:

$$ay_t + by_{t-1} + c = 0 \qquad (١ ــ ٦٢)$$

فان حل الجزء المتجانس من (١ ــ ٦٢) يكون $k(-b/a)^t$ ولايجاد الحل الخـــاص نعوض فى (١ ــ ٦٢) ب $y_t = K$ حيث ان ثابت K ثم نحل لقيمة :

---

(١) راجع :

W. J. Baumol, *Economic Dynamics* (2d ed., New York: Macmillan, 1959), chaps. 9–13; and S. Goldberg, *Introduction to Difference Equations* (New York: Wiley, 1958), chaps. II–III.

$$aK + bK + c = 0$$

$$K = \frac{-c}{a+b}$$

بحيث ان $a + b \neq 0$ ومن ثم فان الحل العام يكون :

$$y = k\left(-\frac{b}{a}\right)^t - \frac{c}{a+b}$$

حيث ان k تتحدد حسب الشروط الابتدائيه • فلو كانت $a + b = 0$ فاننا سوف نفترض عندئذ ان الحل الخاص يكون $y_t = Kt$ ثم نعوض بهذا في (١ ـ ٦٢) ونحل لقيمة K ويكون الحل العام في هذه الحاله هو :

$y = k(-b/a)^t + Kt.$ حيث ان $K = c/b$

١ - ٦ المعادلات التفاضلية : DIFFERENTIAL EQUATIONS

ان المعادلة التي تكون المتغيرات فيها هي الاشتقاقات تسمى معادلة تفاضليه • والامثله على هذا :

$dy/dt = 17$ (١) $d^2y/dt^2 + b\,dy/dt + cy = 0$ (٢) $dy/dt + by^2 = c$ (٣)

فالمعادلتان (١) و (٢) يكونان معادلتين تفاضلتين خطيه لانهما غير خطيتان في ( ) وفي اشتقاقاتهما • اما المعادلات في (٣) فانها غير خطيه وسوف لانعتبرها هنا • (١)
وتكون المعادلة التفاضليه الخطيه العامه من الدرجه n كالتالي :

$$a_0 \frac{d^n y}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \cdots + a_n y + b = 0 \qquad (١ ـ ٦٣)$$

وتكون هذه المعادلة خطيه اذا كانت $b = 0$ اما معادلة الدرجة الاولى المتجانسه فهي كالتالي :

$$\frac{dy}{dt} = by \qquad (١ ـ ٦٤)$$

ان الحل العام للدالة $y = f(t)$ الذي يحقق المعادلة ويعطي قيمة y بعد تعويض بقيمة المتغير المستقل t وكما هو الحال في المعادلات الفرقيه فان الحلول يجب ان تحقق ايضا الشروط الابتدائيه •

---

(١) وتسمى المعادلات ايضا المعادلات التفاضليه العاديه لان اشتقاقاتها تكون اشتقاقات كليه • ونسمي المعادلات التي تحتوي على اشتقاقات جزئيه بالمعادلات التفاضليه الجزئيه وسوف نواجه مثل هذه المعادلات الاخيره اقل اعتيادا في التطبيقات الاقتصاديه من المعادلات التفاضليه العاديه •

يمكن الحصول على حل لـ (١ــ٦٤) بالتكامل • فبمعادلة dy و dt كتفاضلات فانه يمكن كتابة (١ــ٦٤) كالتالى :

$$\frac{dy}{y} = b\,dt$$

وبتكامل كلا الطرفين :

$$\int \frac{1}{y}\,dy = \int b\,dt$$

$$\log y = bt + c \qquad (١ــ٦٥)$$

حيث ان c هى معيار ثابت التكامل والذى يحدد من الشروط الابتدائيه فمن (١ــ٦٥) يكون حل (١ــ٦٤) كالتالى :

$$y = e^{bt+c} = ke^{bt}$$

حيث ان $k = e^c$ فاذا اعطينا الشرط الابتدائى $y = y_0$ عند ما تكون $t = 0$ فانه يتبع ان $k = y_0$ ويكون الحل كالتالى :

$$y = y_0 e^{bt}$$

ان اشتقاقات حلول المعادلات الدرجات العليا يكون له اوجه عدة مماثله للاشتقاقات المقابله للمعادلات الفرقيه • فلاى معادلة تفاضليه على الشكل (١ــ٦٤) فان الحل سوف يكون $e^{\lambda t}$ حيث ان عددا لم يحدد بعد اما فى حالة الدرجة الثانيه

$$a\,d^2y/dt^2 + b\,dy/dt + cy = 0$$

فان التعويض بـ $e^{\lambda t}$ سوف يعطى :

$$a\lambda^2 e^{\lambda t} + b\lambda e^{\lambda t} + ce^{\lambda t} = 0$$

وبالقسمه على $e^{\lambda t}$:

$$a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$$

وبما ان الشكل التربيعى يعطى عامة جزرين λ_1 و λ_2 فان الحل العام سوف يكون على الشكل $y = k_1 e^{\lambda_1 t} + k_2 e^{\lambda_2 t}$ فاذا اعطينا الشروط الابتدائيه : $y = y_0$ و $dy/dt = y_0'$ عند ما تكون $t = 0$

$$y_0 = k_1 + k_2 \qquad y_0' = k_1\lambda_1 + k_2\lambda_2$$

وتكون الثوابت كالتالى :

$$k_1 = \frac{y_0' - \lambda_1 y_0}{\lambda_1 - \lambda_2} \qquad k_2 = -\frac{y_0' - \lambda_2 y_0}{\lambda_1 - \lambda_2}$$

وذلك اذا كانت $\lambda_1 \neq \lambda_2$. فلو كان الحل للمعادلة المميزة characteristic equation عبارة عن زوج من الاعداد المركبه complex numbers $\lambda = \theta_1 \pm \theta_2 i,$ فان حل المعادلة التفاضليه من الدرجة الثانيه يصبح :

$$y = e^{\theta_1 t}(k_1 \cos \theta_2 t + k_2 \sin \theta_2 t)$$

حيث ان k_1 K_2 سوف تتحدد كالسابق من الشروط الابتدائيه ٠٠نجد الحل الخـــاص للمعادلة التفاضليه الغير متجانسه بنفس طريقة ايجاد حل المعادلات الفرقيه :
افترض ان $y = K$ ثابت K وهذا يعطى حلا عوض بهذا الحل التجريبى فى :

$$a \frac{d^2y}{dt^2} + b \frac{dy}{dt} + cy + d = 0$$

ثم حل لقيمة K بشرط ان $c \neq 0$ [١] • فيكون الحل العام ، مثلما سبق هو حاصل جمع الحل الخاص والحل للمعادلة المتجانسه •

---

(١) فلو كانت $c = 0$ ، فيمكن افتراض ان $y = Kt$ ولو كانت b ايضا تساوى صفر ، فان الحل الخاص التجريبى يصبح Kt^2 راجع الفصل (١ـ٥) •

EXERCISES

A-1 Use Cramer's rule to solve the following system of simultaneous equations:

$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 \quad\;\; &= 13 \\ x_1 + x_2 + x_3 &= 0 \\ 5x_1 - 6x_2 + x_3 &= -13 \end{aligned}$$

A-2 Differentiate the following functions:

(*a*) $f(x) = 6x^3 + 2x^2 - x + 12$.
(*b*) $f(x) = 4\sqrt{x}$.
(*c*) $f(x) = e^{-x}(x-2)$.
(*d*) $f(x) = 4x^3/(2x^2 - x)$.
(*e*) $f(x) = \ln(x^{-3})$.

A-3 Determine the values of x at which the following functions possess maximum and minimum values:

(*a*) $f(x) = x^2 - 2x + 5$.
(*b*) $f(x) = x^3 - 27x^2 + 195x + 3$.
(*c*) $f(x) = \ln(x^2 - x + 1)$.

A-4 Determine whether the following functions are strictly convex, strictly concave, or neither over the specified intervals:

(*a*) $f(x) = x^2 - 3x + 4$, for x = any real number.
(*b*) $f(x) = \ln x$, for $x > 0$.
(*c*) $f(x) = e^{ax}$, for $x \leqq 0$.
(*d*) $f(x) = x^3 - 2x^2 + x$, for $x \geqq 0$.

A-5 Determine f_{11} and f_{12} for the following functions of two variables:

(*a*) $f(x_1, x_2) = x_1^2x_2^2 - x_1x_2 + 3x_1 - 2x_2$.
(*b*) $f(x_1, x_2) = \ln(2x_1 + 3x_2)$.
(*c*) $f(x_1, x_2) = x_2^{x_1}$.

A-6 Take the total differential of $y = 2x_1x_2^3 + x_2e^{x_1} + \ln x_1$.

A-7 Construct the envelope of the family of curves in the xy plane given by $y - 2x^2 - xk + k^2 = 0$.

A-8 Find values for x_1 and x_2 which maximize

$$f(x_1, x_2) = 5x_1 + 10x_2 + x_1x_2 - 0.5x_1^2 - 3x_2^2$$

A-9 Let $f(x_1, x_2) = e^{-x_1^2 - x_2^2}(2x_1^2 + 3x_2^2)$. Verify that this function has maxima at $(1, 0)$ and $(-1, 0)$, saddle points at $(0, 1)$ and $(0, -1)$, and a minimum at $(0, 0)$. Draw the (approximate) contours or level curves of the function.

A-10 Let $f(x_1, x_2) = Ax_1^\alpha x_2^\beta$, where $A, \alpha, \beta > 0$, be defined for the domain $x_1, x_2 > 0$. Demonstrate that the function is strictly concave within its domain if and only if $\alpha + \beta < 1$.

A-11 Let $f(x_1, x_2)$ be maximized subject to $g(x_1, x_2) = 0$. Assume that optimal values for the appropriate Lagrange multiplier are strictly positive. Show that strict quasi-concavity for both f and g and regular strict quasi-concavity for one of the two functions is sufficient to ensure the second-order conditions whenever the first-order conditions are satisfied.

A-12 Find values for x_1 and x_2 that maximize $f(x_1, x_2) = x_1^2x_2$ subject to the requirement that $5x_1 + 2x_2 = 300$. Demonstrate that the appropriate second-order condition is satisfied.

A-13 Find values of x_1 and x_2 that maximize $f(x_1, x_2) = (x_1 + 25)^{1/4}x_2^{1/4}$ subject to the requirements that $5x_1 + 10x_2 \leqq 100$ and $x_1, x_2 \geqq 0$.

A-14 Find functions of two variables with the domains $x_1, x_2 > 0$ that are

(*a*) Quasi-concave, but not strictly quasi-concave and not concave.
(*b*) Strictly quasi-concave, but not concave.
(*c*) Quasi-concave, but not strictly quasi-concave and not strictly concave.
(*d*) Strictly quasi-concave and concave, but not strictly concave.

A-15 Find the optimal solution to the nonlinear-programming problem: maximize x_1 subject to $(1 - x_1)^3 - x_2 \geqq 0$ and $x_1, x_2 \geqq 0$. Show that the Kuhn-Tucker conditions are not satisfied at the

maximum. Explain why they are not.

A-16 Demonstrate that the simultaneous equations

$$x_1^2 + 4x_1x_2 + 4x_2^2 = y_1$$
$$x_1 + 2x_2 = y_2$$

do not possess solutions of the form $x_i = \phi^i(y_1, y_2)$, $i = 1, 2$.

A-17 Find $\int f(x)\,dx$ if

(a) $f(x) = x^2 - 2x$.
(b) $f(x) = (2x + 1)/(x^2 + x)$.
(c) $f(x) = ae^{-bx}$.

A-18 Evaluate the following definite integrals:

(a) $\int_6^{10} (2x + 3)\,dx$.
(b) $\int_1^e (1/x)\,dx$.

A-19 Solve the following nonhomogeneous difference equation:

$$2y_t - y_{t-1} - 6 = 0 \qquad \text{and} \qquad y_0 = 10$$

A-20 Solve the homogeneous second-order differential equation:

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 5\frac{dy}{dt} + 6y = 0$$

where $y_0 = 6$ and $y_0' = 3$.

SELECTED REFERENCES

Aitken, A. C.: *Determinants and Matrices* (New York: Interscience, 1951). A concise reference work that is too difficult for the beginner.

Allen, R. G. D.: *Basic Mathematics* (New York: St. Martin's, 1964). A modern text of particular interest to economists.

———: *Mathematical Analysis for Economists* (London: Macmillan, 1938). A survey of the calculus with many economic illustrations.

Apostol, T. M.: *Calculus*, vols. I and II (2d ed., New York: Wiley, 1967). A comprehensive and definitive treatise.

Baumol, W. J.: *Economic Dynamics* (2d ed., New York: Macmillan, 1959). Chaps. 9–13 contain an introduction to linear difference equations and chap. 14 contains an introduction to differential equations.

Chiang, A. C.: *Fundamental Methods of Mathematical Economics* (2d ed., New York: McGraw-Hill, 1974). A detailed treatment of algebra, calculus, linear and nonlinear programming, and other topics of interest to economists. The level of the work makes it accessible for readers without advanced preparation.

Goldberg, S.: *Introduction to Difference Equations* (New York: Wiley, 1958). A beginning text with many examples drawn from economics.

Goursat, E.: *A Course in Mathematical Analysis*, vol. I, trans. by E. R. Hedrick (Boston: Ginn, 1904). A classic treatise. Recommended for intermediate and advanced students.

Hadley, G.: *Linear Algebra* (Reading, Mass.: Addison-Wesley, 1961). Determinants are covered in chap. 3.

Intriligator, Michael D.: *Mathematical Optimization and Economic Theory* (Englewood Cliffs, N.J.: Prentice-Hall, 1971). A text covering the theory of maximization and applications to many subjects in economics.

Klein, E.: *Mathematical Methods in Theoretical Economics* (New York: Academic, 1973). A comprehensive and fairly advanced coverage of the parts of algebra and topology most frequently employed in economics. Calculus is not covered.

Nikaido, H.: *Convex Structures and Economic Theory* (New York: Academic, 1968). Global univalence is covered in chap. 7. Advanced mathematics is used.

Perlis, S.: *Theory of Matrices* (Cambridge, Mass.: Addison-Wesley, 1952). A specialized treat-

ment of determinants and matrices.

Roberts, B., and D. L. Schulze: *Modern Mathematics and Economic Analysis* (New York: W. W. Norton, 1973). An intermediate-level exposition of most mathematical tools encountered in economics.

Samuelson, Paul A.: *Foundations of Economic Analysis* (Cambridge, Mass.: Harvard University Press, 1948). A mathematical approach to economic theory. An appendix contains a survey of some of the mathematical tools employed in the text. The treatment will prove difficult for all but advanced students.

إجابات التمارين ذات الأعداد الزوجية

ANSWERS FOR EVEN-NUMBERED EXERCISES

Chapter 2

2-2 For a strictly concave function $f[\lambda q_1^0 + (1-\lambda)q_1^{(1)}, \lambda q_2^0 + (1-\lambda)q_2^{(1)}] > \lambda f(q_1^0, q_2^0) + (1-\lambda)f(q_1^{(1)}, q_2^{(1)})$. Let $\lambda = 0.5$, multiply through by 2, and rearrange terms to obtain the desired result.

2-4 Form the function $V = q_1^\gamma q_2 + \lambda(y - p_1q_1 - p_2q_2)$, and set its partial derivatives equal to zero:

$$\gamma q_1^{\gamma-1}q_2 - \lambda p_1 = 0 \qquad q_1^\gamma - \lambda p_2 = 0 \qquad y - p_1q_1 - p_2q_2 = 0$$

which yields $p_1q_1 = \gamma p_2q_2$, a positively sloped straight line through the origin.

2-6 V is a monotonic transformation of the utility function given in Exercise 2-3. Specifically, $V = U^4 + \ln U$.

2-8 $\dfrac{r}{W}\dfrac{dW}{dr} = \dfrac{(48-T)r}{(r+1)[T(r+2)-48]}$

2-10 Here, $S_{11} = -p_2^2\lambda/\mathscr{D}$, $S_{12} = p_1p_2\lambda/\mathscr{D}$, and $p_1(-p_2^2\lambda/\mathscr{D}) + p_2(p_1p_2\lambda/\mathscr{D}) = 0$.

2-12 Form the Lagrange function

$$V = f(q_1, q_2, q_3) + \lambda(y - p_1q_1 - p_2q_2 - p_3q_3) + \mu(z - c_1q_1 - c_2q_2 - c_3q_3)$$

where the p's and c's are dollar prices and ration-coupon prices respectively. The Kuhn-Tucker conditions are

$$\frac{\partial V}{\partial q_i} = f_i - \lambda p_i - \mu c_i \le 0 \qquad q_i \ge 0 \qquad q_i\frac{\partial V}{\partial q_i} = 0 \qquad i = 1, 2, 3$$

$$\frac{\partial V}{\partial \lambda} = y - p_1q_1 - p_2q_2 - p_3q_3 \ge 0 \qquad \lambda \ge 0 \qquad \lambda\frac{\partial V}{\partial \lambda} = 0$$

$$\frac{\partial V}{\partial \mu} = z - c_1q_1 - c_2q_2 - c_3q_3 \ge 0 \qquad \mu \ge 0 \qquad \mu\frac{\partial V}{\partial \mu} = 0$$

There are three possible outcomes: (1) the budget constraint is binding, but the coupon constraint is not; (2) the coupon constraint is binding, but the budget constraint is not; and (3) both constraints are binding. The imposition of rationing would not alter the consumer's purchases if his coupon allotment were sufficiently generous so that z is not less than the coupon requirements for his former purchases; i.e., case (1) above provides the optimal solution.

Assume that (3) prevails, and that all outputs are positive. The Kuhn-Tucker conditions yield

$$\frac{f_i}{f_j} = \frac{\lambda p_i + \mu c_i}{\lambda p_j + \mu c_j} \qquad i, j = 1, 2, 3$$

RCSs (the f_i/f_j) equal generalized price ratios where the generalized prices are the dollar and ration-coupon prices weighted by the corresponding marginal utilities, i.e., the Lagrange multipliers.

Chapter 3

3-2 Using vector notation let $g(\mathbf{q})$ be a homogeneous function and let $f(\mathbf{q})$ be a monotonic increasing function of g. Since the two functions provide the same ordering, $g(\mathbf{q}^0) = g(\mathbf{q}^{(1)})$. From homogeneity

$$g(t\mathbf{q}^0) = t^k g(\mathbf{q}^0) = t^k g(\mathbf{q}^{(1)}) = g(t\mathbf{q}^{(1)})$$

and finally, it follows that $f(t\mathbf{q}^0) = f(t\mathbf{q}^{(1)})$.

3-4 Maximization of utility subject to the budget constraint $v_1q_1 + v_2q_2 = 1$ yields the demand functions

$$q_1 = \frac{\alpha v_2}{v_1} \qquad q = \frac{1}{v_2} - \alpha$$

and the indirect utility function

$$U = \alpha \ln\left(\frac{\alpha v_2}{v_1}\right) + \frac{1}{v_2} - \alpha$$

with the derivatives

$$\frac{\partial U}{\partial v_1} = -\frac{\alpha}{v_1} \qquad \frac{\partial U}{\partial v_2} = -\frac{1-\alpha v_2}{v_2^2}$$

Finally, by Roy's identity

$$q_1 = \frac{-\alpha/v_1}{[-\alpha v_1/v_1 - v_2(1-\alpha v_2)/v_2^2]} = \frac{\alpha v_2}{v_1}$$

$$q_2 = \frac{-(1-\alpha v_2)/v_2^2}{[-\alpha v_1/v_1 - v_2(1-\alpha v_2)/v_2^2]} = \frac{1}{v_2} - \alpha$$

which are the same as the demand functions derived above.

3-6 The consumer maximizes $q_1q_2q_3$ subject to $y = p_1q_1 + p_2q_2 + p_3q_3 = p_1q_c + p_3q_3$. Substituting $q_c = q_1 + p_2q_2/p_1$ in her utility function, write the Lagrange function as

$$V = \left(q_c - \frac{p_2}{p_1}q_2\right)q_2q_3 + \lambda(y - p_1q_c - p_3q_3)$$

and set the partial derivatives equal to zero:

$$q_2q_3 - \lambda p_1 = 0 \qquad \left(-\frac{p_2}{p_1}\right)q_2q_3 + \left(q_c - \frac{p_2}{p_1}q_2\right)q_3 = 0$$

$$\left(q_c - \frac{p_2}{p_1}q_2\right)q_2 - \lambda p_3 = 0 \qquad y - p_1q_c - p_3q_3 = 0$$

Solving for q_c yields $q_c = (2y)/(3p_1)$.

3-8 Choose two points on the utility scale arbitrarily; for example, $U(A) = 200$ and $U(D) = 100$. Then

$$U(B) = (0.4)(200) + (0.6)(100) = 140$$

$$U(C) = (0.2)(140) + (0.8)(100) = 108$$

3-10 The consumer can only reduce the dispersion of outcomes in this case. She cannot eliminate uncertainty. Equate the expected utilities from insurance and no insurance:

$$(0.10)(152{,}380 - R)^{0.5} + (0.90)(160{,}000 - R)^{0.5}$$

$$= (0.05)(90{,}000)^{0.5} + (0.05)(40{,}000)^{0.5} + (0.90)(160{,}000)^{0.5} = 385$$

The value $R = 11{,}004$ provides a solution for this equation.

Chapter 4

4-2 The MPs, $f_1 = 100 + 20x_2 - 25x_1$ and $f_2 = 100 + 20x_1 - 25x_2$, are positive over the domain

$0.8x_1 + 4 > x_2 > 1.2x_1 - 5$, and $f_{11} = f_{22} = -25 < 0$, $f_{11}f_{22} - f_{12}^2 = 225 > 0$ throughout two-dimensional space. It is also necessary to impose the condition that the input values be nonnegative.

4-4 Equating MC to price:

$$3q^2 - 20q + 17 = 5 \qquad \text{and} \qquad 3q^2 - 20q + 12 = 0$$

which has the roots $q = 6$ and $q = \frac{2}{3}$. *At* $q = 6$, $d^2C/dq^2 = 6q - 20 = 16 > 0$, hence this is the maximum profit solution; MC is decreasing at $q = \frac{2}{3}$.

The output elasticity of cost at $q = 6$ is

$$\frac{C}{q}\frac{dq}{dC} = \frac{q^3 - 10q^2 + 17q + 66}{q}\,\frac{1}{3q^2 - 20q + 17} = \left(\frac{24}{6}\right)\left(\frac{1}{5}\right) = 0.8$$

since $dq/dC = 1/(dC/dq)$.

4-6 Total profit is

$$\pi = p_1q_1 + p_2q_2 - rx = p_1q_1 + p_2q_2 - rA(q_1^\alpha + q_2^\beta)$$

Setting the partial derivatives equal to zero,

$$\frac{\partial \pi}{\partial q_1} = p_1 - r\alpha A q_1^{\alpha-1} = 0 \qquad \frac{\partial \pi}{\partial q_2} = p_2 - r\beta A q_2^{\beta-1} = 0$$

Whence

$$q_1 = \left(\frac{p_1}{r\alpha A}\right)^{1/(\alpha-1)} \qquad q_2 = \left(\frac{p_2}{r\beta A}\right)^{1/(\beta-1)}$$

The production relation is strictly convex for $q_1, q_2 > 0$ if the principal minors of the relevant Hessian are positive within this domain. The second direct partials are the first-order minors:

$$\frac{\partial^2 x}{\partial q_1^2} = \alpha(\alpha - 1)Aq_1^{\alpha-2} \qquad \frac{\partial^2 x}{\partial q_2^2} = \beta(\beta - 1)Aq_2^{\beta-2}$$

These are both positive for $q_1, q_2 > 0$ since $\alpha, \beta > 1$ by hypothesis. Finally,

$$\frac{\partial^2 x}{\partial q_1 \partial q_2} = 0 \qquad \text{and} \qquad \frac{\partial^2 x}{\partial q_1^2}\frac{\partial^2 x}{\partial q_2^2} - \left(\frac{\partial^2 x}{\partial q_1 \partial q_2}\right)^2 > 0$$

Chapter 5

5-2 Let k_1 and k_2 denote the input use ratios for Q_1 and Q_2 respectively, and let r denote the input price ratio. The equilibrium conditions are

$$k_1 = a_1 r^{\sigma_1} \qquad \text{and} \qquad k_2 = a_2 r^{\sigma_2}$$

By hypothesis, $\sigma_1 > \sigma_2$ and $a_1 < a_2$. The input use ratios would be the same if $k_1 = k_2$: $a_1 r^{\sigma_1} = a_2 r^{\sigma_2}$ which implies that $r = (a_2/a_1)^{1/(\sigma_1-\sigma_2)}$. Dividing the expression for k_1 by that for k_2,

$$\frac{k_1}{k_2} = \frac{a_1}{a_2} r^{(\sigma_1 - \sigma_2)}$$

Since $\sigma_1 - \sigma_2 > 0$ by hypothesis, a price ratio greater than $(a_1/a_2)^{1/(\sigma_1-\sigma_2)}$ would make $k_1 > k_2$ and conversely.

5-4 By Shephard's lemma

$$\frac{\partial C}{\partial r_1} = (1 + r^{-1/2})q = x_1 \qquad \frac{\partial C}{\partial r_2} = (1 + r^{1/2})q = x_2$$

where $r = r_1/r_2$. Solving for $r^{1/2}$,

$$r^{1/2} = \frac{q}{x_1 - q} = \frac{x_2 - q}{q}$$

which yields the production function

$$q = \frac{x_1x_2}{x_1 + x_2} = \frac{1}{1/x_1 + 1/x_2} = 0.5[0.5x_1^{-1} + 0.5x_2^{-1}]^{-1}$$

which by (5-7) is CES with $\sigma = 0.5$ ($\rho = 1$), $A = 0.5$, and $\alpha = 0.5$.

5-6 The input requirements for a unit of output producing half with the first activity and half with the third are

$$(0.5)(1, 6) + (0.5)(3, 3) = (2, 4.5)$$

The second activity requires (2, 5), and consequently is inefficient.

5-8 The appropriate Lagrange function for (5-31) and (5-32) is

$$L = \sum_{j=1}^{n} p_j q_j + \sum_{i=1}^{m} r_i \left(x_i^0 - \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \right)$$

Since all functions are concave (linear), the Kuhn-Tucker conditions are applicable.

$$(1)\quad \frac{\partial L}{\partial q_j} = p_j - \sum_{i=1}^{m} r_i a_{ij} \leq 0 \qquad (2)\quad \frac{\partial L}{\partial q_j} q_j = 0 \qquad (3)\quad q_j \geq 0 \quad j = 1, \ldots, n$$

$$(4)\quad \frac{\partial L}{\partial r_i} = x_i^0 - \sum_{j=1}^{n} a_{ij} q_j \geq 0 \qquad (5)\quad \frac{\partial L}{\partial r_i} r_i = 0 \qquad (6)\quad r_i \geq 0 \quad i = 1, \ldots, m$$

Conditions (1) are the same as dual constraints (5-39). Conditions (2) ensure the satisfaction of (5-41) and (5-43), and conditions (5) ensure (5-40) and (5-42).

Chapter 6

6-2 $\text{AVC} = 0.04q^2 - 0.8q + 10$ and its minimum is found by setting its derivative equal to zero:

$$\frac{d(\text{AVC})}{dq} = 0.08q - 0.8 = 0$$

Hence $q = 10$, at which point $\text{AVC} = 6$ and $\text{MC} = 0.12q^2 - 1.6q + 10$. Substitute $p = \text{MC}$, multiply through by 12.5, and solve for $q = (20 \pm 5\sqrt{3p - 14})/3$. The positive branch gives outputs at which MC is increasing. Hence

$$S = 0 \quad \text{if} \quad p < 6 \quad \text{and} \quad S = \frac{20 + 5\sqrt{3p - 14}}{3} \quad \text{if} \quad p \geq 6$$

6-4 Firms will have a profit maximum of zero if $p = \text{MC} = \text{AC}$, which occurs at the minimum of the AC curve. $\text{AC} = q^2 - 4q + 8$ and reaches a minimum at $q = 2$, at which point $p = 4$. The long-run supply curve is horizontal and the amount supplied is $2n$ where n is the number of firms. At $p = 4$ the quantity demanded is 1600. Hence $1600 = 2n$, and $n = 800$.

6-6 The entire supply will come from domestic sources as long as price is less than 20. When price reaches 20, domestic supply is 180. Thereafter, the supply curve is horizontal. Domestic supply remains at 180, price remains at 20, and imports are $q - 180$.

6-8 The cost functions including cost of transportation are $c_1 = 0.5q_1^2 + 6q_1$ for firms in location I and $C_2 = 0.5q_2^2 + 10q_2$ for firms in location II. The first-order conditions for profit maximization are $(q_1 + 6) = p = (q_2 + 10)$, and the two types of supply functions for the firms are

$$S_1 = 0 \quad \text{if} \quad 0 \leq p < 6 \quad \text{and} \quad S_1 = p - 6 \quad \text{if} \quad 6 \leq p$$

$$S_2 = 0 \quad \text{if} \quad 0 \leq p < 10 \quad \text{and} \quad S_2 = p - 10 \quad \text{if} \quad 10 \leq p$$

The aggregate supply function is

$$S = 0 \quad \text{if} \quad 0 \leq p < 6, \quad S = 50p - 300 \quad \text{if} \quad 6 \leq p < 10$$

and

$$S = 100p - 800 \quad \text{if} \quad 10 \leq p$$

6-10 By (6-21), $dp/dt = kE(p)$ and local stability in the neighborhood of the equilibrium price p_e requires that $dp/dt = kE'(p_e)(p - p_e)$ have a negative real root. In the present case $E(p) = 25p - \sqrt{5p}$, and $E(p) = 0$ yields $p_e = 5$. $E'(p) = -25/p^2 - 0.5\sqrt{5/p}$ and $E'(5) = -1.5 < 0$ which ensures local stability.

6-12 If $p_0 = 0.8p_e$ and applying (6-27), the time path is $p_t = [1 - 0.2(A/a)^t]p_e$ and $0.99p_e \leq p_t \leq$

$1.01p_e$ when $-0.05 \leq (A/a)^t \leq 0.05$.

(*a*) Substituting for A and a gives $-0.05 \leq (-0.9)^t \leq 0.05$. Taking the logarithm of $0.9^t = 0.05$ gives $t \approx 28.4$.

(*b*) Substituting gives $0.2^t = 0.05$ for the right limit which is attained for $t \approx 1.8$.

Chapter 7

7-2 The monopolist's profit is

$$\pi = (85 - 3q)q - 5x = (85 - 6\sqrt{x})(2\sqrt{x}) - 5x = 170\sqrt{x} - 17x$$

Maximizing,

$$\frac{d\pi}{dx} = \frac{85}{\sqrt{x}} - 17 = 0$$

which has the solution $\sqrt{x} = 5$, $x = 25$. Since $d^2\pi/dx^2 = -42.5x^{-3/2} < 0$, this is a maximum. When $x = 25$,

$$q = 2\sqrt{x} = 2\sqrt{25} = 10 \qquad \text{and} \qquad p = 85 - 3q = 55$$

7-4 The monopolist's profit is

$$\pi = a(q_1 + q_2) - b(q_1 + q_2)^2 - \alpha_1 q_1 - \beta_1 q_1^2 - \alpha_2 q_2 - \beta_2 q_2^2$$

Set the partial derivatives equal to zero:

$$\frac{\partial \pi}{\partial q_1} = a - 2b(q_1 + q_2) - \alpha_1 - 2\beta_1 q_1 = 0$$

$$\frac{\partial \pi}{\partial q_2} = a - 2b(q_1 + q_2) - \alpha_2 - 2\beta_2 q_2 = 0$$

Take total differentials with respect to q_1, q_2, and a, rearrange terms,

$$2(b + \beta_1)\, dq_1 + 2b\, dq_2 = da$$

$$2b\, dq_1 + 2(b + \beta_2)\, dq_2 = da$$

and solve for dq_1 and dq_2:

$$dq_1 = \frac{2\beta_2}{\mathscr{D}}\, da \qquad dq_2 = \frac{2\beta_1}{\mathscr{D}}\, da$$

where $\mathscr{D} = 4[b(\beta_1 + \beta_2) + \beta_1\beta_2] > 0$. Hence, $dq_1/da > 0$ and $dq_2/da > 0$. Furthermore, since the rate of change of MC in the ith plant is $dMC_i/dq_i = 2\beta_i$, output will increase more in the first plant if MC is increasing faster in the second $(\beta_2 > \beta_1)$. It will increase more in the second if $\beta_1 > \beta_2$.

7-6 Profit is

$$\pi = (100 - 3q + 4\sqrt{A})q - (4q^2 + 10q + A)$$

Setting the partials equal to zero,

$$\frac{\partial \pi}{\partial q} = (100 - 6q + 4\sqrt{A}) - (8q + 10) = 0$$

$$\frac{\partial \pi}{\partial A} = \frac{2q}{\sqrt{A}} - 1 = 0$$

From the second equation $q = \sqrt{A}/2$. Substituting in the first equation and solving for $\sqrt{A} = 30$ and $A = 900$, the corresponding output and price are $q = 15$, $p = 175$. It can be verified that the second-order conditions are satisfied.

7-8 The kth firm equates its MR and MC:

$$\text{MR}_k = 150 - 2q_k - 0.02\sum_{\substack{i=1\\ i\neq k}}^{101} q_i = 1.5q_k^2 - 40q_k + 270 = \text{MC}_k$$

Since all firms produce identical outputs under the present circumstances,

$$\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{101} q_i = 100q_k$$

The equality of MR and MC may be expressed by

$$150 - 4q_k = 1.5q_k^2 - 40q_k + 270$$

and

$$q_k^2 - 24q_k + 80 = (q_k - 4)(q_k - 20) = 0$$

with the roots $q_k = (4, 20)$. It is easily verified that only the larger of these outputs is relevant. For $q_k = 20$, $p_k = 90$, and $\pi_k = 400$.

Chapter 8

8-2 I's profit is

$$\pi_1 = q_1(100 - 2q_1 - 0.5q_1) - 2.5q_1^2 = 100q_1 - 5q_1^2$$

Setting the first derivative equal to zero, and solving for q_1 yields

$$\frac{d\pi_1}{dq_1} = 100 - 10q_1 = 0$$

$$q_1 = 10 \qquad q_2 = 5 \qquad p_1 = 75 \qquad \pi_1 = 500$$

8-4 The profit functions are

$$\pi_1 = 2(13x_1 - 0.2x_1^2) - [2 + 0.1(x_1 + x_2)]x_1$$

$$\pi_2 = 3(12x_2 - 0.1x_2^2) - [2 + 0.1(x_1 + x_2)]x_2$$

Setting the appropriate partial derivatives equal to zero yields the input reaction functions

$$x_1 = 24 - 0.1x_2 \qquad x_2 = 42.5 - 0.125x_1$$

Solving the reaction functions for x_1 and x_2, and substituting in the production and profit functions yields

$$x_1 = 20 \qquad q_1 = 180 \qquad \pi_1 = 200$$

$$x_2 = 40 \qquad q_2 = 320 \qquad \pi_2 = 640$$

8-6 The sum of the market shares equals one. Consequently, this is a constant-sum game. The payoff matrix in terms of I's shares is

I/II	0-mile	1-mile	2-mile	3-mile	4-mile
0-mile	0.500	0.125	0.250	0.375	0.500
1-mile	0.875	0.500	0.375	0.500	0.625
2-mile	0.750	0.625	0.500	0.675	0.750
3-mile	0.625	0.500	0.375	0.500	0.875
4-mile	0.500	0.375	0.250	0.125	0.500

Each duopolist will locate at the midpoint (the 2-mile marker) with equal shares

$$\max_i \min_j a_{ij} = \min_j \max_i a_{ij} = 0.500$$

8-8 For the monopoly case the buyer's profit maximum is derived from

$$\pi_B = 3(270q_2 - 2q_2^2) - p_2q_2 \qquad \frac{d\pi_B}{dq_2} = 810 - 12q_2 - p_2 = 0$$

and the demand function is $p_2 = 810 - 12q_2$. The monopolistic seller's profit maximum is derived from

$$\pi_S = (810 - 12q_2)q_2 - 1.5q_2^2 \qquad \frac{d\pi_S}{dq_2} = 810 - 27q_2 = 0$$

The monopoly solution is

$$q_{2S}^* = 30 \qquad p_{2S}^* = 450 \qquad \pi_{BS}^* = 5400 \qquad \pi_{SS}^* = 12{,}150$$

For the monopsony case the seller's profit maximum is derived from

$$\pi_S = p_2q_2 - 1.5q_2^2 \qquad \frac{d\pi_S}{dq_2} = p_2 - 3q_2 = 0$$

and the supply function is $p_2 = 3q_2$. The monopsonistic buyer's profit maximum is derived from

$$\pi_B = 3(270q_2 - 2q_2^2) - (3q_2)q_2 \qquad \frac{d\pi_B}{dq_2} = 810 - 18q_2 = 0$$

The monopsony solution is

$$q_{2B}^* = 45 \qquad p_{2B}^* = 135 \qquad \pi_{SB}^* = 3037.50 \qquad \pi_{BB}^* = 18{,}225$$

The quasi-competitive solution is obtained by equating price and MC

$$q_{2C}^* = 54 \qquad p_{2C}^* = 162 \qquad \pi_{SC}^* = 4374 \qquad \pi_{BC}^* = 17{,}496$$

with a total profit of 21,870. The bargaining limits are $135 \leq p_2 \leq 450$.

Chapter 9

9-2 The equilibrium conditions for the consumers are

$$\frac{p_1}{p_2} = \frac{E_{12} + 42}{E_{11} + 11} = \frac{q_{12} + 12}{q_{11} + 3} \qquad \frac{p_1}{p_2} = \frac{E_{22} + 8}{E_{21} + 19} = \frac{q_{22} + 8}{q_{21} + 9}$$

where the rightmost terms are obtained by substituting $E_{ij} = q_{ij} - q_{ij}^0$. Substituting for p_1/p_2 into the budget constraints gives the offer curves

$$2q_{11}q_{12} - 18q_{11} - 5q_{12} = 186 \qquad 2q_{22}q_{21} - 2q_{21} - q_{22} = 170$$

Substituting the equilibrium price ratio, $p_2/p_1 = 0.5$, in the individual excess demand functions derived in Exercise 9-1: $q_{11} = 13$, $q_{12} = 20$, $q_{21} = 5$, $q_{22} = 20$. Substituting these quantities in the offer curves shows that they are satisfied.

9-4 The budget constraint for the ith consumer includes her excess demand for money:

$$p_1E_{i1} + p_2E_{i2} + 0.2(p_1q_{i1}^0 + p_2q_{i2}^0) - q_{i3}^0 = 0 \qquad i = 1, 2$$

where q_{i3}^0 is i's initial money stock. Individual excess demand functions are obtained from the consumers' first-order conditions.

Setting aggregate excess demand equal to zero for each of the commodities,

$$E_{11} + E_{21} = 10 - \frac{12p_2}{p_1} + \frac{2q_3^0}{3p_1} = 0$$

$$E_{12} + E_{22} = \frac{9 - 20p_1}{p_2} + \frac{q_3^0}{p_2} = 0$$

where $q_3^0 = q_{13}^0 + q_{23}^0$ is the aggregate money stock. Multiplying the first equation by p_1 and the second by p_2, and rearranging terms,

$$-10p_1 + 12p_2 = \frac{2q_3^0}{3} \qquad 20p_1 - 9p_2 = \frac{q_3^0}{3}$$

These linear equations have the solution

$$p_1 = \frac{q_3^0}{15} \qquad\qquad p_2 = \frac{q_3^0}{9}$$

It is obvious that commodity prices vary in proportion to the aggregate money stock.

If money endowments are $43+2=45$, prices are $p_1=3$, $p_2=5$. If money endowments are tripled to $129+6=135$, prices are tripled to $p_1=9$, $p_2=15$.

Chapter 10

10-2 Substitution for p_2 from the second equation into the first gives the quadratic equation $p_3^2-5p_3+6=0$ with the roots 3 and 2. The second equation gives 4 and 2 as the corresponding values for p_2. Thus, there are two equilibrium solutions: $(p_2=4,\ p_3=3)$ and $(p_2=2,\ p_3=2)$.

10-4 For a three-commodity system (10-23) is

$$\lambda^2-(b_{22}+b_{33})\lambda+(b_{22}b_{33}-b_{23}b_{32})=0$$

For the system of Exercise 10-2

$$b_{22}=4p_2+22-13p_3 \qquad b_{23}=-13p_2-64+40p_3$$
$$b_{32}=1 \qquad b_{33}=-2$$

For the equilibrium (4, 3), the quadratic is $\lambda^2+3\lambda-2=0$ with the roots $\lambda=-1.5\pm\sqrt{4.25}$. The equilibrium is unstable since one of the roots is positive. For the equilibrium (2, 2) the quadratic is $\lambda^2-2\lambda+2=0$ with the roots $\lambda=1\pm i$. This equilibrium is also unstable since the real part of the roots is positive.

10-6 The consumer's excess demand function for Q_2, derived from the constrained utility maximization, multiplied by p_2 is

$$p_2E_{i2}=\frac{\alpha[p_1q_{i1}^0+p_2q_{i2}^0+(1-p_1-p_2)q_{i3}^0]}{(1+\alpha+\beta)}-p_2q_{i2}^0$$

This is a linear equation in prices when k_{i2} is substituted for E_{i2} to form a boundary. Similar derivations can be made for the other boundaries.

10-8 Let $d_1=0.7$, $d_2=0.8$, and $d_3=1.0$. Then

$$(0.7)(0.2)+(0.8)(0.5)+(1.0)(0.1)=0.64<0.7$$
$$(0.7)(0.1)+(0.8)(0.4)+(1.0)(0.4)=0.79<0.8$$
$$(0.7)(0.6)+(0.8)(0.4)+(1.0)(0.2)=0.94<1.0$$

and the conditions are satisfied. Many other values for the d's will also satisfy the conditions.

Chapter 11

11-2 The producer's profit is $96q-12q^2$, and its maximization yields $q=4$, $x=8$, $r=18$, and $p=84$. Total cost with r as a parameter is

$$C=rx=2rq$$

The Pareto condition is that price equal the appropriate MC:

$$100-4q=2r=2[2+2(2q)]=4+8q$$

with the solution $q=8$, $x=16$, $r=34$, $p=68$.

11-4 Let q_{11} and q_{21} be the quantities of the ordinary good, q_2 and q_3 the quantities of the public goods, and x^0 the fixed quantity of the primary factor. A Pareto-optimal allocation is found by maximizing the utility of the first consumer subject to the condition that the second enjoy a fixed level of utility and subject to the requirement that the production function be satisfied. Maximize

$$V=U_1(q_{11},q_2,q_3)+\lambda[U_2^0-U_2(q_{21},q_2,q_3)]+\theta F(q_{11}+q_{21},q_2,q_3,x^0)$$

where F denotes the production function. The first-order conditions are

$$\frac{\partial V}{\partial q_{11}}=\frac{\partial U_1}{\partial q_{11}}+\theta F_1=0 \qquad \frac{\partial V}{\partial q_2}=\frac{\partial U_1}{\partial q_2}-\lambda\frac{\partial U_2}{\partial q_2}+\theta F_2=0$$

$$\frac{\partial V}{\partial q_{21}} = -\lambda \frac{\partial U_2}{\partial q_{21}} + \theta F_1 = 0 \qquad \frac{\partial V}{\partial q_3} = \frac{\partial U_1}{\partial q_3} - \lambda \frac{\partial U_3}{\partial q_3} + \theta F_3 = 0$$

and the requirements that the constraints be satisfied.

The RPT between the public goods is F_2/F_3. Moving the last terms in the equations on the right to their right-hand sides and dividing one by the other, and then substituting for λ its solution from the equations on the left,

$$\frac{F_2}{F_3} = \frac{\dfrac{\partial U_1}{\partial q_2} - \lambda \dfrac{\partial U_2}{\partial q_2}}{\dfrac{\partial U_1}{\partial q_3} - \lambda \dfrac{\partial U_3}{\partial q_3}} = \frac{\dfrac{\partial U_1/\partial q_2}{\partial U_1/\partial q_{11}} + \dfrac{\partial U_2/\partial q_2}{\partial U_2/\partial q_{21}}}{\dfrac{\partial U_1/\partial q_3}{\partial U_1/\partial q_{11}} + \dfrac{\partial U_2/\partial q_3}{\partial U_2/\partial q_{21}}}$$

which requires that the RPT equal the ratio of the sums of the RCSs of the consumers between the ordinary good and the public goods.

11-6 Equating private MCs to price,

$$\frac{\partial C_1}{\partial q_1} = 4q_1 + 20 - 2q_2 = 240 \qquad \frac{\partial C_2}{\partial q_2} = 6q_2 + 60 = 240$$

which have the solution $q_1^c = 70$, $q_2^c = 30$.

The social cost function is the sum of the individual cost functions:

$$C = 2q_1^2 + 20q_1 - 2q_1q_2 + 3q_2^2 + 60q_2$$

The social MCs of the firms are now equated to the market price:

$$\frac{\partial C}{\partial q_1} = 4q_1 + 20 - 2q_2 = 240 \qquad \frac{\partial C}{\partial q_2} = -2q_1 + 6q_2 + 60 = 240$$

which have the solution $q_1^* = 84$, $q_2^* = 58$.

11-8 If unit subsidies of s_1 and s_2 are paid to producers, their cost functions become

$$C_1 = 2q_1^2 + 20q_1 - 2q_1q_2 - s_1q_1 \qquad C_2 = 3q_2^2 + 60q_2 - s_2q_2$$

Letting private MC equal price for each producer,

$$4q_1 + 20 - 2q_2 - s_1 = 240 \qquad 6q_2 + 60 - s_2 = 240$$

which for $q_1^* = 84$, $q_2^* = 58$ yields $s_1 = 0$, $s_2 = 168$.

While the producers were maximizing profits without subsidies, their maximum profits were $\pi_1^0 = 9800$, $\pi_2^0 = 2700$. After subsidization their profits are $\pi_1^* = 14{,}112$, $\pi_2^* = 348$. The appropriate lump-sum taxes and social dividend are

$$L_1 = \pi_1^* - \pi_1^0 + s_1q_1^* = 4312 \qquad L_2 = \pi_2^* - \pi_2^0 + s_2q_2^* = 7392$$

$$S = L_1 + L_2 - s_1q_1^* - s_2q_2^* = 1960$$

11-10 A Scitovsky contour is found by minimizing the total quantity of Q_1, given the quantity of Q_2 and the utility levels of the consumers. Using the first-order conditions and the constraints, λ_1 and λ_2 can be eliminated with the result

$$U_1^0 - U_2^0 - q_1q_2 + 2\sqrt{U_2^0 q_1 q_2} = 0$$

Letting $q_1q_2 = Z^2$, this is a quadratic equation:

$$Z^2 - (2\sqrt{U_2^0})Z + (U_2^0 - U_1^0) = 0$$

which has the solution

$$Z = \frac{2\sqrt{U_2^0} \pm \sqrt{4U_1^0}}{2} = \sqrt{U_2^0} \pm \sqrt{U_1^0}$$

Since the solution $\sqrt{U_2^0} - \sqrt{U_1^0}$ might make Z negative, which makes no sense in the present context, the final solution is

$$q_1q_2 = Z^2 = (\sqrt{U_1^0} + \sqrt{U_2^0})^2$$

as required.

11-12 If $\alpha \geq 1$, welfare is maximized by allocating all income to the individual for whom β_i is

largest. If two or more individuals tie for the largest β_i, all income is allocated to one of those tying. If $\alpha = 0$, all income distributions give $W = n$. If $\alpha < 0$, no finite welfare maximum exists since welfare can be made infinitely large by depriving any individual of all income.

Chapter 12

12-2 The function to be maximized is

$$V = c_1 c_2^{0.6} + \lambda[(1000 - c_1) + (1/1.08)(648 - c_2)]$$

The first-order conditions are

$$\frac{\partial V}{\partial c_1} = c_2^{0.6} - \lambda = 0 \qquad \frac{\partial V}{\partial c_2} = 0.6 c_1 c_2^{-0.4} - \frac{\lambda}{1.08} = 0$$

$$\frac{\partial V}{\partial \lambda} = 1000 - c_1 + \frac{1}{1.08}(648 - c_2) = 0$$

with the solution $c_1 = 1000$, $c_2 = 648$. The consumer is neither borrower nor lender.

12-4 The Lagrange function for each consumer is

$$V^* = c_1 c_2 + \mu[(y_1 - c_1) + (y_2 - c_2)(1 + i)^{-1}]$$

See the partials equal to zero,

$$\frac{\partial V^*}{\partial c_1} = c_2 - \mu = 0 \qquad \frac{\partial V^*}{\partial c_2} = c_1 - \mu(1 + i)^{-1} = 0$$

$$\frac{\partial V^*}{\partial \mu} = (y_1 - c_1) + (y_2 - c_2)(1 + i)^{-1} = 0$$

and solve for

$$c_1 = \frac{y_1 + y_2(1 + i)^{-1}}{2}$$

The consumer's excess demand for bonds is

$$y_1 - c_1 = \frac{y_1 - y_2(1 + i)^{-1}}{2}$$

Bond-market equilibrium requires that aggregate excess demand by the two groups of consumers equal zero:

$$100[5000 - 4200(1 + i)^{-1}] + 50[4000 - 7000(1 + i)^{-1}] = 700{,}000 - 770{,}000(1 + i)^{-1}$$

with the solution $i = 0.10$.

12-6 The present value of the entrepreneur's profit is

$$\pi = 100\sqrt{T}\, e^{-0.05T} - 20$$

which is maximized when $d\pi/dT = 0$:

$$\frac{d\pi}{dT} = \left(\frac{50}{\sqrt{T}} - 5\sqrt{T}\right)e^{-0.05T} = 0$$

which has the solution $T = 10$.

12-8 The present value of the entrepreneur's profit is

$$\pi = (4 + 8T - T^2)e^{-0.2T} - 4 - \int_0^T 0.4te^{-0.2t}\, dt$$

Setting the derivative with respect to T equal to zero,

$$\frac{d\pi}{dT} = (8 - 2T)e^{-0.2T} - 0.2(4 + 8T - T^2)e^{-0.2T} - 0.4Te^{-0.2T} = 0$$

with the roots $T = (2, 18)$. The second-order condition requires that

$$\frac{d^2\pi}{dT^2} = e^{-0.2T}(-0.04T^2 + 1.2T - 5.44) < 0$$

and is satisfied for $T = 2$, but not for $T = 18$.

12-10 The present value of the entrepreneur's profit is the present value of the quasi-rent stream, minus the original cost, plus the present value of the scrap value:

$$\pi = \int_0^T (85 - 4t)e^{-0.05t}\,dt - 500 + (500 - 40T)e^{-0.05T}$$

Letting $d\pi/dT = 0$ gives the solution $T = 10$.

Appendix

A-2 The derivatives are:

(*a*) $f'(x) = 18x^2 + 4x - 1$.

(*b*) $f'(x) = 2/\sqrt{x}$.

(*c*) $f'(x) = -e^{-x}(x-2) + e^{-x} = e^{-x}(3-x)$.

(*d*) $f'(x) = [12x^2(2x^2 - x) - (4x-1)4x^3]/(2x^2 - x)^2$.

(*e*) $f'(x) = [1/x^{-3}][-3x^{-4}] = -3/x$.

A-4 The answers are determined by the signs of the second derivatives:

(*a*) $f''(x) = 2 > 0$, and $f(x)$ is strictly convex.

(*b*) $f''(x) = -1/x^2 < 0$, and $f(x)$ is strictly concave.

(*c*) $f''(x) = a^2e^{ax} > 0$, and $f(x)$ is strictly convex.

(*d*) $f''(x) = 6x - 4$ which does not have a unique sign for $x \geqq 0$, and $f(x)$ is neither strictly convex nor strictly concave over the entire interval.

A-6 The total differential is

$$dy = \left(2x_2^2 + \frac{1}{x_1}\right)dx_1 + (4x_1x_2 + e^{x_3})\,dx_2 + x_2e^{x_3}\,dx_3$$

A-8 Setting the partial derivatives equal to zero,

$$f_1 = 5 + x_2 - x_1 = 0 \qquad f_2 = 10 - 6x_2 + x_1 = 0$$

These equations have the solution $x_1 = 8$, $x_2 = 3$. The second-order conditions for a maximum are satisfied by this solution:

$$f_{11} = -1 < 0 \qquad \begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -6 \end{vmatrix} = 5 > 0$$

A-10 If $\alpha + \beta < 1$, the principal minors of the Hessian will alternate in sign, beginning with minus, as required for strict concavity:

$$f_{11} = \alpha(\alpha - 1)Ax_1^{\alpha-2}x_2^{\beta} < 0$$

$$\begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha(\alpha-1)Ax_1^{\alpha-2}x_2^{\beta} & \alpha\beta Ax_1^{\alpha-1}x_2^{\beta-1} \\ \alpha\beta Ax_1^{\alpha-1}x_2^{\beta-1} & \beta(\beta-1)Ax_1^{\alpha}x_2^{\beta-2} \end{vmatrix}$$

$$= \alpha\beta(1 - \alpha - \beta)A^2x_1^{2(\alpha-1)}x_2^{2(\beta-1)} > 0$$

Conversely, $\alpha + \beta \geqq 1$ will violate the requirement that the Hessian be positive, and concavity cannot hold.

A-12 Form the Lagrange function

$$V = x_1^2x_2 + \lambda(5x_1 + 2x_2 - 300)$$

where λ is an undetermined multiplier, and set its partial derivatives equal to zero:

$$\frac{\partial V}{\partial x_1} = 2x_1x_2 + 5\lambda = 0 \qquad \frac{\partial V}{\partial x_2} = x_1^2 + 2\lambda = 0$$

$$\frac{\partial V}{\partial \lambda} = 5x_1 + 2x_2 - 300 = 0$$

Substitute $2x_2 = 5x_1/2$ from the first two equations into the third:

$$5x_1 + \frac{5x_1}{2} - 300 = 0$$

which gives the solution $x_1 = 40$, $x_2 = 50$.

The second-order condition, which requires that the bordered Hessian be positive, is satisfied:

$$\begin{vmatrix} 2x_2 & 2x_1 & 5 \\ 2x_1 & 0 & 2 \\ 5 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 40x_1 - 8x_2 = 1200 > 0$$

A-14 A function is concave if $f_{11} \leqq 0$ and $\mathscr{H} = f_{11}f_{22} - f_{12}^2 \geqq 0$, and strictly concave if the strict inequalities hold. A function is quasi-concave if $\mathscr{D} = f_{12}^2 f_1 f_2 - f_{11}f_2^2 - f_{22}f_1^2 \geqq 0$, and strictly quasi-concave if the strict inequality holds. The reader may verify that the following functions have the desired properties by evaluating the appropriate determinants:

(*a*) $f(x_1, x_2) = -(\ln x_1 - \ln x_2)$.
(*b*) $f(x_1, x_2) = x_1x_2$.
(*c*) $f(x_1, x_2) = x_1 + x_2$.
(*d*) $f(x_1, x_2) = x_1^{0.5}x_2^{0.5}$.

A-16 The Jacobian is

$$\mathscr{J} = \begin{vmatrix} 2x_1 + 4x_2 & 4x_1 + 8x_2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

and vanishes identically. Since the left-hand side of the first equation is the square of the left-hand side of the second, any solution satisfying one will satisfy the other if $y_1 = y_2^2$. If $y_1 \neq y_2^2$ there is no solution at all.

A-18 (*a*) $\int_6^{10} (2x + 3)\, dx = (x^2 + 3x)_{10} - (x^2 + 3x)_6 = 130 - 54 = 76.$

(*b*) $\int_1^e \frac{1}{x}\, dx = (\ln x)_e - (\ln x)_1 = 1 - 0 = 1.$

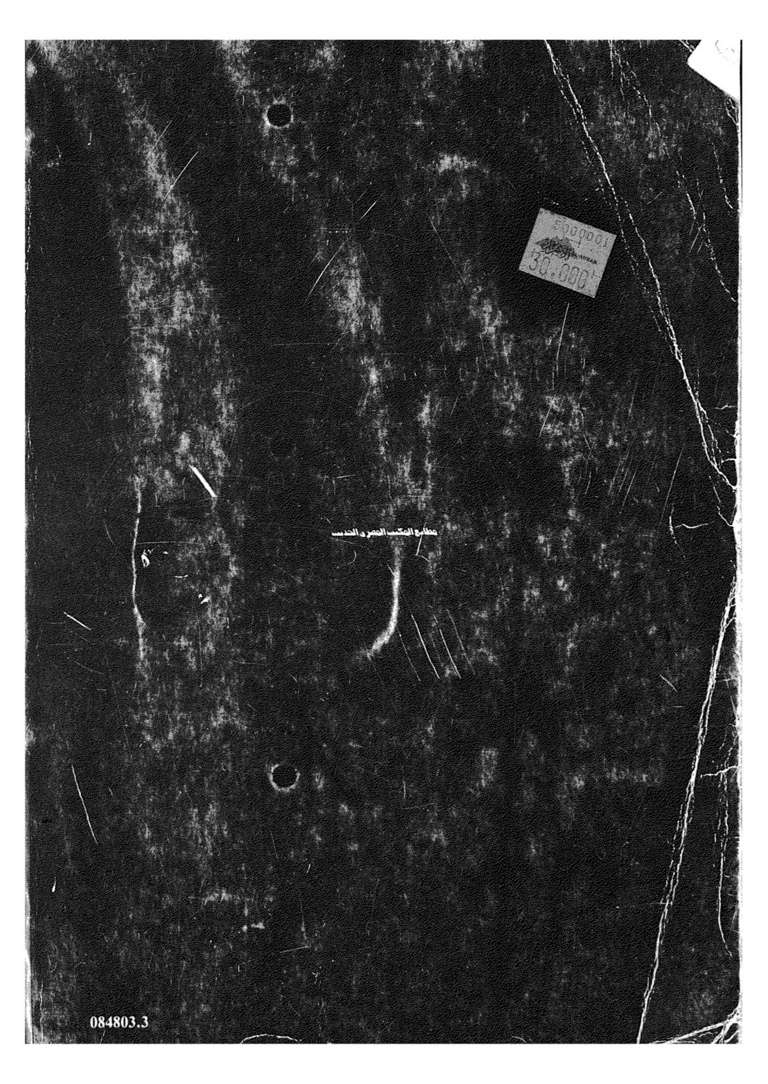
A-20 The appropriate quadratic is $x^2 + 5x + 6 = 0$ with the roots $(-2, -3)$. The solution has the form

$$y = k_1e^{-2t} + k_2e^{-3t}$$

Using the initial conditions, $y_0 = k_1 + k_2 = 6$, $y_0' = -2k_1 - 3k_2 = 3$ gives $k_1 = 21$, $k_2 = -15$.

رقم الإيداع ٨٤/١٦٥١

مطابع المكتب المصري الحديث


مطابع المكتب المصري الحديث
084803.3